Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 25, 57–70 (1972)


# Der Anziehungsbereich von operator-stabilen Verteilungen im $R_2$

J. Michaliček

## Einleitung

In den Arbeiten [6] und [8] wurden eine Darstellung der operator-stabilen Maße und einige ihrer Eigenschaften angegeben. Es bleibt noch die Frage nach dem Anziehungsbereich zu beantworten, die hier, wegen der Nichtkommutativität der linearen Operatoren des $\mathbb{R}_K$ in sich, nicht in gleicher Weise zu lösen sein wird wie im $\mathbb{R}_1$. (Die Menge aller linearen Operatoren des $\mathbb{R}_K$ in sich sei ab nun mit $S(\mathbb{R}_K)$ bezeichnet.) Bevor nun auf die einzelnen Möglichkeiten des Anziehungsbereiches eingegangen wird, sollen die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse der Arbeiten [6] und [8] wiederholt werden.

*Definition 1.* Ein $W$-Maß $\Phi$ auf $\mathbb{R}_K$ heißt operator-stabil, falls es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in S(\mathbb{R}_K)$ und ein $a_n \in \mathbb{R}_K$ gibt, so daß die Gleichung

$$(A_n \circ \Phi)^{n*} * \vartheta_{a_n} = \Phi \tag{1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. $A_n \circ \Phi$ ist definiert durch:

$$A_n \circ \Phi(M) = \Phi(M \cdot A_n), \qquad M \subset \mathbb{R}_K.$$

Unter $*$ soll die Faltungsoperation und unter $\vartheta_{a_n}$ das Einsmaß auf $a_n$ verstanden werden.

Es zeigt sich [8], daß die Operatoren $A_n$ die Gestalt $A_n = \exp(B \log n)$ haben. Dabei ist $B \in S(\mathbb{R}_K)$. Wie leicht zu erkennen ist, bildet die Menge der $A_n$ eine multiplikative einparametrige Gruppe, die zu einer Gruppe erweitert werden kann. Diese Gruppe sei ab nun die „Gruppe des stabilen Maßes" genannt.

Im $\mathbb{R}_2$ scheint es zweckmäßig nach den Spektraleigenschaften von $B$ zu unterscheiden. Dadurch ergeben sich 4 Fälle, die in folgender Tabelle kurz dargelegt werden sollen. Dabei ist zu beachten, daß eine lineare Transformation vorgenommen wurde, die die Eigenvektoren in die Vektoren (1, 0) bzw. (0, 1) bzw. $(1, i)$ bzw. $(1, -i)$ überführt.

| Fall | $B$ | Charakteristische Funktion |
|---|---|---|
| 1 | $\begin{Bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{Bmatrix}$ | $\exp\{-c\,\lvert t\rvert^{\alpha} + i\langle t\, d'\rangle\}$ |
| 2 | $\begin{Bmatrix} 1/\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_2 \end{Bmatrix}$ | $\exp\left\{-\{c_1 \lvert t_1\rvert^{\alpha_1} + c_2 \lvert t_2\rvert^{\alpha_2}\}\, h\left(\frac{\lvert t_1\rvert^{\alpha_1}}{\lvert t_2\rvert^{\alpha_2}} \operatorname{sign} t_1, \operatorname{sign}\frac{t_1}{t_2}\right) + i\langle t\, d'\rangle\right\}$ |
| 3 | $\begin{Bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ s/\alpha & 1/\alpha \end{Bmatrix}$ | $\exp\{-c\lvert t_1\rvert^{\alpha_1} h(t_1 \exp[t_2/t_1]) + i\langle t\, d'\rangle\}$ |
| 4 | $\begin{Bmatrix} 0 & 1/\alpha \\ 1/\alpha & 0 \end{Bmatrix}$ | $\exp\{-c\lvert t_1^2 + t_2^2\rvert^{\alpha/2} h([t_1^2 + t_2^2]^{\alpha/2} \exp\{\operatorname{arctg}(t_2/t_1)\}) + i\langle t\, d'\rangle\}$ |

(2)

Die Eigenschaften der Konstanten $c_i$ und $c$ können ebenso wie die Funktionen $h$ in [6] nachgesehen werden; für Fall 1 s. [3].

## § 1. Einige Resultate über charakteristische Funktionen im $\mathbb{R}_K$

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der charakteristischen Funktionen dargestellt. Sind die Resultate bekannt, wird auf einen Beweis verzichtet.

**Hilfssatz 1.1.** *Eine Folge von W-Maßen konvergiert genau dann schwach gegen ein W-Maß auf dem $\mathbb{R}_K$, falls die entsprechenden charakteristischen Funktionen gleichmäßig in jeder kompakten Menge konvergieren.*

**Hilfssatz 1.2.** *Die charakteristische Funktion eines nicht degenerierten Maßes F ist außer im Punkt 0 in einer Umgebung der Null kleiner als 1. (Dabei heißt ein Maß degeneriert, wenn es auf einer Hyperebene konzentriert ist.)*

*Beweis.* Nach einer Ungleichung über charakteristische Funktionen gilt (s. [5]): $|f(t)-f(2t)|\leqq 2\,|f(0)-f(t)|$. Ist $f(t)=1$, so folgt $f(2t)=1$ und $\forall\, n\colon f(nt)=1$. Es werde nun angenommen, die Aussage des Satzes sei falsch. Dann gibt es eine Nullfolge $t^{(i)}\to 0$ mit $f(t^{(i)})=1$. Aus der obigen Überlegung folgt, daß auch $f(n\,t^{(i)})=1$ für alle $n$. Es werde eine Folge $n_i$ gewählt, so daß $|n_i\,t^{(i)}|<1$ und $|n_{(i+1)}\,t^{(i)}|\geqq 1$ ist. Die Folge $n_i\,t^{(i)}$ hat daher eine Teilfolge $n_{i_j}\,t^{(i_j)}$ mit einem Grenzwert $\bar{t}$, wobei $|\bar{t}|=1$ ist. Nach den vorhergehenden Überlegungen gilt $\forall\,\lambda>0$, daß $f([\lambda\, n_{i_j}]\, t^{i_j})=1$, wenn $n_{i_j}\, n_{i_j}\,\lambda>1$. Dabei bedeutet $[a]$ die nächst kleinere ganze Zahl an $a$. Aus der Stetigkeit der charakteristischen Funktionen folgt nun $\forall\,\lambda>0$: $f(\bar{t}\cdot\lambda)=1$, da $\lim\limits_{j\to\infty}[\lambda\, n_{i_j}]\, t^{i_j}=\bar{t}\cdot\lambda$. Für negative $\lambda$'s gilt eine ähnliche Überlegung. Daraus erkennt man, daß $F$ ein degeneriertes Maß ist. Dies steht im Widerspruch zur Annahme.

Für das Folgende sei vorausgesetzt, daß alle operator-stabilen Maße nicht degeneriert seien.

**Hilfssatz 1.3.** *Die Folge der charakteristischen Funktionen*

$$f^n(t\,B_n')\exp\{i\langle t\,b_n'\rangle\}\to\varphi(t),\qquad t\in\mathbb{R}_K \tag{1.1}$$

*konvergiere gleichmäßig auf jeder kompakten Menge, wobei $B_n\in S(\mathbb{R}_K)$ und $b_n\in\mathbb{R}_K$ ist. $\varphi$ ist dann die charakteristische Funktion eines operator-stabilen Maßes sofern sie nicht degeneriert ist, und*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|t\cdot B_n'|=0.$
2) *Es gibt eine Umgebung der Null $U(0)$, so daß*

$$\bar{f}(t\cdot B_n')\exp\{i\langle t, b_n'\rangle\}\quad mit\quad \bar{f}(t)=f(t)\cdot\chi_{U(0)}$$

*gleichmäßig gegen $\varphi$ konvergiert.*

*Beweis.* Der Beweis von 1) kann unter Benutzung von Hilfssatz 1.2 direkt vom 1-dimensionalen übernommen werden. Für den Beweis von 2) nehme man als $U(0)$ die in Hilfssatz 1.2 erwähnte Umgebung. Die Aussage folgt dann aus Hilfssatz 1.1.

**Hilfssatz 1.4.** *Es seien $A_n$, $A_n^* \in S(\mathbb{R}_K)$; $a_n$, $a_n^* \in \mathbb{R}_K$ und $X_n, X, Y$ k-dimensionale Zufallsvariable, deren Verteilungen nicht degenerieren. Dann ist notwendig und hinreichend für die Konvergenz in Verteilung von $X_n A_n + a_n \to X$ und $X_n A_n^* + a_n^* \to Y$ die Existenz von $A \in S(\mathbb{R}_K)$ und $a \in \mathbb{R}_K$, so daß die Verteilung von $Y \cdot A + a$ und $X$ gleich sind und die Gleichungen*

$$A_n = A_n^* G_n I_n A, \qquad a_n = a_n^* + a$$

*erfüllt sind. Dabei konvergieren $I_n$ gegen $I$, und $G_n$ läßt die Verteilung von $X$ invariant.*

Der Beweis und einige interessante Folgerungen finden sich in [2]. Aus diesem Satz lassen sich einige für unser Problem wesentliche Eigenschaften der Operatoren $B_n$ herleiten.

**Satz 1.1.** *Die Folge der charakteristischen Funktionen*

$$f^n(t \cdot B_n') \exp\{i \langle t, b_n' \rangle\} \to \varphi(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_K,$$

*konvergiere gleichmäßig in jeder kompakten Menge $(B_n \in S(\mathbb{R}_K)\ b_n \in \mathbb{R}_K)$. Dann haben die Operatoren $B_n'$ folgende Eigenschaften:*

1) $B_{n+1}'^{-1} B_n = G_n' \cdot I_n'$.

2) $B_n'^{-1} B_{[rn]}' = G_n^{*\prime} I_n' A_r'$, $\quad \forall r > 0$.

*$G_n'$, $G_n^{*\prime}$ läßt die charakteristische Funktion $\varphi$ invariant und $A_r$ genügt der Gleichung:*

$$\varphi^r(t A_r') \exp\{i \langle t a_r' \rangle\} = \varphi(t).$$

*Beweis.* Seien $Z_i$ unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung $F$. Ist außerdem $X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, so gilt: $X_n B_n + b_n \xrightarrow{v} X$, wobei die Verteilung von $X$, $\Phi$ ist. Für die charakteristische Funktionen bedeutet dies die gleichmäßige Konvergenz von:

$$f^n(t \cdot B_n') \exp\{i \langle t b_n' \rangle\} \to \varphi(t)$$

auf jeder kompakten Menge. Man sieht leicht, daß auch

$$X_n B_{n+1} + b_{n+1} \to X \quad \text{und} \quad X_n B_{[rn]} + b_{[rn]} \to X A_r + a_r$$

in Verteilung konvergiert. Aus Hilfssatz 1.4 folgt nun:

$$B_{n+1} = B_n G_n I_n, \quad B_n = B_{[rn]} G_n^* I_n,$$

also insbesondere: $B_{n+1}'^{-1} B_n' = I_n' G_n'$ und $B_n'^{-1} B_{[rn]}' = I_n' G_n^{*\prime}$.

**Hilfssatz 1.5.** *Es sei $t^{(i)} \in \mathbb{R}_K$ eine Nullfolge und $B_n' \in S(\mathbb{R}_K)$ eine Folge von Operatoren, die* (1.1) *erfüllt. Dann gibt es eine Folge $n_i$, so daß* $0 < K < |t^{(i)} B_{n_i}'^{-1}| < L < \infty$.

*Beweis.* Da $t^{(i)}$ eine Nullfolge ist, gilt: $f(t^{(i)}) \to 1$. Es gibt daher Zahlen $n_i$, so daß $|f^{n_i}(t^{(i)})| \to \frac{1}{2}$ und somit auch $|f^{n_i}(t^{(i)} B_{n_i}'^{-1} B_{n_i}')| \to \frac{1}{2}$ und $|f^{n_i}(u^{(i)} B_{n_i}')| \to \frac{1}{2}$ konvergiert, wobei $u^{(i)} = t^{(i)} B_{n_i}'^{-1}$ gesetzt sei. Aus der gleichmäßigen Konvergenz erhält man:

$$|f^{n_i}(u^{(i)} B_{n_i}')| \to |\varphi(u^{(i)})| \to \tfrac{1}{2}.$$

Da die Menge $\{u: \frac{1}{4} \leqq |\varphi(u)| \leqq \frac{3}{4}\}$ in einer Menge der Gestalt $\{u: 0 < K \leqq u \leqq L < \infty\}$ enthalten ist, ist der Beweis erbracht.

**Korollar.** *Es sei* $t^{(i)} \in \mathbb{R}_K$ *eine Nullfolge und* $B'_n$ *eine Folge von Operatoren, die* (1.1) *erfüllt. Dann gibt es eine Folge* $n_i$ *und eine Teilfolge* $i_j$, *so daß*

$$t^{(i_j)} B'^{-1}_{n_{i_j}} \to \bar{t} \quad \textit{mit} \quad |\bar{t}| = 1.$$

Der Beweis benützt die Kompaktheit der Mengen $\{t\colon 0 < K \leqq t \leqq L < \infty\}$.

## § 2. Definition der Anziehungsbereiche

*Definition 2.1.* Eine Verteilung $F$ liegt im Anziehungsbereich einer operator-stabilen Verteilung $\Phi$, wenn es Operatoren $B_n \in S(\mathbb{R}_K)$ und $b_n \in \mathbb{R}_K$ gibt, so daß die Beziehung:

$$B_n^{-1} \circ F^{n*} * \vartheta_{b_n}(M) \to \Phi(M) \tag{2.1}$$

für alle Borel-meßbaren Mengen $M$ erfüllt ist.

*Definition 2.2.* Eine Verteilung $F$ liegt im kommutativen Anziehungsbereich von $\Phi$, falls in (2.1) die Operatoren $B_n$ kommutativ zu $A_r$ (s. Darstellung der operator-stabilen Maße) gewählt werden können.

*Definition 2.3.* Eine Verteilung $F$ liegt im verhältnistreuen Anziehungsbereich von $\Phi$, falls in (2.1) die Operatoren $B_n$ aus der zu $\Phi$ gehörenden Gruppe der Operatoren $\{A_r\}$ genommen werden können.

*Definition 2.4.* Zwei Verteilungen $F$ und $G$ liegen in derselben Klasse des Anziehungsbereiches der Verteilung $\Phi$, falls (1.1) für beide Verteilungen erfüllt ist und $B_n$ und $b_n$ für beide Verteilungen gleich gewählt werden können.

Aus Hilfssatz 1.4 erkennt man, daß wirklich eine Klasseneinteilung zugrunde liegt. Natürlich liegt $\Phi$ in seinem eigenen Anziehungsbereich.

*Definition 2.5.* Der normale Anziehungsbereich ist die Klasse des Anziehungsbereiches von $\Phi$, die $\Phi$ enthält.

## § 3. Der normale Anziehungsbereich

**Satz 3.1.** *Zwei Verteilungen* $F$ *und* $G$ *liegen in derselben Klasse des Anziehungsbereiches einer stabilen Verteilung* $\Phi$, *falls mindestens eine im Anziehungsbereich von* $\Phi$ *liegt und für deren charakteristischen Funktionen in einer Umgebung der Null die Gleichung*

$$f(t) = \{g(t)\}^{L(t)} \tag{3.1}$$

*erfüllt ist, und* $L\colon \mathbb{R}_K \to \mathbb{C}$ *die Eigenschaft* $\lim_{|t| \to 0} L(t) = 1$ *hat.*

*Beweis.* O.B.d.A. sei $G$ im Anziehungsbereich von $\Phi$. Wenn nun (1.1) für $g$ erfüllt ist, muß gezeigt werden, daß $F$ in derselben Klasse von $\Phi$ liegt. Aus

$$g^n(t \cdot B'_n) \exp\{i\langle t, b'_n\rangle\} \to \varphi(t)$$

erhält man wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} f^n(t \cdot B'_n) \exp\{i\langle t, b'_n\rangle\} = \lim_{n\to\infty} \{g(t\, B'_n)\}^{n\, L(t\, B'_n)} \exp\{i\langle t\, b'_n\rangle\} = \varphi(t).$$

Nun seien $F$ und $G$ in derselben Klasse des Anziehungsbereiches von $\Phi$. Jede Funktion kann in einer Umgebung der Null wie in (3.1) dargestellt werden, da $\varphi$ in einer Umgebung der Null ungleich 0 oder 1 ist, wie aus Hilfssatz 1.2 zu entnehmen ist. Es muß hier lediglich die Eigenschaft der Funktion $L$ nachgeprüft werden. Dies erhält man durch indirekte Beweisführung, wie folgt: Angenommen es gibt eine Nullfolge $t^{(i)} \in \mathbb{R}_K$ mit $\lim\limits_{|t^{(i)}| \to 0} L(t^{(i)}) = K \neq 1$. Nach dem Korollar des Hilfssatzes 1.5 gibt es eine Folge $i_j$, so daß $\lim\limits_{j \to \infty} t^{(i_j)} B'^{-1}_{n_{i_j}} = \bar{t}$ mit $|\bar{t}| = 1$ ist. Dann gilt aber:

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{t}) &= \lim_{n \to \infty} f^n(\bar{t} B'_n)^{L(\bar{t} B'_n)} \exp\{i \langle t, b'_n \rangle\} \\ &= \lim_{j \to \infty} f^{n_{i_j}}(t^{(i_j)})^{L(t^{(i_j)})} \exp\{i \langle t, b'_{n_{i_j}} \rangle\} \\ &= \lim_{j \to \infty} \varphi(\bar{t})^{L(t^{(i_j)})} = \varphi(\bar{t})^K.\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $K = 1 \bmod 2\pi i$ sein muß. Aus Stetigkeitsgründen kann $K = 1$ gewählt werden. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

**Korollar.** *Eine Verteilung $F$ liegt im normalen Anziehungsbereich einer Verteilung $\Phi$, wenn für die charakteristische Funktion $f$ in einer Umgebung der Null die Gleichung*

$$f(t) = \{\varphi(t)\}^{L(t)} \tag{3.2}$$

*erfüllt ist, wobei für $L$: $\mathbb{R}_K \to \mathbb{C}$ gilt $\lim\limits_{|t| \to 0} L(t) = 1$.*

**Satz 3.2.** *Zwei Verteilungen $F$ und $G$ liegen genau dann in derselben Klasse des Anziehungsbereiches einer stabilen Verteilung $\Phi$, die keine Normalverteilung als Randverteilung besitzt, wenn mindestens eine von ihnen in diesem Anziehungsbereich liegt und wenn sie die Gleichung*

$$\lim_{n \to \infty} F(M \cdot B_n^{-1}) / G(M \cdot B_n^{-1}) = 1 \tag{3.3}$$

*für alle meßbaren Mengen $M$, deren Abschluß nicht den Nullpunkt enthält und die die Eigenschaft*

$$\lim_{n \to \infty} n\, G(M \cdot B_n^{-1}) \neq 0 \tag{3.4}$$

*haben, erfüllen. Zusätzlich muß noch*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|x| < c} x\, n\, d(B_n^{-1} \circ F) - \int_{|x| < c} x\, n\, d(B_n^{-1} \circ G) = 0 \tag{3.5}$$

*gelten. Dabei ist $B_n$ der Gleichung* (1.1) *entnommen.*

Der Beweis soll hier nicht ausgeführt werden. Er folgt aus einem Ergebnis aus [3] und [7].

*Bemerkung 1.* Die Bedingung (3.5) bedeutet für Verteilungen, deren Erwartungswert existiert, daß $\int x\, dF = \int x\, dG$ ist. Im Falle, daß in der Darstellung des operator-stabilen Maßes $\alpha_i$ bzw. $\alpha < 1$ sind, ist diese Bedingung leer.

*Bemerkung 2.* Hat $\Phi$ die Normalverteilung als Randverteilung, so ist $\Phi$ ein Produktmaß, und man kann diesen Satz auf den eindimensionalen Fall zurückführen und erhält Bedingungen über die Varianzen der Randverteilungen.

*Bemerkung 3.* Es ist möglich, statt $F(M \cdot B_n)/G(M \cdot B_n) \to 1$ auch $F(M_i)/G(M_i) \to 1$ für Folgen von Mengen vorauszusetzen, wenn nur

$$\infty > \overline{\lim}\, i\, F(M_i) \geqq \underline{\lim}\, i\, F(M_i) > 0$$

und $0 \notin \overline{\bigcup\limits_1 M_i}$ erfüllt ist.

## § 4. Der verhältnistreue Anziehungsbereich

**Satz 4.1.** *Eine Verteilung $F$ liegt genau im verhältnistreuen Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung $\Phi$* (s. [2]), *falls ihre charakteristische Funktion folgende Form hat:*

| Fall | Charakteristische Funktion |
|---|---|
| 2 | $\exp\left\{-[c_1\|t_1\|^{\alpha_1} L(\|t_1\|^{\alpha_1})+c_2\|t_2\|^{\alpha_2} L(\|t_2\|^{\alpha_2})]\, h\left(\frac{\|t_1\|^{\alpha_1}}{\|t_2\|^{\alpha_2}} \operatorname{sign} t_1, \operatorname{sign}\frac{t_1}{t_2}\right) M(t_1,t_2)+i\langle t,d'\rangle\right\}$ (4.1) |
| 3 | $\exp\{-c\|t_1\|^{\alpha} L(\|t_1\|)\, h(t_1 \exp[t_2/t_1])\, M(t_1,t_2)+i\langle t,d'\rangle\}$ |
| 4 | $\exp\{-c\|t\|^{\alpha} L(\|t\|)\, h(\|t\|^{\alpha} \exp\{\operatorname{arctg}(t_2/t_1)\})\, M(t_1,t_2)+i\langle t,d'\rangle\}$ |

*Dabei ist $L$ in allen drei Fällen langsam wachsend, d.h.*

$$L\colon \mathbb{R}_1^+ \to \mathbb{R}_1^+ \quad \textit{und} \quad \lim_{t\to 0} \frac{L(s\,t)}{L(t)} = 1.$$

*$h$, $c_i$ bzw. $c$ sind der Darstellung des operator-stabilen Maßes $\Phi$ entnommen, und $M$ hat die Eigenschaft $M\colon \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ $\lim_{|t|\to 0} M(t_1,t_2)=1$ sowie $d\in\mathbb{R}_K$.*

*Beweis.* Nach Satz 3.1 muß für jede Klasse des Anziehungsbereiches ein Vertreter angegeben werden. Man erhält dann alle Maße dieser Klasse durch die Multiplikation des Exponenten mit einer Funktion $M$, die die oben angegebene Eigenschaft besitzt.

Es sei zunächst $F$ im verhältnistreuen Anziehungsbereich von $\Phi$. Nach Definition 2.3 können die $B_n$'s in folgender Weise gewählt werden:

$$B_n = A_{n\,l(n)} \qquad \text{mit } l\colon N \to \mathbb{R}^+. \tag{4.2}$$

Nach Satz 1.1 gilt nun:

$$B_n'^{-1} B'_{[sn]} = A'^{-1}_{n\,l(n)} A_{[ns]\,l([sn])} \to A_s.$$

Daraus erkennt man, daß $l$ langsam wächst, d.h. $l([n\,s])/l(n) \to 1$. Wie aus [1] und [4] zu entnehmen ist, kann auf Grund des Hilfssatzes 1.4 $n\,l(n)$ monoton gewählt werden. Aus der Funktionalgleichung

$$l(n)\,L(n\,l(n)) = 1 \tag{4.3}$$

kann eine stetige langsam wachsende Funktion $L$ bestimmt werden. Dies ist dann die in Formel (4.1) angegebene Funktion $L$.

Umgekehrt: Es ist noch zu zeigen, daß zu einem $F$, das in der Form (4.1) gegeben ist, $B_n \in \{A_r\}$ und $b_n \in \mathbb{R}_K$ existieren, so daß (1.1) erfüllt ist. Da nun $L$ gegeben ist, fasse man in Gleichung (4.3) $l(n)$ als unbekannt auf und definiere $l(n)$ als die kleinste Lösung der Gleichung (4.3). Das gesuchte $B_n$ ist dann definiert durch $A_{nl(n)} = B_n$. Hier sei auf die Arbeit [1] verwiesen, in der diese Schlüsse bei ähnlichen Problemen ausführlicher durchgeführt werden.

**Satz 4.2.** *Eine Verteilung $F$ liegt genau dann im verhältnistreuen Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung $\Phi$, die keine Normalverteilung als Randverteilung* *besitzt, falls die Funktion*

$$F(M \cdot A_r)/\Phi(M \cdot A_r)$$

*für alle meßbaren M, für die* $\varliminf_s sF(M \cdot A_s) > 0$ *ist, für* $r \to \infty$ *langsam wächst.*

Auch hier sei der Beweis nicht ausgeführt, sondern wieder auf die Arbeit [6] hingewiesen. Es lassen sich ähnliche Bemerkungen wie bei Satz 3.2 anschließen.

## § 5. Der allgemeine kommutative Anziehungsbereich

**Satz 5.1.** *Eine Verteilung F liegt genau dann im kommutativen Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung Φ, falls ihre charakteristische Funktion folgende Form hat:*

| Fall | Charakteristische Funktion | |
|---|---|---|
| 2 | $\exp\left\{-[c_1\|t_1\|^{\alpha_1} L_1(\|t_1\|) + c_2\|t_2\|^{\alpha_2} L_2(\|t_2\|)] \cdot h\left(\frac{\|t_1\|^{\alpha_1} L_1(\|t_1\|)}{\|t_2\|^{\alpha_2} L_2(\|t_2\|)} \operatorname{sign} t_1, \operatorname{sign} t_1/t_2\right) \cdot M(t_1, t_2) + i\langle t, d'\rangle\right\}$ | (5.1) |
| 3 | $\exp\{-c\|t_1\|^\alpha L(\|t_1\|)\, h(t_1\, Q(\|t_1\|) \exp t_2/t_1)\, M(t_1, t_2) + i\langle t, d'\rangle\}$ | |
| 4 | $\exp\{-c\|t\|^\alpha L(\|t\|)\, h(\|t\|\, Q(\|t\|) \exp\{\operatorname{arctg} t_2/t_1\})\, M(t_1, t_2) + i\langle t, d'\rangle\}$ | |

*Dabei sind die Funktionen* $L_i$: $\mathbb{R}_1^+ \to \mathbb{R}_1$, $L$: $\mathbb{R}_1^+ \to \mathbb{R}_1$ *und* $Q$: $\mathbb{R}_1^+ \to \mathbb{R}_1^+$ *langsam wachsend,* $d \in \mathbb{R}_2$, *die Funktionen* $M$: $\mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ *haben die Eigenschaft* $\lim_{|t| \to 0} M(t) = 1$ *und die Konstanten* $c$, $c_i$ *sowie die Funktion h sind der Darstellung des operator-stabilen Maßes Φ entnommen.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt mit denselben Argumenten wie für Satz 4.1. Dabei sind im Fall 2 anstelle der Gleichung (4.3) die Gleichungen:

$$l_i^{\alpha_i}(n)\, L_i\big(n^{-1/\alpha_i}\, l_i(n)\big) = 1 \tag{5.2}$$

zugrunde gelegt, wobei $B_n$ die Gestalt

$$\begin{Bmatrix} n^{-1/\alpha_1} l_1(n) & 0 \\ 0 & n^{-1/\alpha_2} l_2(n) \end{Bmatrix}$$

hat. Die Funktionen $l_i$: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_1^+$ sind auch hier langsam wachsend.

Im Fall 3 hat $B_n$ die Gestalt:

$$\begin{Bmatrix} n^{-1/\alpha} l(n) & 0 \\ -R(n)\, n^{-1/\alpha} l(n) \log\{n^{-1/\alpha} l(n)\} & n^{-1/\alpha} l(n) \end{Bmatrix},$$

wobei die Funktionen $l$ und $\exp(R(n))$ langsam wachsen. Die Gleichung (4.3) wird ersetzt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} l^\alpha(n)\, L\big(n^{-1/\alpha}\, l(n)\big) &= 1, \\ Q\big(n^{-1/\alpha}\, l(n)\big) \exp\big(R(n)\big) &= 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Im Fall 4 muß zunächst die Transformation

$$t_1 = s\cos\rho \qquad l \geqq 0$$

$$t_2 = s\sin\rho \qquad 0 \leqq \rho \leqq 2\pi$$

ausgeführt werden. Dadurch gehen die Operatoren $B_n$ in die Operatoren $O_n$ über, die die Gestalt

$$O_n(s,\rho) = \left(s\, n^{-1/\alpha}\, l(n),\ \rho - R(n)\log\{n^{-1/\alpha}\, l(n)\} \bmod 2\pi\right)$$

haben. Die Gleichungen (4.3) werden ersetzt durch die Relationen

$$\begin{aligned} l^\alpha(n)\, L\left(n^{-1/\alpha}\, l(n)\right) &= 1, \\ Q\left(n^{-1/\alpha}\, l(n)\right) \exp\left(R(n)\right) &= 1. \end{aligned} \tag{5.4}$$

In allen drei Fällen wird ähnlich wie im Beweis des Satzes 4.1 vorgegangen. Es sei bemerkt, daß die Form der Operatoren $B_n$ bzw. $O_n$ durch den Satz 1.1 bestimmt ist. Dies folgt aus [1].

## § 6. Der allgemeine Anziehungsbereich

Der nicht kommutative Anziehungsbereich, dem ganz besonderes Interesse zukommt, kann nicht einheitlich für alle Fälle bestimmt werden.

Für den Fall 2 benötigen wir zunächst einige Hilfssätze.

**Hilfssatz 6.1.** *Es sei $\Phi$ eine operator-stabile Verteilung, so daß der Absolutbetrag $|\varphi|$ der charakteristischen Funktion nur bezüglich des Einheitsoperators invariant ist. Ist $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_2$ und $t_2 \neq (0,1)$ oder $t_2 \neq (1,0)$, so ist $\varphi(t_1 \cdot s) \neq \varphi(t_2 \cdot s)$, $\forall t_1, t_2$ mit $|t_1| = |t_2| = 1$ und $s \in \mathbb{R}_1$.*

Der *Beweis* erfolgt mit Hilfe der Darstellung (2).

**Hilfssatz 6.2.** *Es sei wieder $|\varphi|$ nur bezüglich des Einheitsoperators invariant und es liege der Fall 2 vor. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\vartheta > 0$, so daß*

$$|(1,a)\, B'^{-1}_{rn}/q_{rn}\sqrt{1+a^2} - \bar{t}\, A_r/s_r| < \varepsilon,$$

*wenn*

$$|(1,a)\, B'^{-1}_{n}/q_{n}\sqrt{1+a^2} - \bar{t}| < \vartheta.$$

*Dabei ist* $q_n = \left|\dfrac{(1,a)\, B'^{-1}_n}{\sqrt{1+a^2}}\right|$ *und* $s_r = |\bar{t} A_r|$ *sowie* $|\bar{t}| = 1$.

*Beweis.* Wir wissen, daß $\forall a \left| f\left((1,a)\dfrac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right|$ im partiellen Anziehungsbereich einer Funktion $|\varphi(t \cdot s)|$ für ein $t$ mit $|t| = 1$ liegt. Außerdem gilt:

$$\left|\, |f^n((1,a)\, s/\sqrt{1+a^2}\, q_n)| - |\varphi((1,a)\, B'^{-1}_n\, s/\sqrt{1+a^2}\, q_n)|\, \right| \to 0$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz der charakteristischen Funktionen. Konvergiert $(1,a)\, B'^{-1}_{n_i}/\sqrt{1+a^2}\, q_{n_i} \to \bar{t}$, so gilt:

$$|f^{n_i}((1,a)\, s/\sqrt{1+a^2}\, q_n)| \to |\varphi(\bar{t}\, s)|.$$

Ebenso erhält man

$$\left| \left| f^{r n_i}\left((1,a)\, s/\sqrt{1+a^2}\, q_{r n_i}\right)\right| - \left|\varphi\left((1,a)\, B'^{-1}_{r n_i}\, s/\sqrt{1+a^2}\, q_{r n_i}\right)\right| \right| \to 0$$

und auch

$$\left| f^{r n_i}\left((1,a)\, s/\sqrt{1+a^2}\, q_{n_i}\right)\right| \to \varphi^r(\bar{t}\, s) = \varphi(\bar{t}\cdot A_r\, s).$$

Da nun $\left|f^{r n_i}\left((1,a)\, s/\sqrt{1+a^2}\, q_{r n_i}\right)\right|$ konvergiert, so folgt aus Hilfssatz 6.1 die Konvergenz von $(1,a)\, B'^{-1}_{r n_i}/\sqrt{1+a^2}\, q_{r n_i}$ nach $\bar{t}\, A_r/s_r$. Damit ist alles gezeigt.

**Hilfssatz 6.3.** *Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $n_0$, so daß für alle $n>n_0$*

$$\left|(1,a)\, B'^{-1}_n/q_n\sqrt{1+a^2} - (1,a)\, B'^{-1}_{n+1}/q_{n+1}\sqrt{1+a^2}\right| < \varepsilon.$$

*Beweis.* Da einerseits

$$\left|\left|f^{n+1}\left((1,a)/q_n\sqrt{1+a^2}\right)\right| - \left|\varphi\left((1,a)\, B'^{-1}_n/q_n\sqrt{1+a^2}\right)\right|\right| \to 0$$

und

$$\left|f^{n+1}\left((1,a)/q_n\sqrt{1+a^2}\right)\right| - \left|f^{n+1}\left((1,a)/q_{n+1}\sqrt{1+a^2}\right)\right| \to 0,$$

andererseits aber

$$\left|\left|f^{n+1}\left((1,a)/q_{n+1}\sqrt{1+a^2}\right)\right| - \left|\varphi\left((1,a)\, B'^{-1}_{n+1}/q_n\sqrt{1+a^2}\right)\right|\right| \to 0,$$

so erhält man aus Hilfssatz 6.1 das gewünschte Resultat.

**Satz 6.4.** *Es seien die Voraussetzungen des Falles 2 erfüllt. Wenn F im Anziehungsbereich der Verteilung $\Phi$ liegt, dann liegen die Randverteilungen*

$$F_a(M) \colon \int\limits_{\{X_1 - a X_2\}/\sqrt{1+a^2} \in M} dF \tag{6.1}$$

*entweder im Anziehungsbereich des Maßes $\Phi_0(M) := \int\limits_{X_2\in M} d\Phi$ oder des Maßes $\Phi_\infty := \int\limits_{X_1\in M} d\Phi$. Dabei ist M Borelsch.*

*Beweis.* O.B.d.A. bestehe die Gruppe, die die Verteilung $\Phi$ invariant läßt, nur aus der Einheit. (Sie kann in diesem Fall höchstens aus 4 Elementen bestehen.) Der Beweis des Satzes erfolgt über die charakteristischen Funktionen. Es muß also bewiesen werden, daß es Zahlen $c_n \in \mathbb{R}_1$ und $l_n \in \mathbb{R}_1$ gibt, so daß

$$\lim_{n\to\infty} f^n\left(\mu/c_n\sqrt{1+a^2},\, a\,\mu/c_n\sqrt{1+a^2}\right)\exp\{i\, l_n\, \mu\} = \varphi_0(\mu) \tag{6.2}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} f^n\left(\mu/c_n\sqrt{1+a^2},\, a\,\mu/c_n\sqrt{1+a^2}\right)\exp\{i\, l_n\, \mu\} = \varphi_\infty(\mu) \tag{6.3}$$

gilt. Es sei für festes $n$ und $a$, $q_n$ so gewählt, daß

$$(1,a)\, B'^{-1}_n/q_n\sqrt{1+a^2} = (t_1, t_2)_n = t^{(n)} \quad \text{und} \quad |t^{(n)}| = 1.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt für $n>n_0(\varepsilon)$:

$$\left|f^n\left((1,a)/q_n\sqrt{1+a^2}\right)\exp\{i\langle t^{(n)}\, b'_n\rangle\} - \varphi(t^{(n)})\right| < \varepsilon.$$

Man kann nun eine Teilfolge $n_i$ so bestimmen, daß $\lim_{i\to\infty} t^{(n_i)} = \bar{t}$ und daher:

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(t^{(n_i)} B'_{n_i} \mu) \exp\{i\langle t^{(n_i)} b_{n_i}\rangle\} = \varphi(\bar{t}\mu), \quad \bar{t}\in\mathbb{R}_2. \tag{6.4}$$

$\varphi(\bar{t}\mu)$ ist wegen der Bauart der Verteilung $\Phi$ (s. [6]) eine unendlich teilbare Verteilung, die im positiven bzw. negativen Anziehungsbereich der Maße $\Phi_0$ bzw. $\Phi_\infty$ liegen. Nach einem Satz über unendlich teilbare Verteilungen (s. [3], S. 190, Bem. 4) gibt es Teilfolgen $n_l$ und $n_{l'}$, so daß

$$\lim_{l\to\infty} f^{n_l}(t^{(n_l)} B'_{n_l} \mu) \exp(i\langle t^{(n_l)} b'_{n_l}\rangle) = \varphi_0(\mu) \tag{6.5}$$

bzw.

$$\lim_{l'\to\infty} f^{n_{l'}}(t^{(n_{l'})} B'_{n_{l'}} \mu) \exp(i\langle t^{(n_{l'})} b'_{n_{l'}}\rangle) = \varphi_\infty(\mu) \tag{6.6}$$

gilt, es sei denn (6.2) bzw. (6.3) sind bereits erfüllt.

Mit anderen Worten heißt dies, daß $F_a$ sowohl im partiellen Anziehungsbereich von $\Phi_0$ als auch von $\Phi_\infty$ liegt, es sei denn, $F_a$ liege bereits im Anziehungsbereich einer dieser beiden stabilen Randverteilungen. Es werde nun angenommen, daß (6.4) erfüllt ist und $\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2 \neq 0$, so daß für ein $\mathscr{y} > 0$ sowohl

$$|\bar{t} - (1,0)| > \mathscr{y} \quad \text{als auch} \quad |\bar{t} - (0,1)| > \mathscr{y}. \tag{6.7}$$

Wir bestimmen $n_0$ so, daß (6.7) und (6.8) für alle $n_i > n_0$ erfüllt sind. Außerdem sei zu einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein $R$ gewählt, so daß

$$|\bar{t} A_R / s_R - (1,0)| < \varepsilon/2. \tag{6.8}$$

Dann gibt es ein $n_l > n_0$ mit

$$\left|(1,a) B'^{-1}_{n_l} / q_{n_l} \sqrt{1+a^2} - (1,0)\right| < \varepsilon. \tag{6.9}$$

Aus Hilfssatz 6.3 ergibt sich die Existenz eines $n_k > n_l$, so daß

$$\left|(1,a) B'^{-1}_{n_k} / q_{n_k} \sqrt{1+a^2} - \bar{t}\right| < \varepsilon/2$$

und $\forall n$ mit $n_l \leqq n \leqq n_k$

$$\left|(1,a) B'^{-1}_{n} / q_{n} \sqrt{1+a^2} - (0,1)\right| > \mathscr{y}. \tag{6.10}$$

Nach Hilfssatz 6.2 erhält man für genügend hohes $n_0$:

$$\left|(1,a) B'^{-1}_{R n_k} / q_{R n_k} \sqrt{1+a^2} - (1,0)\right| < \varepsilon/2.$$

Für $R n_k$ ist aber die Voraussetzung (6.11) erfüllt und somit gilt (6.10) $\forall n > n_l$. Dies ist aber ein Widerspruch zu (6.6).

**Satz 6.5.** *Unter den Voraussetzungen des Falles 2 gibt es mindestens eine Randverteilung, die im Anziehungsbereich von $\Phi_0$, und mindestens eine Randverteilung, die im Anziehungsbereich von $\Phi_\infty$ liegt.*

*Beweis.* Die Aussage über $\Phi_\infty$ entnimmt man direkt aus dem Beweis des Satzes 6.4. Die Aussage über $\Phi_0$ erhält man in folgender Weise. Da $|f^n(t B'_n)|$ gleichmäßig in jeder kompakten Menge gegen $|\varphi(t)|$ konvergiert, sind die Mengen

$$M_\varepsilon^{(n)} = \{t \colon |t B'^{-1}_n / q_n - (0,1)| < \varepsilon, |t| = 1\}$$

nicht leer und abgeschlossene Mengen des Einheitskreises. Aus der Kompaktheit folgt dann, daß

$$M=\bigcap \overline{\bigcup_{n=n_0}^{\infty} M_\varepsilon^{(n)}}$$

nicht leer ist. Nun ist nurmehr zu zeigen, daß jeder Punkt $t\in M$ die Ungleichung

$$|t B_n'^{-1}/q_n-(0,1)|<\varepsilon$$

für alle $n>n_0(\varepsilon)$ befriedigt. Angenommen, dies wäre falsch, dann gälte

$$|t B_n'^{-1}/q_n-(1,0)|<\varepsilon$$

wegen Satz 6.4 für alle $n>n_0$. Aus Satz 6.3 folgte nun, daß dies auch für eine ganze Umgebung von $t$ gälte. Dies stünde aber im Widerspruch zur Konstruktion von $M$.

**Satz 6.6.** *Es seien die Voraussetzungen des Falles 2 erfüllt. Dann gibt es einen Operator $A$ und Operatoren $B_n^*$, die Diagonalform besitzen, so daß*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(t B_n^{*\prime} A') \exp\langle i\, t, b_n'\rangle=\varphi(t).$$

*Beweis.* Es sei $\bar t$ ein Vektor mit

$$\bar t B_n'^{-1}/\bar q_n\to(1,0)$$

und $t^*$ ein Vektor mit

$$t^* B_n'^{-1}/q_n^*\to(0,1).$$

Man definiere $M'$ durch die Matrix

$$A'=\begin{Bmatrix}\bar t_1, \bar t_2\\ t_1^*, t_2^*\end{Bmatrix}$$

und $B_n^{*\prime}$ durch

$$B_n^{*\prime}=\begin{Bmatrix}1/|\bar t B_n'^{-1}| & 0\\ 0 & 1/|t^* B_n^{*\prime -1}|\end{Bmatrix}.$$

Es gilt dann:

$$B_n'=B_n^{*\prime} A' I_n,$$

denn

$$(a_1\bar t+a_2 t^*) B_n'^{-1} B_n^{*\prime} A'\to a_1\bar t+a_2 t^*.$$

Nach Hilfssatz 1.4 ist damit der Satz 6.6 bewiesen.

**Korollar.** *Jede Verteilung $F$, die im Anziehungsbereich der Verteilung $\Phi$ liegt (unter den Bedingungen des Falles 2) kann durch eine lineare Transformation in deren kommutativen Anziehungsbereich gebracht werden.*

*Fall 3.*

**Satz 6.7.** *Es seien die Voraussetzungen des Falles 3 erfüllt. Dann gibt es einen Operator $A$ und Operatoren $B_n^*$, die Dreiecksform besitzen, so daß*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(t B_n^{*\prime} A') \exp\{i\langle t\, b_n'\rangle\}=\varphi(t).$$

*(Man bemerke, daß die $B_n^*$ nicht kommutativ sein müssen.)*

Der *Beweis* erfolgt ähnlich dem des Satzes 6.6.

**Satz 6.8.** *Eine Verteilung F liegt genau dann im Anziehungsbereich einer Verteilung $\Phi$ (Fall 3), wenn ihre charakteristische Funktion bis auf eine lineare Transformation die Gestalt*

$$\exp\{-c|t_1|^\alpha L_1(|t_1|)\, h(t_1 L_2(|t_2|)) \exp(t_2/t_1 N(|t_1|))\, M(t_1, t_2) + i\langle t\, d'\rangle\}$$

*hat. Dabei sind $L_1, L_2, N$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ langsam wachsend, $M$: $\mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ hat die Eigenschaft $\lim_{|t|\to 0} M(t_1, t_2) = 1$ und die Funktionen c und h sind aus (2) entnommen.*

*Beweis.* Die Dreiecksmatrix $B_n^*$ hat wegen Satz 1.1 die Gestalt

$$B_n^* = \begin{Bmatrix} n^{-1/\alpha} l_1(n) & 0 \\ n^{-1/\alpha} l_2(n) \log n^{1/\alpha} Q(n) & n^{-1/\alpha} l_2(n) \end{Bmatrix},$$

wobei die Funktionen $l_1, l_2, x^Q$: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ langsam wachsen. Die Funktionen $L_1$ und $N$ ergeben sich dann aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} l_1^\alpha(n)\, L_1(n^{-1/\alpha} l_1(n)) &= 1 \\ l_1(n)\, N(n^{-1/\alpha} l_1(n))/l_2(n) &= 1 \\ L_2(n^{-1/\alpha} l_1(n)) \exp\{Q(n)\}/L_1(n^{-1/\alpha} l_1(n)) &= 1 \end{aligned} \tag{6.11}$$

ähnlich wie im Satz 4.1 in [1].

*Fall 4.*

*Definition.* Eine Familie $\mathscr{F}$ von $W$-Maßen im $\mathbb{R}_1$ heißt stabil, falls es zu jedem $\Phi \in \mathscr{F}$ und $n > 0$ Konstanten $a_n, b_n$ und ein $\psi \in \mathscr{F}$ gibt, so daß

$$\Phi^{n*}(\{M - a_n\}/b_n) = \psi(M)$$

für alle meßbaren Mengen $M \subset \mathbb{R}_1$ gilt.

*Definition.* Eine stabile Familie ist von einem unendlich teilbaren Maß erzeugt, falls jedes $\psi \in \mathscr{F}$ als $\Phi^{r*}(.\, b_n - a_n)$ dargestellt werden kann. Sie heißt periodisch, falls es genügt $r \in (0, \rho]$ zu wählen.

Es ist klar, daß die Randverteilungen der operator-stabilen Maße des 4. Falles eine periodische stabile Familie bilden.

*Definition.* Eine Verteilung $F$ liegt im Anziehungsbereich der periodischen Familie $\mathscr{F}$, falls es Konstanten $a_n, b_n$ gibt, so daß zu jeder Teilfolge der Folge

$$F^{n*}(\{.\, - a_n\}/b_n) \tag{6.12}$$

eine Teilfolge existiert, die schwach gegen ein Element aus $\mathscr{F}$ konvergiert.

**Satz 6.9.** *Eine Verteilung F liegt genau dann im Anziehungsbereich einer periodischen stabilen Familie $\mathscr{F}$, die von $\Phi$ erzeugt wird, falls ihre charakteristische Funktion $f(t)$ die Gestalt*

$$f(t) = \varphi^{R(|t|)M(t)}(t \cdot L(|t|)) \exp\{i\, t\, a\} \tag{6.13}$$

*in einer Umgebung der Null hat. Dabei sind die Funktionen* $L\colon \mathbb{R}_1^+ \to \mathbb{R}_1^+$ *und* $R\colon \mathbb{R}_1^+ \to \mathbb{R}_1^+$ *langsam wachsend,* $a \in \mathbb{R}_1$, *und* $M\colon \mathbb{R}_1 \to \mathbb{C}$ *eine Funktion mit der Eigenschaft* $\lim_{|t|\to 0} M(t) = 1$.

*Beweis.* Die charakteristischen Funktionen $\varphi_r(t)$ einer periodischen stabilen Familie haben die Gestalt:

$$\varphi_r(t) = \varphi_0^r(t\,b(r)) \exp\{i\,t\,a(r)\}, \quad 0 \leqq r \leqq \rho, \qquad \varphi_0(t) = \varphi_\rho(t).$$

O.B.d.A. kann $r^{-1/\alpha}$ für $b(r)$ gewählt werden (s. [6]). Ist $F$ im Anziehungsbereich, so kann, ähnlich dem stabilen Fall, $b_n = n^{-1/\alpha}\, l(n)$ in Formel (6.12) gewählt werden. Dabei ist $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_1^+$ eine langsam wachsende Funktion.

Es sei nun $f$ in Form (6.13) gegeben. Dann bestimme man wie im Beweis des Satzes 4.1 ein $l(n)$ als kleinste Lösung der Gleichung

$$R(n^{-1/\alpha}\, l(n))\, L^\alpha(n^{-1/\alpha}\, l(n))\, l^\alpha(n) = 1. \tag{6.14}$$

Damit ist ein $b_n$ bestimmt, das die gewünschte Eigenschaft besitzt. Wenn nun $F$ im Anziehungsbereich von $\mathscr{F}$ liegt, so kann $f$ immer in der Gestalt (6.13) geschrieben werden; jedoch müssen noch die Eigenschaften der Funktionen $L, R, M$ nachgeprüft werden. Zunächst definiere man eine Funktion $s\colon N \to \mathbb{R}^+$ durch $|s(n) - s(n+1)| < \rho/2$ für $n > n_0$ und

$$\sup_{|t|<1} |f^n(t\,b_n) \exp\{i\,t\,a_n\} - \varphi_{s(n)}(t)| = \min_{r>0} \sup_{|t|<1} |f^n(t\,b_n) \exp\{i\,t\,a_n\} - \varphi_r(t)|.$$

Dann bestimme man ähnlich wie im Satz 4.1 eine stetige positive langsam wachsende Funktion $L\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ aus der Gleichung

$$b_n\, L(b_n) = s^{1/\alpha}(n).$$

Die Funktion $R$ erhält man auf gleiche Weise aus der Gleichung (6.14). Damit wäre für jede Klasse des Anziehungsbereiches eine charakteristische Funktion gefunden, so daß man alle durch die Form (6.13) erhält.

Nun zurück zu Fall 4.

**Satz 6.10.** *Es seien die Voraussetzungen des Falles* 4 *erfüllt. Die charakteristische Funktion eines Maßes, das im Anziehungsbereich von* $\Phi$ *liegt, hat die Gestalt*

$$\exp\{-c\,[|t_1|^2 L_1^2(|t_1|) + |t_2|^2 L_2^2(|t_2|)]^{\alpha/2}\, h([|t_1|^2 L_1^2(|t_1|) + |t_2|^2 L_2^2(|t_2|)]^{\alpha/2}$$
$$\cdot \exp\{\operatorname{arctg}(t_2\, L(|t_2|))/t_1\, L_1(|t_1|)\}) \cdot M(t_1, t_2) + i\langle t\, d'\rangle\}.$$

*Dabei sind die Funktionen* $L_1\colon \mathbb{R}_1^+ \to \mathbb{R}_1$ *und* $L_2\colon \mathbb{R}_1^+ \to \mathbb{R}_1$ *langsam wachsend,* $M\colon \mathbb{R}_2 \to \mathbb{C}$ *hat die Eigenschaft* $\lim_{|t|\to 0} M(t_1, t_2) = 1$, *h ist der Darstellung des stabilen Maßes* $\Phi$ *entnommen und* $c \in \mathbb{R}_1$.

Der *Beweis* ergibt sich aus dem Satz 6.9. Er ist jedoch mit großem analytischen Aufwand verbunden und soll hier weggelassen werden.

Im Fall 1 ist es mir leider nicht gelungen, für den nicht kommutativen Fall eine einheitliche Darstellung der charakteristischen Funktion zu finden.

## Literatur

1. Arnold, L., Michaliček, J.: Complex-Valued Stable Measures and Their Domains of Attraction. Trans. Amer. Math. Soc. **135**, 143–158 (1969).
2. Billingsley, P.: Convergence of Types in $k$-Spaces. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **5**, 175–179 (1966).
3. Gnedenko, B.W., Kolmogoroff, A.N.: Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Cambridge: Addison Wesley (1968).
4. Karamata, J.: Sur un mode de croissance régulière des fonctions. Mathematica **4**, 38–53 (1930).
5. Lucacs, E.: Characteristic Functions. London: Charles Griffin 1960.
6. Michaliček, J.: Die Randverteilung der operator-stabilen Maße im 2-dimensionalen Raum. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **21**, 135–146 (1972).
7. Rvaceva, E.L.: On Domains of Attraction of Multidimensional Distributions. Select. Trans. Math. Statist. Probab. **2**, 183–205 (1962).
8. Sharpe, M.: Operator-Stable Probability Distributions on Vector Spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **136**, 51–65 (1969).

Dr. Johannes Michaliček
Institut für Mathematische Stochastik der Universität
D-2000 Hamburg 13
Rothenbaumchaussee 45
Bundesrepublik Deutschland

*(Eingegangen am 4. Dezember 1970/in revidierter Form am 17. Mai 1972)*