Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 29, 73–85 (1974)

Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de résolvantes

Francis Hirsch

Le but de ce travail est de donner, notamment en adaptant les méthodes de Taylor [6], des résultats complétant ceux de Bronner [1 et 2] concernant la caractérisation des noyaux V vérifiant le principe complet du maximum et pour lesquels, α étant donné, il existe un noyau U tel que

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}(UM_{\alpha})^{n}U$$

(où M_{α} désigne l'opérateur de multiplication par α).

De telles séries interviennent dans l'étude des chaines de Harris faite par Neveu [5]. Nous étudions ensuite ces noyaux dans un cadre topologique et enfin en ajoutant des hypothèses d'invariance. Les définitions ne figurant pas dans cet article sont les définitions classiques telles qu'elles sont énoncées dans [4].

I. Nous nous plaçons, tout d'abord dans un cadre mesurable abstrait: $(E,\mathscr{E})$ désigne un espace mesurable, $\mathscr{E}^{+}$ l'ensemble des fonctions mesurables positives et V un noyau propre sur $(E,\mathscr{E})$ vérifiant le principe complet du maximum. On note α un élément de $\mathscr{E}^{+}$. Une fonction f de $\mathscr{E}^{+}$ est dite surmédiane si

$$\forall g \text{ mesurable } \big(V|g| \text{ finie et } Vg\leqq f \text{ sur } \{g>0\}\Rightarrow (Vg\leqq f)\big).$$

Si A appartient à $\mathscr{E}$ et g surmédiane, on note

$$H_{A}g$$

la borne inférieure des fonctions surmédianes majorant g sur A (cette borne inférieure est d'ailleurs atteinte (c.f. [2])).

Si f appartient à $\mathscr{E}^{+}$, on note $P_{\alpha}(f)$ la propriété:

Il existe une suite croissante $(A_{n})_{n\geqq 0}$ d'ensembles mesurables telle que

$$\bigcup_{n}A_{n}=\{Vf>0\},\quad \forall n\;\; V(\alpha 1_{A_{n}}) \text{ fini et } \inf_{n} H_{\complement A_{n}}Vf=0.$$

On note, de même, $Q_{\alpha}(f)$ la propriété:

Il existe une suite croissante $(A_{n})_{n\geqq 0}$ d'ensembles mesurables tel que

$$\bigcup_{n}A_{n}=E,\quad \forall n\;\; V(\alpha 1_{A_{n}}Vf) \text{ fini et } \inf_{n} H_{\complement A_{n}}Vf=0.$$

Théorème 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *Il existe un noyau U tel que*

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}(UM_\alpha)^n U.$$

(2) *Il existe une famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ de noyaux tels que*

$$\forall\lambda\leqq\mu,\qquad V_\lambda=V_\mu+(\mu-\lambda)\,V_\mu M_\alpha V_\lambda=V_\mu+(\mu-\lambda)\,V_\lambda M_\alpha V_\mu$$

et

$$\forall f\in\mathscr{E}^+\qquad Vf=\sup_{\lambda>0}V_\lambda f.$$

(3) $\forall f\in\mathscr{E}^+$ *(Vf bornée)* $\Rightarrow P_\alpha(f)$.

(4) $\forall f\in\mathscr{E}^+$ *(Vf finie)* $\Rightarrow P_\alpha(f)$.

(5) $\exists f\in\mathscr{E}^+$, *$f$ strictement positive avec Vf bornée et $P_\alpha(f)$.*

(6) $\exists f\in\mathscr{E}^+$, *$f$ strictement positive avec Vf finie et $P_\alpha(f)$.*

(7) $\forall f\in\mathscr{E}^+$ *(Vf bornée)* $\Rightarrow Q_\alpha(f)$.

(8) $\exists f\in\mathscr{E}^+$, *$f$ strictement positive avec Vf bornée et $Q_\alpha(f)$.*

(9) $\exists f\in\mathscr{E}^+$, *$f$ strictement positive avec Vf finie et $Q_\alpha(f)$.*[1]

Nous allons montrer la chaîne d'implication:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(1) \arrow[r, Rightarrow] & (4) \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (6) \arrow[r, Rightarrow] & (5) \arrow[r, Rightarrow] & (8) \arrow[r, Rightarrow] & (1), \\
& & & (7) \arrow[r, Rightarrow] & (9) \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

puis $(1)\Leftrightarrow(2)$.

$(1)\Rightarrow(4)$. Si (1) est vérifié, U est nécessairement le noyau U_α introduit par Bronner dans [2]. Nous conservons les mêmes notations ici.
Pour tout n entier, il existe donc un noyau $U_{\alpha/n}$ tel que

$$U_{\alpha/n}=\sum_p\left(1-\frac{1}{n}\right)^p(U_\alpha M_\alpha)^p U_\alpha$$

et

$$V=U_{\alpha/n}+\frac{1}{n}\,VM_\alpha U_{\alpha/n}.$$

D'après la première égalité

$$V=\sup_n U_{\alpha/n}=\lim_{n\uparrow+\infty}\uparrow U_{\alpha/n}.$$

Soit f de $\mathscr{E}^+$ telle que Vf soit finie et posons

$$A_n=\left\{U_{\alpha/n}f\geqq\frac{1}{n}\right\}.$$

(A_n) est alors une suite croissante de $\mathscr{E}$ telle que

$$\bigcup_n A_n=\{Vf>0\}\quad\text{et}\quad 1_{A_n}\leqq n\,U_{\alpha/n}f.$$

Il en résulte que $V(\alpha\,1_{A_n})\leqq n^2\,Vf$ finie.

[1] On peut remarquer qu'une conséquence de ce théorème est que l'ensemble des fonctions α pour lesquelles (1) est vérifié est un cône convexe de $\mathscr{E}^+$.

$$Vf \leqq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} VM_\alpha U_{\alpha/n} f.$$

La fonction intervenant à droite étant surmédiane (puisque V vérifie le principe complet du maximum)

$$H_{\complement A_n} Vf \leqq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} VM_\alpha U_{\alpha/n} f \leqq \frac{1}{n} + (Vf - U_{\alpha/n} f)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} H_{\complement A_n} Vf = 0.$$

(4) $\Rightarrow$ (3) est évident.

(3) $\Rightarrow$ (6). En effet, V étant propre, il existe une fonction a strictement positive telle que Va soit bornée. Donc $P_\alpha(a)$ est vérifié et puisque, en particulier, Va est finie, (6) est vérifié.

(6) $\Rightarrow$ (5). Soit f telle que (6) en affirme l'existence. Alors $f \wedge a$ est strictement positive et $V(f \wedge a)$ est bornée. Soit A_n la suite intervenant dans la propriété $P_\alpha(f)$. Posons $B_n = A_n \cap \{V(f \wedge a) > 0\}$. Puisque $\{V(f \wedge a) > 0\}$ est inclus dans $\{Vf > 0\}$, on a

$$\bigcup_n B_n = \{V(f \wedge a) > 0\}$$

et, évidemment $V(\alpha 1_{B_n})$ finie.

$$\complement B_n = \complement A_n \cup \{V(f \wedge a) = 0\}$$

et donc

$$H_{\complement B_n} V(f \wedge a) = H_{\complement A_n} V(f \wedge a) \leqq H_{\complement A_n} Vf$$

converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

On a donc $P_\alpha(f \wedge a)$.

(5) $\Rightarrow$ (8). Soit f dont l'existence est affirmée par (5) et soit A_n la suite intervenant dans $P_\alpha(f)$. Posons

$$B_n = A_n \cup \{Vf = 0\}.$$

Alors

$$\bigcup_n B_n = E.$$

$$1_{B_n} Vf = 1_{A_n} Vf$$

et donc

$$V(\alpha 1_{B_n} Vf) \leqq \sup_{x \in E} |Vf(x)| \, V(\alpha 1_{A_n}) \quad \text{finie.}$$

Enfin

$$H_{\complement B_n} Vf = H_{\complement A_n} Vf$$

ce qui prouve $Q_\alpha(f)$.

(3) $\Rightarrow$ (7). Se démontre exactement de la même façon.

(7) $\Rightarrow$ (9). Il suffit de considérer la fonction a.

(9) $\Rightarrow$ (8). Si f est la fonction intervenant dans (9), il est immédiat que l'on a $Q_\alpha(f \wedge a)$.

(8) $\Rightarrow$ (1). Nous allons utiliser le lemme suivant:

Lemme. (1) *équivaut à*

(10) *Il existe une famille* $(V_\lambda)_{0<\lambda\leqq 1}$ *de noyaux tel que l'application* $\lambda \to V_\lambda$ *est décroissante*

$$\forall 0<\lambda\leqq 1 \qquad V_\lambda = V_1 + (1-\lambda)\, V_1 M_\alpha V_\lambda$$

et

$$\sup_{\lambda>0} V_\lambda = V.$$

En effet si (1) est vérifié, posant

$$V_\lambda = \sum_n (1-\lambda)^n (U M_\alpha)^n U$$

pour $0<\lambda\leqq 1$, il est clair que (10) est vérifié.

Supposons (10). Alors

$$\forall N, \forall f\in\mathscr{E}^+, \qquad V_\lambda f = \sum_{n=0}^{N} (1-\lambda)^n (V_1 M_\alpha)^n V_1 f + (1-\lambda)^{N+1} (V_1 M_\alpha)^{N+1} V_\lambda f.$$

Or

$$Vf = V_1 f + V_1 M_\alpha Vf.$$

Donc

$$(V_1 M_\alpha)^{N+1} V_\lambda f \leqq (V_1 M_\alpha)^{N+1} Vf \leqq Vf.$$

Il en résulte que si Vf est finie

$$\forall 0<\lambda\leqq 1, \qquad V_\lambda f = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda)^n (V_1 M_\alpha)^n V_1 f$$

et donc

$$Vf = \sum_{n=0}^{\infty} (V_1 M_\alpha)^n V_1 f.$$

Il en résulte que (1) est vérifié.

Ceci étant, supposons (8). Il suffit de démontrer que (10) est réalisé. La démonstration qui suit est une adaptation de celle de Taylor [6].

Soit f la fonction dont l'existence est affirmée par (8) et soit $(A_n)_{n\geqq 0}$ la suite correspondante. Utilisant les notations de [2], on pose

$$V_\lambda = U_{\lambda\alpha} \quad \text{pour } 0<\lambda\leqq 1.$$

D'après [2],

$$V_\lambda \geqq V_1 + (1-\lambda)\, V_1 M_\alpha V_\lambda,$$

$$V \geqq \sup_\lambda V_\lambda$$

et $\lambda \to V_\lambda$ est décroissante.

Tout revient donc à démontrer

(11) $$V_\lambda f \leqq V_1 f + (1-\lambda)\, V_1 M_\alpha V_\lambda f$$

et

(12) $$Vf \leqq \sup_{\lambda>0} V_\lambda f.$$

Soit $(K'_n)_{n\geqq 0}$ une suite croissante de $\mathscr{E}$ avec $V 1_{K'_n}$ bornée et $\bigcup_n K'_n = E$.

Soit K_n l'ensemble $K'_n \cap \{\alpha \leqq n\}$. Alors $(K_n)_{n\geqq 0}$ est une suite croissante telle que

$$\bigcup_n K_n = E$$

et il existe une suite $(b_n)_{n\geqq 0}$ à termes strictement positifs telle que $a=\sum_n b_n 1_{K_n}$ et Va soient bornées.

On pose

$$\alpha_\kappa=\alpha\wedge\kappa a.$$

Alors V_{α_κ} est bornée. On pose $V_\lambda^\kappa=U_{\lambda\alpha_\kappa}$ et l'on a

$$V_\lambda^\kappa=V_1^\kappa+(1-\lambda)\,V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa} V_\lambda^\kappa.$$

Fixons x_o dans E et $\varepsilon>o$.

$V_\lambda^\kappa f\leqq Vf$ et $V_1^\kappa f\leqq Vf$. On obtient donc, en faisant tendre κ vers l'infini:

$$V_\lambda f=V_1 f+(1-\lambda)\lim_{\kappa\to\infty} V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa} V_\lambda^\kappa f. \tag{13}$$

$\exists n$ tel que

$$H_{\complement A_n} Vf(x_o)\leqq\varepsilon.$$

Donc

$$\forall\kappa\quad V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa}(1_{\complement A_n} V_\lambda^\kappa f)(x_o)\leqq V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa}(H_{\complement A_n} Vf)(x_o)\leqq\varepsilon$$

(d'après la caractérisation des fonctions surmédianes de [2]).

$$V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa}(1_{A_n\cap\complement K_p} V_\lambda^\kappa f)(x_o)\leqq V(\alpha 1_{A_n\cap\complement K_p} Vf)(x_o)\leqq\int(1_{\complement K_p}\alpha 1_{A_n} Vf)(y)\,V(x_o,dy).$$

Donc

$$\exists p\forall\kappa\quad V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa}(1_{A_n\cap\complement K_p} V_\lambda^\kappa f)(x_o)\leqq\varepsilon.$$

Enfin

$$\begin{aligned} V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa}(1_{K_p} V_\lambda^\kappa f)(x_o) &\leqq V_1^\kappa M_\alpha(1_{K_p} V_\lambda^\kappa f)(x_o)\\ &\leqq V_1^{\kappa_1} M_\alpha(1_{K_p} V_\lambda^{\kappa_2} f)(x_o)\qquad \text{si } \kappa\geqq\kappa_1\vee\kappa_2. \end{aligned}$$

Finalement, il existe p tel que pour tous κ_1 et κ_2:

$$\lim_{\kappa\to\infty} V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa} V_\lambda^\kappa f(x_o)\leqq 2\varepsilon+V_1^{\kappa_1} M_\alpha(1_{K_p} V_\lambda^{\kappa_2} f)(x_o).$$

$$V_\lambda^{\kappa_2} f\leqq Vf \quad\text{et}\quad V_1^{\kappa_1} M_\alpha(1_{K_p} Vf)\leqq p\big(\sup_x Vf(x)\big)\,V 1_{K_p}\quad \text{fini}.$$

Donc

$$\lim_{\kappa_2\to\infty} V_1^{\kappa_1} M_\alpha(1_{K_p} V_\lambda^{\kappa_2} f)(x_o)=V_1^{\kappa_1} M_\alpha(1_{K_p} V_\lambda f)(x_o).$$

On a, par conséquent

$$\lim_{\kappa_1\to\infty}\lim_{\kappa_2\to\infty} V_1^{\kappa_1} M_\alpha(1_{K_p} V_\lambda^{\kappa_2} f)(x_o)=V_1 M_\alpha(1_{K_p} V_\lambda f)(x_o)\leqq V_1 M_\alpha V_\lambda f(x_o)$$

ce qui implique

$$\lim_{\kappa\to\infty} V_1^\kappa M_{\alpha_\kappa} V_\lambda^\kappa f(x_o)\leqq 2\varepsilon+V_1 M_\alpha V_\lambda f(x_o).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>o$ et tout x_o, on obtient (11) (compte-tenu de (13)).

D'après le lemme,

$$\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda^\kappa f(x_o)=Vf(x_o)$$

et, d'autre part,

$$\lim_{\kappa\to\infty} V_\lambda^\kappa f(x_o)=V_\lambda f(x_o).$$

Donc, pour obtenir (12), il suffit de montrer que la première limite est uniforme en κ.

$$Vf(x_o)-V_\lambda^\kappa f(x_o)=\lambda V_\lambda^\kappa M_{\alpha_\kappa} Vf(x_o).$$

Le même raisonnement que précédemment montre que

$$\forall \varepsilon \exists p \quad V_\lambda^\kappa M_{\alpha_\kappa} Vf(x_o) \leqq \frac{\varepsilon}{\lambda} + \varepsilon + V_\lambda^\kappa M_\alpha (1_{K_p} Vf)(x_o)$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{\lambda} + \varepsilon + p(\sup_x Vf(x))\, V 1_{K_p}$$

soit

$$\sup_\kappa (Vf(x_o) - V_\lambda^\kappa f(x_o)) \leqq (1+\lambda)\,\varepsilon + \lambda\, C_p$$

où C_p est une constante dépendant de p, ce qui démontre le résultat.

(2) $\Rightarrow$ (1). En effet, (2) implique trivialement (10) et il suffit donc d'appliquer le lemme.

(1) $\Rightarrow$ (2). Si (1) est vrai, (1) étant équivalent à (3) et, pour tout $\lambda > 0$, $P_\alpha(f)$ étant identique à $P_{\lambda\alpha}(f)$, il existe, pour tout $\lambda > 0$ un noyau V_λ tel que

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (V_\lambda M_\alpha)^n V_\lambda .$$

D'après les résultats de [2] et le lemme, $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ vérifie (2).

Remarques. 1. Si V est un noyau strictement positif et $\alpha = 1$, (5) et (6) sont exactement deux des conditions suffisantes équivalentes introduites par Taylor [6] pour que (2) soit vérifié.[2]

2. (9) est trivialement impliqué par la condition: $\exists f \in \mathscr{E}^+$, f strictement positive avec Vf finie et $V\alpha Vf$ finie.

De même, (8) est trivialement impliqué par la condition: $\exists f \in \mathscr{E}^+$, f strictement positive, $\exists a \in \mathscr{E}^+$ avec Vf et Va bornées et

$$\lim_{m \to \infty} H_{\{\alpha Vf > ma\}} Vf = 0 .$$

Ces deux conditions suffisantes sont énoncées dans [2].

3. Naturellement, les conditions équivalentes du théorème ne sont pas automatiquement vérifiées comme le montre un exemple de Bronner [2].

4. D'après les résultats de [2] et le lemme, U et $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ du théorème sont uniquement déterminés par V, et UM_α de même que les $\lambda V_\lambda M_\alpha$ sont sous-markoviens.

II. Nous nous plaçons maintenant dans un cadre topologique: E désigne un espace localement compact dénombrable à l'infini, $\mathscr{E}$ la tribu des ensembles universellement mesurables, $\mathfrak{K}$ l'ensemble des fonctions réelles continues à support compact, $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions réelles continues, $\mathscr{C}_o$ l'ensemble des fonctions

---

[2] Après rédaction de cet article, J. C. Taylor m'a indiqué une raison simple permettant de montrer qu'en fait, on peut toujours remplacer dans (3), (4), (5) et (6) du théorème 1, la condition $P_\alpha(f)$ par la condition $P'_\alpha(f)$: Il existe une suite croissante $(A_n)_{n \geqq 0}$ d'ensembles mesurables telle que

$$\bigcup_n A_n = E, \qquad \forall n\; V(\alpha 1_{A_n}) \text{ fini et } \inf_n H_{\complement A_n} Vf = 0.$$

D'autre part il m'a signalé avoir lui aussi démontré (dans un article à paraître) la réciproque de son théorème de [6] en utilisant une méthode probabiliste faisant appel aux processus de Ray.

réelles continues tendant vers 0 à l'infini. On suppose que V est un noyau-diffusion continu, vérifiant le principe complet du maximum et que α est un élément de $\mathscr{C}_+$.

Théorème 2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *Il existe un noyau diffusion continu U tel que*

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}(UM_\alpha)^n U.$$

(2) *Il existe une famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ de noyaux-diffusion continus tel que*

$$\forall \lambda<\mu, \qquad V_\lambda=V_\mu+(\mu-\lambda)\,V_\mu M_\alpha V_\lambda=V_\mu+(\mu-\lambda)\,V_\lambda M_\alpha V_\mu$$

et

$$\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda=V.$$

(3) *Pour tout f de $\mathfrak{K}_+$ il existe une suite $(A_n)_{n\geqq 0}$ croissante de fermés et il existe une suite $(g_n)_{n\geqq 0}$ de fonctions positives semi-continues inférieurement tel que*

$$\bigcup_n A_n=\{Vf>0\}, \quad \forall n\ 1_{A_n}\leqq g_n \quad et \quad V(\alpha g_n)\in\mathscr{C}_+,$$

$\lim_{n\to\infty} H_{\complement A_n} Vf=0$ *uniformément sur tout compact.*

Remarquons d'abord que tout noyau sur $(E,\mathscr{E})$ majoré par un noyau-diffusion est un noyau-diffusion. Tous les noyaux intervenant dans la démonstration du théorème 1 étant majorés par V seront donc automatiquement des noyaux-diffusion.

(1) ⇒ (3). Notons $\mathscr{I}_+$ l'ensemble des fonctions s.c.i. positives. U étant un noyau-diffusion continu,

$$U:\ \mathscr{I}_+\to\mathscr{I}_+,$$
$$UM_\alpha:\ \mathscr{I}_+\to\mathscr{I}_+.$$

Donc

$$U_{\alpha/n}=\sum_p\left(1-\frac{1}{n}\right)^p (UM_\alpha)^p U:\ \mathscr{I}_+\to\mathscr{I}_+.$$

Puisque

$$V=U_{\alpha/n}+\frac{1}{n}\,VM_\alpha U_{\alpha/n},$$

V étant un noyau-diffusion continu, $U_{\alpha/n}$ est un noyau-diffusion continu et $VM_\alpha U_{\alpha/n}$ aussi.

Soit alors f élément de $\mathfrak{K}_+$ et posons

$$A_n=\left\{U_{\alpha/n}f\geqq\frac{1}{n}\right\} \qquad g_n=n\,U_{\alpha/n}f,$$
$$V(\alpha g_n)=n\,VM_\alpha U_{\alpha/n}f\in\mathscr{C}_+.$$

Il est clair alors que (A_n) et (g_n) vérifient les conditions de (3)

$$\Big(H_{\complement A_n} Vf\leqq\frac{1}{n}+(V-U_{\alpha/n})\,f$$

et, d'après le lemme de Dini,

$$\lim_{n\to\infty}(V-U_{\alpha/n})f=0$$

uniformément sur tout compact).

(3) ⇒ (1). Il est immédiat, d'après la démonstration du théorème 1, qu'il existe un noyau-diffusion U vérifiant (1). Il reste à montrer que $U(\mathfrak{K})$ est inclus dans $\mathscr{C}$. Conservons les notations de [2].

Lemme. *Si β est un élément de $\mathscr{C}_+$ tel que $V\beta$ soit continue bornée, on a, notant $\mathscr{C}_b$ l'ensemble des fonctions continues bornées*

$$U_\beta(\mathfrak{K})\subset\mathscr{C}_b.$$

On raisonne en adaptant une démonstration de [2]: Supposons d'abord que $\sup_x V\beta(x)$ soit strictement inférieur à 1. Alors

$$\forall f\in\mathfrak{K},\qquad U_\beta f=\Big(\sum_n(-1)^n(VM_\beta)^n\Big)\,Vf\in\mathscr{C}_b$$

(en effet si $h\leqq g$, h et $g\in\mathscr{C}_+$ et $Vg\in\mathscr{C}_+$ alors $Vh\in\mathscr{C}_+$).

Montrons maintenant que si le lemme est vrai pour une fonction β, il est vrai aussi pour $\lambda\beta$ avec $0\leqq\lambda\leqq2$. Supposons donc $V\beta$ continue bornée et $U_\beta(\mathfrak{K})\subset\mathscr{C}_b$.

Alors, d'après les propriétés des opérateurs bornés vérifiant le principe complet du maximum

$$U_\beta M_\beta=(VM_\beta)(I+VM_\beta)^{-1}\qquad\text{dans } \mathscr{C}_b$$

et donc

$$U_\beta M_\beta\colon\ \mathscr{C}_b\to\mathscr{C}_b.$$

Si $f\in\mathfrak{K}_+$

$$Vf=\sum_n(U_\beta M_\beta)^n U_\beta f$$

uniformément sur tout compact et donc

$$U_{\lambda\beta}f=\sum_n(1-\lambda)^n(U_\beta M_\beta)^n U_\beta f$$

uniformément sur tout compact et, par conséquent,

$$U_{\lambda\beta}(\mathfrak{K})\subset\mathscr{C}_b.$$

Ceci étant, soit $(K_n)_{n\geqq0}$ une suite croissante de compacts de réunion E et soit (ϕ_n) une suite croissante telle que

$$\forall n\ \ \phi_n\in\mathfrak{K}_+,\qquad \phi_n=1\ \text{ sur } K_n\ \text{ et }\ 0\leqq\phi_n\leqq1.$$

Il existe une suite $(b_n)_{n\geqq0}$ à termes strictement positifs tel que $a=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\phi_n$ appartienne à $\mathscr{C}_o$ et Va appartienne à $\mathscr{C}_b$. On pose $\alpha_\kappa=\alpha\wedge\kappa a$. Alors, d'après le lemme

$$U_{\alpha_\kappa}(\mathfrak{K})\subset\mathscr{C}$$

et donc

$$\forall f\in\mathfrak{K}_+,\qquad U_\alpha(f)\ \text{ est s.c.s.}$$

Comme

$$\forall f\in\mathfrak{K}_+,\qquad Vf=U_\alpha f+U_\alpha M_\alpha Vf,$$

Tout revient à montrer

$$\forall f \in \mathfrak{K}_+, \quad U_\alpha M_\alpha Vf \quad \text{est s.c.s.}$$

Soit donc f de $\mathfrak{K}_+$ et $(A_n)_{n \geqq 0}$, $(g_n)_{n \geqq 0}$ les suites correspondantes.

$$U_\alpha M_\alpha (1_{\complement A_n} Vf) \leqq U_\alpha M_\alpha H_{\complement A_n} Vf \leqq H_{\complement A_n} Vf.$$

Donc $U_\alpha M_\alpha (1_{\complement A_n} Vf)$ converge vers 0 uniformément sur tout compact quand n tend vers $+\infty$.

Il suffit donc de démontrer

$$\forall n \ U_\alpha M_\alpha (1_{A_n} Vf) \quad \text{s.c.s.}$$

Soit donc n fixé.

$$\forall p \ U_\alpha M_\alpha (\phi_p 1_{A_n} Vf) \quad \text{est s.c.s.}$$

(car $\alpha \phi_p 1_{A_n} Vf$ est s.c.s. à support compact et U_α est un noyau-diffusion tel que

$$\phi \in \mathfrak{K}_+ \Rightarrow U_\alpha \phi \ \text{ s.c.s)}$$

et

$$U_\alpha M_\alpha [(1-\phi_p) 1_{A_n} Vf] \leqq [\sup_x Vf(x)] \ V[\alpha(1-\phi_p) g_n].$$

D'après les hypothèses sur g_n, $V[\alpha(1-\phi_p) g_n]$ est continue et décroit vers o quand p tend vers $+\infty$.

Donc, d'après le lemme de Dini

$$U_\alpha M_\alpha 1_{A_n} Vf = \lim_{p \to \infty} U_\alpha M_\alpha (\phi_p 1_{A_n} Vf)$$

uniformément sur tout compact, ce qui achève la démonstration.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) se démontre comme dans le théorème 1.

Nous nous intéressons maintenant au cas où le noyau U tend vers 0 à l'infini. Etant sous-markovien il vérifiera alors $U(\mathscr{C}_o) \subset \mathscr{C}_o$. Soit $(K_n)_{n \geqq 0}$ une suite croissante de compacts de réunion E.

Théorème 3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *Il existe un noyau-diffusion continu, tendant vers* 0 *à l'infini, U, tel que*

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} U^{n+1}.$$

(2) *Il existe une famille résolvante sous-markovienne* $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ *de noyaux-diffusion continus tendant vers* 0 *à l'infini tel que*

$$\forall f \in \mathfrak{K}_+, \quad \forall x \in E, \quad Vf(x) = \lim_{\lambda \to 0} V_\lambda f(x).$$

(3) i) $\forall f \in \mathfrak{K}_+$, $\forall x \in E$, $\lim_{n \to \infty} H_{\complement K_n} Vf(x) = 0$.

ii) $\forall g \in \mathscr{C}_o$, $\exists (f_n)_{n \geqq 0}$ *suite de* $\mathscr{C}_o$ *tel que* $\forall n$ $V|f_n|$ *est fini et* $g = \lim_{n \to \infty} (f_n + Vf_n)$ *uniformément.*

En outre, si ces propriétés sont vérifiées et si on note $\hat{V}$ *l'opérateur sur* $\mathscr{C}_o$ *défini par*

$$D(\hat{V}) = \{f \in \mathscr{C}_o;\ V|f| \text{ est fini et } Vf \in \mathscr{C}_o\}$$

et

$$\forall f \in D(\hat{V}) \qquad \hat{V} f = Vf,$$

alors on a la propriété

(4) *$\hat{V}$ est préfermé dans $\mathscr{C}_o$ et son plus petit prolongement fermé est le cogénérateur de $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ (considérée comme famille résolvante de $\mathscr{C}_o$).*

Rappelons (c.f. [3]) que le cogénérateur de $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ est l'opérateur de domaine $\{f\in\mathscr{C}_o;\ \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f$ existe uniformément$\}$ et défini par cette limite sur son domaine.

(1) ⇒ (3). Soit $V_{1/n}=\sum_{p=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^p U^{p+1}$.

Alors U définissant une contraction positive de $\mathscr{C}_o$ dans lui-même, il en est de même de $\frac{1}{n} V_{1/n}$ et

$$\lim_{n\to\infty} V_{1/n}=V.$$

Si f appartient à $\mathfrak{K}_+$

$$Vf=V_{1/p}f+\frac{1}{p}VV_{1/p}f$$

donc

$$H_{\complement K_n} Vf\leqq \sup_{x\in\complement K_n} V_{1/p}f(x)+(Vf-V_{1/p}f)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} H_{\complement K_n} Vf\leqq Vf-V_{1/p}f.$$

Ceci étant valable pour tout p, i) est démontré. D'autre part, si g appartient à $\mathfrak{K}$, $(g-U_g)$ appartient à $\mathscr{C}_o$ et $V(|g-Ug|)\leqq V|g|+VU|g|\leqq 2V|g|$ fini.

Enfin

$$(I+V)(g-Ug)=g$$

ce qui démontre ii).

(3)⇒(2). Il est clair, à partir du théorème 1, que i) implique l'existence d'une famille résolvante sous-markovienne $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ de noyaux-diffusion telle que

$$\forall x\in E \quad \forall f\in\mathfrak{K}_+ \quad Vf(x)=\lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f(x).$$

Si f appartient à $\mathscr{C}_o$ et $V|f|$ fini,

$$(I-V_1)(f+Vf)=f\in\mathscr{C}_o.$$

Donc, par densité, d'après ii)

$$(I-V_1)(\mathscr{C}_o)\subset\mathscr{C}_o$$

et donc

$$V_1(\mathscr{C}_o)\subset\mathscr{C}_o.$$

Par un raisonnement de prolongement analytique classique, on en déduit $\forall\lambda>0\ \ V_\lambda(\mathscr{C}_o)\subset\mathscr{C}_o$.

(2)⇒(1) est évident.

(2)⇒(4). Soit f appartenant à $\mathscr{C}_o$ avec $V|f|$ fini.

Alors $(f-\lambda V_\lambda f)$ appartient à $D(\hat{V})$ et

$$(I+\lambda\hat{V})(f-\lambda V_\lambda f)=f.$$

Donc $\overline{Im(I+\lambda\hat{V})}=\mathscr{C}_o$.

D'autre part
$$\forall f \in \mathfrak{K}, \quad f = \lim_{\lambda \to 0} (f - \lambda V_\lambda f)$$
uniformément (car $\lambda V_\lambda f \to 0$ faiblement). Donc $\overline{D(\hat{V})} = \mathscr{C}_o$.

Enfin $\hat{V}$ vérifie le principe complet du maximum (au sens de [3]). Donc $\hat{V}$ est préfermé et son plus petit prolongement fermé est cogénérateur d'une famille résolvante sous-markovienne $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ dans $\mathscr{C}_o$. $(I - \lambda W_\lambda)$ coïncidant avec $(I - \lambda V_\lambda)$ sur l'image de $I + \lambda \hat{V}$, $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ est la famille $(V_\lambda)_{\lambda>0}$.

Théorème 4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *Il existe un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t \geq 0}$ tel que*
$$\forall x \in E \quad \forall f \in \mathfrak{K}_+ \quad Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt.$$

(2) (i) $\forall f \in \mathfrak{K}_+, \forall x \in E, \lim_{n \to \infty} H_{\complement K_n} Vf(x) = 0.$

(ii) $\forall g \in \mathscr{C}_o$, $\exists (f_n)_{n \geq 0}$ *suite de* $\mathscr{C}_o$ *tel que* $\forall n$ $V|f_n|$ *est fini et* $g = \lim_{n \to \infty} (f_n + Vf_n)$ *uniformément.*

(iii) $\forall g \in \mathscr{C}_o$, $\exists (g_n)_{n \geq 0}$ *suite de* $\mathscr{C}_o$ *tel que* $\forall n$ $V|g_n|$ *est fini et* $g = \lim_{n \to \infty} Vg_n$ *uniformément.*

(1)$\Rightarrow$(2). D'après ce qui précède (i) et (ii) sont vérifiés et $\hat{V}$ est d'image dense, ce qui implique (iii).

(2)$\Rightarrow$(1). (i) et (ii) impliquent l'existence d'une famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$. Si g appartient à $\mathscr{C}_o$ et $V|g|$ fini
$$\lambda V_\lambda Vg = Vg - V_\lambda g \quad \text{et} \quad |V_\lambda g| \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{x \in E} |g(x)|$$
Donc
$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda Vg = Vg$$
uniformément, et, d'après (iii),
$$\forall g \in \mathscr{C}_o \quad \lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda g = g$$
uniformément, ce qui prouve que $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ est la résolvante d'un semi-groupe de Feller.

Remarque. Il existe des opérateurs V pour lesquels deux des propriétés (i), (ii) et (iii) sont vérifiées et non la troisième. Donnons des exemples

1. $$E = \mathbb{R}, \quad V\colon f \in \mathfrak{K} \to f + \int f(x)\, dx.$$

Pour un tel opérateur
$$D(\hat{V}) = \{f \in \mathscr{C}_o \cap L^1;\ \int f(x)\, dx = 0\}$$
et
$$\hat{V} f = f.$$

Donc $\hat{V}$ est préfermé de domaine dense, son plus petit prolongement fermé étant l'identité de $\mathscr{C}_o$. Il est donc évident que (ii) et (iii) sont vérifiés.

La résolvante associée à $\hat{V}$ est $\left(\frac{1}{1+\lambda} I\right)_{\lambda>0}$ qui ne converge pas vers V sur $\mathfrak{K}$ quand λ tend vers 0.
Donc, d'après le théorème 3, (i) ne peut être vérifié (ce qui peut aussi se voir directement).

2. $$E =]0,1[\quad \text{et} \quad Vf(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Alors les fonctions surmédianes continues sont les fonctions croissantes continues et on voit que (i) est vérifié. D'après [3], $\hat{V}$ est de domaine et d'image dense mais le plus petit prolongement fermé de $\hat{V}$ ne coengendre aucune famille résolvante. Donc (iii) est vérifié et (ii) n'est pas vérifié.

3. $$E = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, \quad Vf(x) = \int f(x)\,dx.$$

E étant compact (i) est évidemment vérifié et il est facile de voir que (ii) est vérifié, mais (iii) n'est pas vérifié (l'image de V étant constituée de fonctions constantes).

Il résulte de ces exemples que, dans le théorème 3, aucune des conditions i) et ii) n'est conséquence de l'autre et que (1) n'est pas impliqué par le fait que $\hat{V}$ est de domaine dense et que son plus petit prolongement fermé est un cogénérateur dans $\mathscr{C}_0$. De même, dans le théorème 4, aucune des conditions (i), (ii) et (iii) n'est conséquence des deux autres.

III. Nous supposons, dans cette dernière partie que E est un groupe localement compact dénombrable à l'infini et que V est un noyau de convolution vérifiant le principe complet du maximum. On note encore $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de compacts de réunion E. En observant que tout noyau de convolution est continu et que tout noyau de convolution sous-markovien tend vers 0 à l'infini on obtient:

Théorème 5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Il existe un noyau de convolution U tel que*

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} U^{n+1}.$$

(2) *Il existe une famille résolvante sous-markovienne $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ de noyaux de convolution telle que*

$$\forall f \in \mathfrak{K}_+, \quad \forall x \in E, \quad Vf(x) = \lim_{\lambda\to 0} V_\lambda f(x).$$

(3) $$\forall f \in \mathfrak{K}_+, \quad \forall x \in E, \quad \lim_{n\to\infty} H_{\complement K_n} Vf(x) = 0.$$

De même, sont équivalents:

(4) *Il existe un semi-groupe de Feller de convolution $(P_t)_{t\geq 0}$ tel que*

$$\forall f \in \mathfrak{K}_+, \quad \forall x \in E, \quad Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\,dt$$

et

(5) i) $\forall f \in \mathfrak{K}_+$, $\forall x \in E$, $\lim_{n\to\infty} H_{\complement K_n} Vf(x) = 0$,

ii) $\forall g \in \mathscr{C}_o$, $\exists (f_n)_{n \geqq 0}$ *suite de* $\mathscr{C}_o$ *avec,*
$\forall n$ $V|f_n|$ *fini et* $g = \lim\limits_{n \to \infty} V f_n$ *uniformément.*

Il suffit en effet de reprendre les démonstrations des théorèmes 3 et 4 en remarquant que ii) de (3) dans le théorème 3 n'était utilisé que pour montrer que les V_λ tendaient vers 0 à l'infini. Or d'après l'unicité des V_λ ce sont des noyaux de convolution sous-markoviens et donc tendant vers 0 à l'infini.

Les exemples 1 et 3 de la remarque précédente montrent que (3) n'est pas automatiquement vérifié et dans (5) i) et ii) sont indépendants. Naturellement, les résultats de III s'étendent sans difficulté au cas d'opérateurs invariants sur un espace homogène.

Bibliographie

1. Bronner, F.: Principe du maximum et résolvantes sous-markoviennes. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **277**, 221–223 (1973)
2. Bronner, F.: Principe du maximum et résolvantes sous-markoviennes. Thèse de 3ème cycle. Paris VI. 1973
3. Hirsch, F.: Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels. Ann. Inst. Fourier, **22**, Fasc. 1, 89–210 (1972)
4. Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel. Paris: Hermann 1966
5. Neveu, J.: Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. Ann. Inst. Fourier, **22**, Fasc. **2**, 85–130 (1972)
6. Taylor, J.C.: On the existence of sub-markovian resolvents. Invent. math., **17**, 85–93 (1972)

F. Hirsch
E.N.S.E.T.
61, avenue du Président Wilson
94230 Cachan, France

(Reçu le 17 janvier 1974)