Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
38, 339–351 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete
© by Springer-Verlag 1977

Mesures majorantes et théorème de la limite centrale dans $C(S)$

Bernard Heinkel

Institut de Mathématique, Université de Strasbourg,
7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France

Etant donné (S,d) un espace métrique compact, on considère les v.a. X à valeurs dans $C(S)$ (muni de la norme sup), centrées, telles que:

$$\sup_{s\in S} E(X^2(s)) < \infty.$$

On montre que pour des classes assez larges de telles v.a., la condition:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in S} \int_0^{\varepsilon} \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{\lambda(y:\rho(x,y)<u)}}\, du = 0$$

(où ρ désigne un écart sur S, lié très étroitement à la covariance de X, et λ est une mesure de probabilité sur S) est suffisante pour que X satisfasse au théorème de la limite centrale.

Les progrès rapides faits pendant les dix dernières années dans l'étude de la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes ont permis de préciser les propriétés de convergence étroite des suites de v.a. à valeurs dans certains espaces de Banach.

L'un des problèmes pour lesquels les connaissances acquises dans le cas gaussien ont permis de trouver des résultats intéressants est celui de la limite centrale dans le cas des v.a. à valeurs dans $C(S)$ ((S,d) étant un espace métrique compact).

Rappelons brièvement l'énoncé de ce problème: X étant une v.a. à valeurs dans $C(S)$, centrée, telle que:

$$\sup_{s\in S} E(X^2(s)) < \infty$$

on se donne une suite de v.a. indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $C(S)$, de même loi que X.

Pour tout entier n, on désigne par S_n la v.a.:

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et par μ_n la loi de $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

On dit alors que X *satisfait au théorème de la limite centrale s'il existe une mesure de probabilité gaussienne* μ *sur* $C(S)$ *telle que* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge étroitement vers* μ.

Le problème se formule alors de la façon suivante: «Trouver des conditions suffisantes (et si possible nécessaires) pour que X satisfasse au théorème de la limite centrale».

Dans [9], N.C. Jain et M.B. Marcus ont donné des conditions suffisantes pour que X satisfasse au théorème de la limite centrale, pour plusieurs classes importantes de v.a. Rappelons un énoncé à titre d'exemple:

Théorème A. *On suppose qu'il existe un écart* ρ *sur* S, *continu par rapport à* d *et une v.a.r.* $M \geqq 0$, *de carré intégrable, tels que:* $\forall s, t \in S$, $\forall \omega$, $|X(\omega, s) - X(\omega, t)| \leqq M(\omega)\, \rho(s, t)$.

On suppose de plus que:

$$\int_0 \sqrt{\operatorname{Log} N_\rho(S, u)}\, du < \infty$$

où $N_\rho(S, u)$ *désigne le nombre minimal de* ρ*-boules de rayon* u, *suffisant à recouvrir* S.

Sous ces hypothèses X *satisfait au théorème de la limite centrale.*

Les démonstrations de N.C. Jain et M.B. Marcus utilisent de manière essentielle la technique de «recouvrement» introduite par R.M. Dudley [2] pour étudier la continuité des fonctions aléatoires gaussiennes.

Dans cet article, on va montrer qu'on peut de même établir des conditions suffisantes pour que X satisfasse au théorème de la limite centrale, en utilisant une méthode procédant à la fois de la technique des mesures majorantes de X. Fernique [4] et des idées de A.M. Garsia, E. Rodemich, H. Rumsey Jr. [5] et C. Preston [12]. Les résultats que nous obtiendrons sont plus forts que les deux énoncés principaux de N.C. Jain et M.B. Marcus; le Théorème A par exemple apparaît comme corollaire du résultat suivant:

Théorème 1. *Supposons qu'il existe une v.a.r.* $M \geqq 0$, *de carré intégrable, et un écart* ρ *sur* S, *continu par rapport à* d, *vérifiant:*

$$\forall s,\ t \in S, \qquad \forall \omega, |X(\omega, s) - X(\omega, t)| \leqq M(\omega)\, \rho(s, t).$$

S'il existe une mesure de probabilité λ *sur* S *(muni de la tribu* ρ*-borélienne) telle que:*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x \in S} \int_0^\varepsilon \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{\lambda(y : \rho(x, y) < u)}}\, du = 0. \tag{$*$}$$

Alors X *satisfait au théorème de la limite centrale.*

Le fait que le Théorème A est un corollaire du Théorème 1 est évident, car il est bien connu (cf. [4], Corollaire 6.2.4. ou [12]) que si la condition de recouvrement du Théorème A est satisfaite, il existe une mesure de probabilité λ sur S, vérifiant $(*)$.

On peut établir le Théorème 1 directement (cf. [7]) ou employer la technique utilisée par J. Zinn [13] pour démontrer le Théorème A; on peut aussi, et c'est

ce que nous ferons, l'obtenir comme conséquence immédiate d'un résultat beaucoup plus général que nous allons énoncer après avoir introduit quelques notations.

Notations

1) Dans toute la suite, on notera φ la function: $[1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$

$t \mapsto \sqrt{\operatorname{Log} t}$.

2) Dans les différents énoncés, on introduira un écart privilégié ρ (lié plus ou moins intimement à l'écart τ induit par la covariance de la v.a. X considérée). Pour tout $r>0$ et tout $x \in S$, $B(x,r)$ désignera la ρ-boule ouverte de centre x et de rayon r. Pour toute fonction f: $S \to \mathbb{R}$, on notera:

$$\tilde{f}(s,t) = \frac{f(s)-f(t)}{\rho(s,t)} \cdot 1_{\{(u,v):\rho(u,v)\neq 0\}}(s,t).$$

3) On notera $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi que X, définies sur un espace probabilisé $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$. On considèrera d'autre part un second espace probabilisé $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$ sur lequel on a construit une suite de Rademacher $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. une suite de v.a.r. indépendantes de même loi que ε_1, où $P(\varepsilon_1=1)=P(\varepsilon_1=-1)=\frac{1}{2}$). On désignera par E_i $(i=1,2)$ l'espérance calculée par rapport à la probabilité P_i $(i=1,2)$ et on notera P la probabilité produit $P_1 \otimes P_2$.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème fondamental:

Théorème 2. *On suppose vérifiées les hypothèses suivantes:*

1) *il existe un écart ρ sur S, d-continu, tel que X soit continu par rapport à ρ; de plus l'écart τ induit par la covariance de X est d-continu;*

2) *il existe une mesure de probabilité λ sur S (muni de la tribu ρ-borélienne) telle que:*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{x\in S} \int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{1}{\lambda(B(x,u))}\right) du = 0;$$

3) *il existe une suite de v.a.r. indépendantes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sur $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$ de même loi que T, T étant une v.a.r. $\geqq 0$, de carré intégrable, vérifiant:*

$$K = \sup_n E_1 E_2 \operatorname{Log} \int_{S\times S} \exp\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k(s,t)\varepsilon_k\right)^2}{\sum_{k=1}^n T_k^2}\right) d\lambda(s)\, d\lambda(t) < +\infty.$$

Sous ces hypothèses, X satisfait au théorème de la limite centrale.

Remarque. R.M. Dudley [3] a construit des exemples de v.a. à valeurs dans $C(S)$ vérifiant l'hypothèse 2) précédente, l'écart ρ choisi étant celui induit par la covariance, qui ne satisfont pas au théorème de la limite centrale. Cette condition 2) précédente n'est donc pas suffisante pour avoir la propriété de

limite centrale dans le cas général; elle l'est par contre évidemment dans le cas gaussien. Ce fait est contenu dans le corollaire suivant du Théorème 2, qui donne à la fois les cas gaussien et sous-gaussien, et qui généralise le Théorème 2 de [9]:

Théorème 3. *Supposons l'écart τ induit par la covariance de X continu par rapport à d. On suppose de plus qu'il existe une constante $A>0$, telle que:*

$$\forall s,\ t\in S,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\qquad E\{\exp\alpha(X(s)-X(t))\}\leqq\exp A\alpha^2\tau^2(s,t).$$

S'il existe une mesure de probabilité λ sur S (muni de la tribu τ-borélienne) telle que:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{x\in S}\int_0^\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{\lambda(B(x,u))}\right)du=0$$

alors X satisfait au théorème de la limite centrale.

L'examen de la démonstration du Théorème 3 nous montre que la condition suffisante classique de continuité des fonctions aléatoires gaussiennes, l'est également dans le cas sous-gaussien; ceci généralise le Théorème 3.1 de [10].

De façon précise, on a l'énoncé suivant:

Théorème 4. *Soient (S,d) un espace métrique compact et $(X(t),t\in S)$ une fonction aléatoire séparable, centrée, de carré intégrable. On suppose de plus que l'écart τ induit par la covariance de X est continu par rapport à d et qu'il existe une constante $A>0$, telle que:*

$$\forall s,\ t\in S,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\qquad E\{\exp\alpha(X(s)-X(t))\}\leqq\exp A\alpha^2\tau^2(s,t).$$

S'il existe une mesure de probabilité λ sur S (muni de la tribu τ-borélienne) telle que:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{x\in S}\int_0^\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{\lambda(B(x,u))}\right)du=0,$$

alors X est à trajectoires presque sûrement continues.

Avant de démontrer ces différents théorèmes, nous allons établir à part un résultat de continuité qui est déjà contenu implicitement dans [8] (Proposition 1).

§ 1. Un résultat de continuité

Les résultats que nous venons d'énoncer se démontrent essentiellement en utilisant le lemme suivant:

Proposition 1. *Soient ρ un écart sur S et λ une mesure de probabilité sur S (muni de la tribu ρ-borélienne) vérifiant l'hypothèse:*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{x\in S}\int_0^\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{\lambda(B(x,u))}\right)du=0. \tag{1}$$

Pour toute fonction f: $S \to \mathbb{R}$, ρ-continue, telle que:

$$c = \int_{S \times S} \exp \tilde{f}^2(s,t)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t) < \infty$$

on a:

$$\forall x, y \in S,\ |f(x) - f(y)| \leqq 20 \sup_{z \in S} \int_0^{\frac{\rho(x,y)}{2}} \varphi\left(\frac{c}{\lambda^2(B(z,u))}\right) du.$$

Démonstration. Justifions tout d'abord rapidement la mesurabilité de l'ensemble $((u,v)\colon \rho(u,v) \neq 0)$, qui implique la mesurabilité de la fonction $\tilde{f}$. En posant pour tout $\varepsilon > 0$:

$$M_\rho(S, \varepsilon) = \sup\{\operatorname{card} D\colon D \subset S \mid \forall s, t \in D,\ \rho(s,t) > \varepsilon\},$$

on remarque que l'hypothèse faite sur λ implique:

$$\forall \varepsilon > 0,\ M_\rho(S, \varepsilon) < +\infty.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$N_\rho(S, \varepsilon) \leqq M_\rho(S, \varepsilon) < +\infty.$$

Pour tout entier n, on considère alors un recouvrement minimal de S par des boules de rayon $1/n$, de centres $s_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, N_\rho(S, 1/n))$, et on note:

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{N_\rho(S,1/n)} (B(s_i^{(n)}, 1/n) \times B(s_i^{(n)}, 1/n)).$$

Or:

$$\{(u,v)\colon \rho(u,v) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

et, de ce fait, $\{(u,v)\colon \rho(u,v) \neq 0\} \in \mathscr{B}_\rho(S) \times \mathscr{B}_\rho(S)$.

Venons-en maintenant à la démonstration proprement dite. Il n'y a rien à démontrer si $\rho(x,y) = 0$; on exclura donc ce cas. Pour tout borélien F, tel que $\lambda(F) > 0$, on pose:

$$f_F = \frac{1}{\lambda(F)} \int_F f\, d\lambda.$$

Soient maintenant F et G, tels que $\lambda(F)\lambda(G) > 0$. Si l'on note:

$$\delta = \sup(\rho(x,y)\colon x \in F, y \in G)$$

on aura par une application simple de l'inégalité de Jensen:

$$|f_F - f_G| \leqq \varphi\left(\frac{c}{\lambda(F)\lambda(G)}\right) \delta. \tag{2}$$

La condition (1) implique:

$$\forall x \in S, \quad \forall u > 0, \quad \lambda(B(x,u)) > 0$$

ce qui donne, pour tout $r > 0$, un sens à la fonction suivante:

$$f_r(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f\, d\lambda.$$

Nous allons montrer que:

$$\forall x \in S, \quad \lim_{r \to 0} f_r(x) = f(x).$$

Par continuité, il suffit d'établir l'existence de la limite précédente.

Fixons $x \in S$, ainsi que les 2 nombres positifs r et s, avec $0 < s < r$. Pour tout entier n, on pose:

$$r_n = r \cdot 2^{-n}.$$

Par application de (2), on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_{r_n}(x) - f_{r_{n+1}}(x)| \leqq 6 \int_{r_{n+2}}^{r_{n+1}} \varphi\left(\frac{c}{\lambda^2(B(x,u))}\right) du.$$

D'où l'on déduit aisément:

$$|f_r(x) - f_s(x)| \leqq 6 \int_0^r \varphi\left(\frac{c}{\lambda^2(B(x,u))}\right) du + 3 \int_0^s \varphi\left(\frac{c}{\lambda^2(B(x,u))}\right) du$$

et ainsi on a bien la convergence annoncée; de plus:

$$\forall r > 0, \quad \forall x \in S, \quad |f_r(x) - f(x)| \leqq 6 \int_0^r \varphi\left(\frac{c}{\lambda^2(B(x,u))}\right) du.$$

Soient maintenant x et y fixés, avec $\rho(x,y) \neq 0$. Posons:

$$r = \tfrac{1}{2}\rho(x,y),$$
$$A = B(x,r) \cup B(y,r).$$

En appliquant (2), il vient:

$$|f_A - f_r(x)| \leqq 4 \int_0^r \varphi\left(\frac{c}{\lambda^2(B(x,u))}\right) du.$$

On a une relation analogue en y, d'où:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqq |f(x) - f_r(x)| + |f_r(x) - f_A| + |f_A - f_r(y)| + |f_r(y) - f(y)| \\ &\leqq 20 \sup_{z \in S} \int_0^{\frac{\rho(x,y)}{2}} \varphi\left(\frac{c}{\lambda^2(B(z,u))}\right) du \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Nous passons à présent à la démonstration des théorèmes.

§ 2. Démonstration du Théorème 2

Nous allons d'abord établir le Théorème 2 dans le cas où X est symétrique. Le cas général s'en déduira par un argument de symétrisation emprunté à N.C. Jain et M.B. Marcus [9].

Le théorème de la limite centrale en dimension finie montre qu'il suffit, pour que X satisfasse au théorème de la limite centrale «vectoriel», d'établir le lemme suivant (cf. [1]):

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2, on a:*

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists \delta > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tels que:*

$$\forall n \geqq n_0, \qquad P\left\{ \sup_{d(s,t) \leqq \delta} \left| \frac{S_n(s)}{\sqrt{n}} - \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \right| \geqq \varepsilon \right\} \leqq \eta$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n *désigne la v.a.* $X_1 + \cdots + X_n$.

Démonstration du Lemme 2.1. Par symétrie, les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même loi; ceci montre qu'il suffit d'établir le Lemme 2.1 pour la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (relativement à $P_1 \otimes P_2$) au lieu de $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k X_k.$$

Par application du Lemme de continuité, on aura:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \forall \alpha > 0,$$

$$P\left\{ \sup_{\rho(s,t) \leqq \alpha} |Z_n(s) - Z_n(t)| \geqq \varepsilon \right\}$$

$$= P\left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{T_k^2}{n}} \sup_{\rho(s,t) \leqq \alpha} \frac{|Z_n(s) - Z_n(t)|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{T_k^2}{n}}} \geqq \varepsilon \right\}$$

$$\leqq P\left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{T_k^2}{n}} \sup_{x \in S} \int_0^{\alpha/2} \varphi\left(\frac{c_n}{\lambda^2(y : \rho(x,y) < u)} \right) du \geqq \frac{\varepsilon}{20} \right\}$$

où c_n désigne la v.a. p.s. finie:

$$c_n = \int_{S \times S} \exp \frac{n \tilde{Z}_n^2(s,t)}{\sum_{k=1}^{n} T_k^2} \, d\lambda(s)\, d\lambda(t).$$

On en déduit, par application des inégalités de Čebičev et de Schwarz:

$$P\left\{ \sup_{\rho(s,t) \leqq \alpha} |Z_n(s) - Z_n(t)| \geqq \varepsilon \right\}$$

$$\leqq \frac{20}{\varepsilon} \sqrt{E(T^2)} \sqrt{E \sup_{x \in S} \left(\int_0^{\alpha/2} \varphi\left(\frac{c_n}{\lambda^2(y : \rho(x,y) < u)} \right) du \right)^2}.$$

D'où, par une majoration élémentaire:

$$P\left\{ \sup_{\rho(s,t) \leqq \alpha} |Z_n(s) - Z_n(t)| \geqq \varepsilon \right\}$$

$$\leqq \frac{20}{\varepsilon} \sqrt{E(T^2)} \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} E(\operatorname{Log} c_n) + 2 \left(\sup_{x \in S} \int_0^{\alpha/2} \varphi\left(\frac{1}{\lambda^2(y : \rho(x,y) < u)} \right) du \right)^2}$$

$$\leqq \frac{20}{\varepsilon} \sqrt{E(T^2)} \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} K + 2 \left(\sup_{x \in S} \int_0^{\alpha/2} \varphi\left(\frac{1}{\lambda^2(y : \rho(x,y) < u)} \right) du \right)^2}.$$

Le Lemme 2.1 découle de cette inégalité par continuité de ρ par rapport à d.

Ceci achève la démonstration du Théorème 2 dans le cas symétrique. Le cas général s'en déduit en utilisant le théorème de symétrisation suivant de N.C. Jain et M.B. Marcus ([9], Lemme 2):

Lemme 2.2. *Soit* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $C(S)$; *on suppose que:*

$$\forall \varepsilon>0, \quad \forall \eta>0, \quad \exists \delta>0 \quad \text{tel que } \forall s,t\in S \text{ avec } d(s,t)\leqq\delta, \text{ on ait:}$$

$$\sup_n P\{|Y_n(s)-Y_n(t)|\geqq\varepsilon\}\leqq\eta.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, *on désigne par* μ_n *(resp.* ν_n*) la loi de* Y_n *(resp.* $-Y_n$*). Si la suite* $(\mu_n*\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est tendue, on a:*

$$\forall \alpha>0, \quad \forall \beta>0, \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \gamma>0 \quad \text{tels que:}$$

$$\forall n\geqq n_0, \quad \mu_n\{x\colon \sup_{d(s,t)\leqq\gamma}|x(s)-x(t)|\geqq\alpha\}\leqq\beta.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi que X. On a évidemment:

$$\forall s,t\in S, \quad E\left(\frac{S_n(s)-S_n(t)}{\sqrt{n}}\right)^2=\tau^2(s,t).$$

Si l'on note à présent $Y_n=\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$, on remarque, du fait de la continuité de τ par rapport à d, que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la première hypothèse du Lemme 2.2.

En appliquant le résultat que nous venous d'établir dans le cas symétrique à la v.a. $\dfrac{X-X'}{\sqrt{2}}$ (où X' est une v.a. indépendante de X, de même loi), on voit que la suite $(\mu_n*\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (μ_n désignant la loi de Y_n et ν_n celle de $-Y_n$) est tendue.

Le Lemme 2.2 et le théorème de la limite centrale en dimension finie montrent alors qu'il existe une mesure de probabilité gaussienne μ sur $C(S)$, de même covariance que X, et telle que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers μ, ce qui achève la démonstration du Théorème 2.

§ 3. Démonstration du Théorème 1

Nous allons établir que le Théorème 1 est un cas particulier du Théorème 2. Il est naturel de choisir comme écart privilégié, l'écart ρ donné par l'énoncé. Il suffit à présent de trouver une v.a.r. $T\geqq 0$ vérifiant l'hypothèse 3 du Théorème 2. Nous allons montrer que $T=\sqrt{2\pi}\,M$ convient. En fait, nous allons même montrer que la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait à une condition plus restrictive, à savoir:

$$\sup_n E_1 \operatorname{Log} \int_{S\times S} E_2 \exp\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k(s,t)\,\varepsilon_k\right)^2}{2\pi\sum_{k=1}^n M_k^2}\right) d\lambda(s)\,d\lambda(t)<+\infty.$$

Soit $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. normales centrées réduites et indépendantes. Un résultat de G. Pisier ([11], Proposition 1) montre que pour tout couple (s,t) fixé, tel que $\rho(s,t)\neq 0$, on a:

$$E_2 \exp\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k(s,t)\,\varepsilon_k\right)^2}{2\pi \sum_{k=1}^{n} M_k^2}\right) \leqq E_2 \exp \tfrac{1}{4}\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k(s,t)\,\eta_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} M_k^2}\right)$$

$$\leqq E_2 \exp \tfrac{1}{4}\eta_1^2 = \sqrt{2}.$$

Cette inégalité reste évidemment valable si s et t sont tels que $\rho(s,t)=0$. D'où finalement:

$$\sup_n E_1 \operatorname{Log} \int_{S\times S} E_2 \exp\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k(s,t)\,\varepsilon_k\right)^2}{2\pi \sum_{k=1}^{n} M_k^2}\right) d\lambda(s)\,d\lambda(t) \leqq \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2$$

et ceci achève la démonstration du fait que le Théorème 1 est un corollaire du Théorème 2.

§ 4. Démonstration des Théorèmes 3 et 4

Nous allons tout d'abord établir le Théorème 3; sa démonstration se réduit encore à remarquer que cet énoncé est un cas particulier du Théorème 2. Nous allons montrer à cet effet que les hypothèses du Théorème 2 sont satisfaites si l'on choisit comme v.a. T la constante 1 et comme écart privilégié $\rho = a\tau$, τ étant l'écart induit par la covariance de X, et a une constante positive qui sera précisée ultérieurement.

Commençons par établir que X est τ-continue.

Lemme 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3, X est à trajectoires presque sûrement τ-continues.*

Démonstration. Il est clair qu'il suffit d'établir la τ-continuité de Y, où:

$$Y(t) = \frac{1}{3\sqrt{A}\,\theta} X(t)$$

avec:

$$\theta = \sup\left(\sup_{s,t} \tau(s,t), 1\right).$$

On a alors pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et tout couple (s,t) d'éléments de S:

$$E\{\exp \alpha(Y(s)-Y(t))\} \leqq \exp \frac{\alpha^2}{9}\,\frac{\tau^2(s,t)}{\theta^2}.$$

Soient maintenant $s\in S$ et $r>0$ fixés. Pour tout entier k, on pose:

$$r_k = r\cdot 2^{-k}$$

et:

$$Y_{(r)}^k(\omega, s) = \frac{1}{\lambda(B(s, r_k))} \int_{B(s, r_k)} Y(\omega, z)\, d\lambda(z).$$

Cette expression est définie pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après l'hypothèse faite sur λ. Par application de l'inégalité de Jensen, on a:

$$E|Y(s) - Y_{(r)}^k(s)| \leqq E \frac{1}{\lambda(B(s, r_k))} \int_{B(s, r_k)} \operatorname{Log} \exp |Y(s) - Y(z)|\, d\lambda(z)$$

$$\leqq \operatorname{Log} \frac{1}{\lambda(B(s, r_k))} \int_{B(s, r_k)} E \exp |Y(s) - Y(z)|\, d\lambda(z).$$

En décomposant $E \exp |Y(s) - Y(z)|$ en somme de 2 intégrales et en appliquant l'inégalité de Hölder pour 2^k, on obtient:

$$E \exp |Y(s) - Y(z)| \leqq 2^{\frac{1}{2^k}} \exp\left(2^k \frac{\tau^2(s, z)}{9\theta^2}\right)$$

et:

$$E|Y(s) - Y_{(r)}^k(s)| \leqq \frac{1}{2^k} \left(\operatorname{Log} 2 + \frac{r^2}{9\theta^2}\right).$$

D'où:

$$\sum_{k=1}^{\infty} E|Y(s) - Y_{(r)}^k(s)| < +\infty$$

et:

$$\lim_{k \to \infty} Y_{(r)}^k(s) = Y(s) \quad \text{p.s.}$$

Soit T une partie dénombrable dense de S. Rejetons le cas où $\tau(s, t) = 0$ sur $T \times T$, dans lequel il n'y a rien à démontrer. Notons:

$$A = \{r > 0 \colon \exists (s, t) \in T \times T \quad \text{avec: } \tau(s, t) = r\}.$$

Il existe alors $\Omega_0 \subset \Omega$, avec $P(\Omega_0) = 1$, tel que:

$$\forall s \in T, \quad \forall r \in A, \quad \forall \omega \in \Omega_0, \quad \lim_{k \to \infty} Y_{(r)}^k(\omega, s) = Y(\omega, s). \tag{3}$$

Montrons à présent que la v.a. c, définie par:

$$c(\omega) = \int_{S \times S} \exp \tilde{Y}^2(\omega)(s, t)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t)$$

est intégrable, ce qui impliquera qu'elle est finie presque sûrement.

$$E(c) \leqq 1 + \int_{(\tau(s,t) \neq 0)} E \exp \tilde{Y}^2(s,t)\, d\lambda(s)\, d\lambda(t)$$

$$\leqq 2 + \int_{(\tau(s,t) \neq 0)} \sum_{n=1}^{\infty} P\{\exp \tilde{Y}^2(s,t) \geqq n\}\, d\lambda(s)\, d\lambda(t)$$

$$\leqq 3 + \int_{(\tau(s,t) \neq 0)} \sum_{n=2}^{\infty} P\{2\sqrt{\operatorname{Log} n}\, |\tilde{Y}(s,t)| \geqq 2 \operatorname{Log} n\}\, d\lambda(s)\, d\lambda(t)$$

$$\leqq 3 + 2 \int_{(\tau(s,t) \neq 0)} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{4}{9} \operatorname{Log} n} \right) d\lambda(s)\, d\lambda(t) < \infty.$$

c est donc finie presque sûrement; supposons-la finie partout pour simplifier. Fixons maintenant un couple (s,t) d'éléments de $T \times T$, tels que $\tau(s,t) \neq 0$. En appliquant la propriété (3) et un raisonnement analogue à celui fait pour établir la Proposition 1, on obtient: $\forall \omega \in \Omega_0$,

$$|Y(\omega,s) - Y(\omega,t)| \leqq 20 \sup_{x \in S} \int_0^{\frac{\tau(s,t)}{2}} \varphi\left(\frac{c(\omega)}{\lambda^2(B(x,u))}\right) du.$$

En remarquant que si $\tau(s,t) = 0$, on a $Y(s) = Y(t)$ presque sûrement, on peut énoncer le résultat partiel que nous venons d'établir sous la forme suivante:

$\exists \Omega_1$ avec $P(\Omega_1) = 1$, tel que $\forall s,t \in T$, $\forall \omega \in \Omega_1$, on ait:

$$|Y(\omega,s) - Y(\omega,t)| \leqq 20 \sup_{x \in S} \int_0^{\frac{\tau(s,t)}{2}} \varphi\left(\frac{c(\omega)}{\lambda^2(B(x,u))}\right) du.$$

La d-continuité de Y et la continuité de τ par rapport à d, montrent qu'en fait cette relation est vraie pour tout couple d'éléments de S. Y est donc à trajectoires presque sûrement τ-continues, ce qui achève la démonstration du Lemme 4.1.

Choisissons à présent comme écart privilégié $\rho = 3\sqrt{A}\,\theta\tau$. Nous allons montrer que l'hypothèse 3) du Théorème 2 est amplement réalisée pour $T = 1$, car on a même plus:

$$L = \sup_n E_1 \int_{S \times S} E_2 \exp \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k(s,t)\, \varepsilon_k\right)^2}{n}\, d\lambda(s)\, d\lambda(t) < +\infty.$$

Considérons à cet effet la v.a.:

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k \varepsilon_k}{\sqrt{n}}.$$

On a, par indépendance:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall s,t \in S$:

$$E_2 E_1 \exp \alpha(Z_n(s) - Z_n(t)) = E_2 \prod_{k=1}^{n} E_1 \exp \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \varepsilon_k (X_k(s) - X_k(t))$$

$$\leqq \exp \frac{1}{n} A \alpha^2 n \tau^2(s,t).$$

D'autre part:

$$E_1 E_2(Z_n(s)-Z_n(t))^2=\tau^2(s,t).$$

La v.a. Z_n est donc encore sous-gaussienne de «même paramètre» A que X. D'après ce que nous avons vu plus haut, on a donc:

$$L \leqq 3+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{14/9}}<+\infty$$

et le Théorème 3 apparaît bien comme un corollaire du Théorème 2.

Remarque. La démonstration du Lemme 4.1 établit également le Théorème 4, l'argument de d-continuité de Y étant remplacé par le fait que Y est séparable.

§ 5. Remarques et compléments

1. On peut remarquer que l'on peut obtenir le Théorème 3 sans passer par l'intermédiaire du Théorème 2; pour établir que la suite des lois des «$\frac{S_n}{\sqrt{n}}$» est tendue, on fait des majorations analogues à celles utilisées pour montrer que c est intégrable dans la démonstration du Lemme 4.1.

2. A propos du Théorème 4, on peut remarquer que la condition intégrale qui y intervient n'est pas nécessaire pour qu'un processus à accroissements sous-gaussiens soit à trajectoires presque sûrement continues comme le montre l'exemple suivant (emprunté à [9]):

Soit $S=[0,1]$, muni de la distance usuelle. Soit ψ_j la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ de la façon suivante:

$$\psi_j(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\in[0,1]\setminus]2^{-j-1},2^{-j}[\\ 2^{2^{j+1}} & \text{si } t=3\cdot 2^{-j-2} \\ \text{et linéaire sur les intervalles } [2^{-j-1},3\cdot 2^{-j-2}] \text{ et } [3\cdot 2^{-j-2},2^{-j}]. \end{cases}$$

On note de plus:

$$\varphi_j=\frac{1}{2^{2^{j+1}}\operatorname{Log}\operatorname{Log}(j+9)}\psi_j.$$

Si l'on se donne à présent une suite de Rademacher $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est clair que la fonction aléatoire X définie par:

$$X=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j\varepsilon_j$$

est à trajectoires presque sûrement continues; elle est évidemment à accroissements sous-gaussiens. Mais (cf. [9]) X ne satisfait pas au théorème de la limite centrale et, en vertu de Théorème 3, la condition intégrale du Théorème 4 ne peut donc pas être remplie pour cette fonction aléatoire X.

La conclusion qui se dégage de cette étude est que la technique que nous avons utilisée pour démontrer les théorèmes précédents, qui est une synthèse de la méthode des mesures majorantes de X. Fernique [4] et des résultats de continuité de A.M. Garsia, E. Rodemich, H. Rumsey Jr [5] et C. Preston [12], donne des résultats plus forts que la méthode de recouvrement employée par N.C. Jain, M.B. Marcus [9] et E. Giné [6].

Références

1. Billingsley, P.: Convergence of probability measures. New-York: Wiley 1968
2. Dudley, R.M.: The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of gaussian processes. J. Functional Analysis **1**, 290–330 (1967)
3. Dudley, R.M.: Metric entropy and the central limit theorem in $C(S)$. Ann. Inst. Fourier **24**, 2, 49—60 (1974)
4. Fernique, X.: Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'Eté de Probabilités de St Flour 4 (1974); Lecture Notes in Math. 480, 1—96, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
5. Garsia, A.M., Rodemich, E., Rumsey, H. Jr.: A real variable lemma and the continuity of some gaussian processes. Indiana Univ. Maths J. **20**, n° 6, 565—578 (1970)
6. Giné, E.: On the central limit theorem for sample continuous processes. Ann. Probability **2**, 629—641 (1974)
7. Heinkel, B.: Théorème central-limite et loi du logarithme itéré dans $C(S)$. C.R. Acad. Sci. Paris 282 Sér. A, 711–713 (1976)
8. Heinkel, B.: Théorème de dérivation du type de celui de Lebesgue et continuité p.s. des trajectoires de certains processus gaussiens (1974). Séminaire de Probabilités VIII; Lecture Notes in Math. **381**, 155—171. Berlin-Heidelberg-New York: Springer
9. Jain, N.C., Marcus, M.B.: Central-limit theorems for $C(S)$-valued random variables. J. Functional Analysis **19**, 216—231 (1975)
10. Jain, N.C., Marcus, M.B.: Sufficient conditions for the continuity of stationary gaussian processes and applications
11. Pisier, G.: Type des espaces normés. Séminaire Maurey-Schwartz, 1973–74, exposé n° 3
12. Preston, C.: Continuity properties of some gaussian processes. Ann. Math. Statist. **43**, 285–292 (1972)
13. Zinn, J.: A note on the central-limit theorem in Banach spaces. A paraître

Reçu le 24 Septembre 1976