Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
35, 265–268 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Maßfortsetzungen und Aumann's Selektionstheorem

Jürgen Lehn
Mathematisches Institut II der Universität Karlsruhe, Kaiserstr. 12, D-7500 Karlsruhe, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Seien $(X, \mathfrak{A}, p)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, f eine Funktion auf X mit Werten im Intervall $I=[0,1]$, $\mathscr{B}(I)$ das System der Borelschen Teilmengen von I sowie $f^{-1}(\mathscr{B}(I))$ das System der Urbilder von Mengen aus $\mathscr{B}(I)$. Weiter sei $\mathfrak{A}_1$ die von $\mathfrak{A}$ und $f^{-1}(\mathscr{B}(I))$ erzeugte σ-Algebra.

In seinem Artikel [3] studiert Bierlein die Frage, unter welchen Bedingungen ein Maß auf $\mathfrak{A}_1$ existiert, das auf $\mathfrak{A}$ eingeschränkt mit p übereinstimmt. Dieses Problem, das gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß p so fortzusetzen, daß die Funktion f meßbar wird, hat, wie Bierlein zeigt, für Funktionen f, deren Graph

$$\Gamma_f=\{(x,f(x))\in X\times I: x\in X\}$$

durch eine Menge C der Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}\otimes\mathscr{B}(I)$ im Sinne der hier im zweiten Abschnitt angegebenen Definition approximiert wird, eine Lösung, falls auf $\mathfrak{A}\otimes\mathscr{B}(I)$ ein Maß μ existiert, das den folgenden Bedingungen genügt:

$$\mu(A\times I)=p(A) \qquad \text{für alle } A\in\mathfrak{A}, \tag{1}$$

$$\mu(C)=1. \tag{2}$$

In einer weiteren Arbeit [4] betrachtet Bierlein den Fall

$$C\in(\mathfrak{A}\times\mathscr{J})_{\sigma\delta\sigma},$$

wobei $\sigma\delta\sigma$ die übliche Bedeutung hat und $\mathscr{J}$ das System aller Durchschnitte von I mit offenen Intervallen ist sowie $\mathfrak{A}\times\mathscr{J}$ für das System aller Rechtecke mit Seiten aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathscr{J}$ steht. Zu einem beliebig vorgegebenen approximierenden C von diesem Typ konstruiert Bierlein ein Maß μ auf $\mathfrak{A}\otimes\mathscr{B}(I)$, das den Bedingungen (1) und (2) genügt.

Im folgenden wird mit Hilfe des Aumannschen Selektionstheorems nachgewiesen, daß zu *jeder* approximierenden Menge $C\in\mathfrak{A}\otimes\mathscr{B}(I)$ ein Maß μ auf $\mathfrak{A}\otimes\mathscr{B}(I)$ existiert, das den Bedingungen (1) und (2) genügt. Daraus folgt nach den Ergebnissen in [3], daß sich jede Funktion f, deren Graph Γ_f durch eine Menge

$C \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ im Sinne der Definition des zweiten Abschnitts approximiert wird, durch eine Fortsetzung von p meßbar machen läßt.

Der hier eingeschlagene Weg, ein Maßfortsetzungsproblem durch Anwendung eines Selektionstheorems zu lösen, wurde bereits in den Arbeiten [6, 7] und [9] (vgl. dazu Abschnitt 1.3 in [10]) zur Lösung eines anderen Maßfortsetzungsproblems beschritten.

Herrn D. Bierlein danke ich für die Anregung, mich mit dem hier behandelten Problem zu beschäftigen, Herrn D. Kölzow für seinen Hinweis auf Aumann's Selektionstheorem.

1. Lösung des Marginalproblems

Für eine Menge $B \subset X \times I$ bezeichne πB ihre Projektion auf X. Als Folgerung aus Bierlein's Hilfssätzen 1 und 2 in [2] erhalten wir den

Projektionssatz. *Sei $(X, \mathfrak{A}, p)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $B \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$, so ist $\pi B \in \mathfrak{A}$.*

Damit kann der folgende Hilfssatz bewiesen werden:

Hilfssatz. *Sei $(X, \mathfrak{A}, p)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $s\colon X \to I$ eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion und bezeichnet Γ_s ihren Graphen, dann ist durch*

$$\mu(B) = p(\pi(B \cap \Gamma_s)) \qquad \text{für alle } B \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$$

ein Maß μ erklärt, das der Bedingung (1) *genügt.*

Beweis. Nach dem Satz vom meßbaren Graphen (vgl. z.B. Christensen [5], Th. 2.1) ist $\Gamma_s \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ und damit $\pi(B \cap \Gamma_s) \in \mathfrak{A}$ für alle $B \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$, d.h., μ ist auf ganz $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ erklärt. Da Γ_s der Graph einer auf X definierten Funktion ist, gilt $\pi((A \times I) \cap \Gamma_s) = A$; also ist die Bedingung (1) erfüllt. Ist $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$, so ist die Folge $(\pi(B_i \cap \Gamma_s))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$. Wir erhalten

$$\mu(\bigcup B_i) = p(\pi(\bigcup B_i \cap \Gamma_s)) = p(\bigcup \pi(B_i \cap \Gamma_s)) = \sum p(\pi(B_i \cap \Gamma_s)) = \sum \mu(B_i),$$

d.h., μ ist ein Maß auf $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$. ||

In [1] beweist Aumann den folgenden Satz:

Selektionstheorem. *Sei $(X, \mathfrak{A}, p)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $B \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ mit $\pi B = X$, so existiert eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion $s\colon X \to I$ mit $(x, s(x)) \in B$ für p-fast alle $x \in X$.*

Das Marginalproblem aus Satz B in [4] läßt sich nun allgemein für beliebige Mengen der Produkt-σ-Algebra lösen:

Satz 1. *Sei $(X, \mathfrak{A}, p)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ mit $p(\pi C) = 1$, so existiert ein Maß μ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$, das den Bedingungen* (1) *und* (2) *genügt.*

Beweis. Bezeichnet $\pi C \cap \mathfrak{A}$ die Spur von $\mathfrak{A}$ auf πC, so existiert nach dem Selektionstheorem eine $\pi C \cap \mathfrak{A}$-meßbare Funktion $s'\colon \pi C \to I$ mit $(x, s'(x)) \in C$ für

p-fast alle $x \in \pi C$. Wegen der Vollständigkeit von p existiert dann auch eine $\pi C \cap \mathfrak{A}$-meßbare Funktion s'': $\pi C \to I$ mit $(x, s''(x)) \in C$ für alle $x \in \pi C$. Sei s: $X \to I$ definiert durch

$$s(x) = \begin{cases} s''(x) & \text{für } x \in \pi C \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $p(\pi C) = 1$ ist s eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion, und nach dem Hilfssatz ist durch $\mu(B) = p(\pi(B \cap \Gamma_s))$ ein Maß μ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ erklärt, das der Bedingung (1) genügt. Wegen $\pi(C \cap \Gamma_s) = \pi C$ und $p(\pi C) = 1$ genügt dieses Maß auch der Bedingung (2). ||

2. Existenz einer Maßfortsetzung

Kehren wir zurück zum eingangs gestellten Problem, eine Funktion f: $X \to I$ durch eine Fortsetzung des Maßes p meßbar zu machen. Wir bezeichnen das innere Maß zu p mit p_*.

Beginnen wir mit der in [3] angegebenen

Definition. Eine Menge $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ heißt *A-Approximation* des Graphen Γ_f, falls eine Folge $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ existiert, sodaß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\bigcup C_i \setminus \Gamma_f \supset C \setminus \Gamma_f \tag{A 1}$$

$$p_*(\pi(C_i \setminus \Gamma_f)) = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \tag{A 2}$$

$$p(\pi C) = 1. \tag{A 3}$$

Als Verallgemeinerung des Fortsetzungssatzes in [4] erhalten wir:

Satz 2. *Sei $(X, \mathfrak{A}, p)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Ist f: $X \to I$ eine Funktion, deren Graph eine A-Approximation besitzt, so existiert eine Maßfortsetzung von p, die f meßbar macht.*

Beweis. Sei $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$ eine A-Approximation des Graphen Γ_f, dann gilt insbesondere $p(\pi C) = 1$. Nach Satz 1 existiert dann ein Maß μ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{B}(I)$, das den Bedingungen (1) und (2) genügt. Mit Hilfe der Sätze 3A und 3D in [3] erhalten wir daraus die Behauptung. ||

Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Sätze 1 und 2 richtig bleiben, wenn statt des meßbaren Raumes $(I, \mathscr{B}(I))$ ein beliebiger abzählbar separierter Blackwell-Raum (im Sinne von [5]) gewählt wird. Denn sowohl der Projektions-Satz von Bierlein als auch das Aumannsche Selektionstheorem können dahingehend verallgemeinert werden, daß $(I, \mathscr{B}(I))$ durch einen abzählbar separierten Blackwell-Raum ersetzt wird. Dies geschieht in [8] (vgl. Th. 4 bzw. Th. 3). Ebenso läßt sich der beim Beweis unseres Hilfssatzes zitierte Satz vom meßbaren Graphen (Th. 2.1 in [5]) auch auf Funktionen mit Werten in abzählbar separierten Blackwell-Räumen anwenden. Außerdem können die aus [3] zitierten Sätze 3A und 3D sowie deren Beweise wörtlich auf diesen allgemeineren Fall übertragen werden.

Literatur

1. Aumann, R. J.: Measurable utility and measurable choice theorem. Proc. Coll. Intern. C.N.R.S. „La Décision“, Aix-en-Provence, 15–26 (1967)
2. Bierlein, D.: Der Graph meßbarer Funktionen mit abstraktem Definitionsbereich. Math. Z. **76**, 468–471 (1961)
3. Bierlein, D.: Über die Fortsetzung von Wahrscheinlichkeitsfeldern. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **1**, 28–46 (1962)
4. Bierlein, D.: Die Konstruktion eines Maßes .... Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **1**, 126–140 (1962)
5. Christensen, J. P. R.: Topology and Borel Structure. North-Holland Mathematics Studies **10**. Amsterdam: North-Holland 1974
6. Landers, D., Rogge, L.: On the extension problem for measures. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **30**, 167–169 (1974)
7. Lubin, A.: Extensions of measures and the von Neumann selection theorem. Proc. Amer. Math. Soc. **43**, 118–122 (1974)
8. Sainte-Beuve, M.-F.: On the extension of von Neumann-Aumann's theorem. J. Functional Analysis **17**, 112–129 (1974)
9. Yershov, M. P.: Extension of measures. Stochastic equations. Lecture Notes in Mathematics **330**, 516–526. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
10. Yershov (Ershov), M. P.: Extension of measures and stochastic equations. Theor. Probability Appl. **19**, 431–444 (1974)

Eingegangen am 20. Januar 1976