Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
36, 179–188 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Maße auf unscharfen Mengen

Ulrich Höhle

Gesamthochschule Wuppertal, Fachbereich Mathematik, Hofkamp 82–84, D-5600 Wuppertal 1, Bundesrepublik Deutschland

Ausgehend von dem Begriff der unscharfen Menge (J.A. Goguen Zbl. **145**, 244) wird eine Maß- und Integrationstheorie auf unscharfen Mengen so formuliert, daß sie, wie Satz 2 und Beispiel 2 zeigen, die von L.A. Zadeh entwickelte Theorie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf unscharfen Ereignissen (Zbl. **174**, 490) umfaßt. Satz 3 garantiert die Positivität und Linearität des Integrals von unscharfen Funktionen. Im Spezialfall $G = \{0, 1\}$ erhält man die übliche Theorie finiter, reellwertiger Maße.

§ 1. Einleitung

Das von Zadeh 1965 entwickelte Konzept von unscharfen Mengen, das zunächst durch Probleme aus den Anwendungen motiviert wurde, fand in den folgenden Jahren Eingang in unterschiedlichste Bereiche. 1968 erweiterte Chang [1] unter Verwendung von unscharfen Mengen topologische Räume zu unscharfen topologischen Räumen. In Analogie hierzu strebt die vorliegende Arbeit eine Verallgemeinerung von Maßräumen zu unscharfen Maßräumen an, die einerseits an der Einbeziehung der von Zadeh [16] entwickelten Theorie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf unscharfen Ereignissen orientiert, andererseits an einem brauchbaren Integralbegriff für unscharfe Funktionen interessiert ist. Dabei kommt Satz 2 hinsichtlich der Einordnung der Zadehschen Theorie eine Schlüsselposition zu. Satz 3 zeigt, daß die Struktur des unscharfen Maßraumes so angelegt ist, daß bei geeignet gewählten algebraischen und verbandstheoretischen Operationen ein positives, lineares Integral von unscharfen Funktionen definiert werden kann.

Zunächst erinnern wir an einige Definitionen und Notationen: Es sei stets $(G, \wedge, \vee)$ eine reguläre[1] Boolesche Algebra, $\leqq$ die durch die Verbandsoperationen auf G induzierte Halbordnung und L eine beliebige, nicht leere Menge. Nach

[1] Das heißt vollständige B.A. von abzählbarem Typus, in der das Diagonalprinzip gilt (vgl. [12])

Goguen [2] heißt jedes Element $f \in G^L$ eine *G-unscharfe Menge in L* und jedes Element $\psi \in G^{L \times L}$ mit den Eigenschaften:

$$l_1 \in L_1: \bigvee \{\psi(l_1, l_2) \mid l_2 \in L_2\} = \mathbb{1} \tag{1.1}$$

$$l_1 \in L_1;\ l_2, l_2' \in L_2 \wedge l_2 \neq l_2': \psi(l_1, l_2) \wedge \psi(l_1, l_2') = \mathbb{0}^2 \tag{1.2}$$

eine *G-unscharfe Abbildung*[3] von der (gewöhnlichen) Menge L_1 in die (gewöhnliche) Menge L_2. Das *Urbild einer G-unscharfen Menge f in L_2 unter einer G-unscharfen Abbildung* $\psi: L_1 \to L_2$ ist eine G-unscharfe Menge $\psi^{-1}(f)$ in L_1, die durch

$$l_1 \in L_1: \psi^{-1}(f)(l_1) = \bigvee \{\psi(l_1, l_2) \wedge f(l_2) \mid l_2 \in L_2\} \tag{1.3}$$

festgelegt ist. Schließlich erhält G^L die Struktur einer vollständigen Booleschen Algebra, wenn wir die durch $\leqq$ mittels

$$f_1, f_2 \in G^L: f_1 \preccurlyeq f_2 \Leftrightarrow \forall\, l \in L: f_1(l) \leqq f_2(l) \tag{1.4}$$

auf G^L induzierte Halbordnung $\preccurlyeq$ betrachten.

§ 2. *G*-unscharfe Maßräume

Definition 1. (a) Unter einem G-unscharfen Meßraum auf L verstehen wir ein Paar $(L, \mathfrak{M})$, wobei $\mathfrak{M}$ eine σ-vollständige Boolesche Unteralgebra von G^L ist.

(b) Es seien $(L_1, \mathfrak{M}_1)$ und $(L_2, \mathfrak{M}_2)$ G-unscharfe Meßräume und ψ eine G-unscharfe Abbildung von L_1 nach L_2. ψ heißt $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$-meßbar, wenn für jedes $f \in \mathfrak{M}_2$ $\psi^{-1}(f) \in \mathfrak{M}_1$ ist.

Bemerkung 1. Benutzen wir die durch (unscharfe) G-Relationen induzierte Komposition (vgl. Goguen [2], Zadeh [17], Kaufmann [7]) zwischen G-unscharfen Abbildungen, so konstituieren die G-unscharfen Meßräume in Verbindung mit den G-unscharfen, meßbaren Abbildungen als Morphismen eine Kategorie.

Beispiel 1. (a) Jedes $f \in G^L$ induziert eine G-unscharfe Abbildung κ_f von L in die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen durch

$$(l, r) \in L \times \mathbb{R}: \kappa_f(l, r) = \left\{ \begin{array}{r} f(l): r = 1 \\ \complement f(l): r = 0 \\ \mathbb{0}: r \neq 0, r \neq 1 \end{array} \right\},$$

und κ_f heißt die G-unscharfe, charakteristische Funktion von f. Ist $(L, \mathfrak{M})$ ein G-unscharfer Meßraum, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ das System der (gewöhnlichen) Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$, dann ist κ_f genau dann $(\mathfrak{M}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$-meßbar, wenn $f \in \mathfrak{M}$ ist.

(b) Es sei $\mathfrak{B}_X$ eine σ-perfekte[4] Mengen-σ-Algebra auf einer nicht leeren Menge X und $\mathfrak{H}(X, G)$ die Menge aller Booleschen σ-Homomorphismen $\alpha: \mathfrak{B}_X \to G$.

[2] $\mathbb{0}$ bzw. $\mathbb{1}$ bezeichnen das Null- bzw. Einselement in G

[3] (1.2) zusammen mit (1.1) ist eine geringfügige Änderung der von Goguen vorgeschlagenen Definition; vgl. [2], S. 162

[4] Sikorski [11], S. 98, S. 114

Jede Menge $B\in\mathfrak{B}_X$ definiert eine G-unscharfe Menge f_B in $\mathfrak{H}(X, G)$ in folgender Weise:

$$\alpha\in\mathfrak{H}(X, G): f_B(\alpha)=\alpha(B). \tag{2.1}$$

Dann ist $\mathfrak{K}(\mathfrak{B}_X)=\{f_B \mid B\in\mathfrak{B}_X\}$ eine σ-vollständige Boolesche Unteralgebra von $G^{\mathfrak{H}(X,G)}$ und $(\mathfrak{H}(X, G), \mathfrak{K}(\mathfrak{B}_X))$ ein G-unscharfer Meßraum. Identifizieren wir nun jedes $x\in X$ mit einem 2-wertigen σ-Homomorphismus $i(x)$: $\mathfrak{B}_X\to G$, so ist die injektive Abbildung i: $X\hookrightarrow\mathfrak{H}(X, G)$ $(\mathfrak{B}_X, \mathfrak{K}(\mathfrak{B}_X))$-meßbar.

Ist nun $X=\mathbb{R}$ und $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ das System der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}^4$, dann kann in Anlehnung an Olmsted [9] und Sikorski [10] (vgl. auch Kappos [5], S. 95) $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$ mit der Struktur eines bedingt vollständigen Vektorverbandes ausgestattet werden. Die algebraischen und verbandstheoretischen Operationen sind durch folgende Relationen erklärt:

$$\begin{aligned}
&r_0\in\mathbb{R},\ B(r_0)=]r_0, +\infty[,\ \alpha_1, \alpha_2\in\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G):\\
&(\alpha_1+\alpha_2)(B(r_0))=\bigvee\{\alpha_1(B(r'))\wedge\alpha_2(B(r''))\mid r'+r''=r_0\}\\
&(\alpha_1\wedge\alpha_2)(B(r_0))=\alpha_1(B(r_0))\wedge\alpha_2(B(r_0))\\
&x>0,\ \alpha\in\mathfrak{H}(\mathbb{R},G): (x\cdot\alpha)(B(r_0))=\alpha(B(r_0/x))\\
&x<0,\ \alpha\in\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G): (x\cdot\alpha)(B(r_0))=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\complement\alpha(B((r_0/x)-1/n)).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Offenbar fungiert der σ-Homomorphismus α_0, der durch

$$\alpha_0(B(r))=\begin{Bmatrix}\mathbb{1}: r<0\\ \mathbb{0}: r\geqq 0\end{Bmatrix}$$

festgelegt ist, als Nullvektor in $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$. Da in der regulären Booleschen Algebra G das Diagonalprinzip gilt, ist ebenfalls in $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$ das Diagonalprinzip erfüllt. Insbesondere ist also $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$ vom abzählbaren Typus (vgl. Kantorovič et al. [4]), schwach σ-distributiv und jede ordnungsfundamentale Folge in $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$ ist ordnungskonvergent (vgl. Vulikh [13], S. 335).

Wir definieren nun eine Maß- und Integrationstheorie im Kontext von G-unscharfen Mengen, die in engem Zusammenhang mit vektorverbandswertigen Maßen steht.

Definition 2. Es sei L eine beliebige, nicht leere Menge. (a) Eine auf einer Booleschen Unteralgebra $\mathfrak{A}$ von G^L definierte Abbildung m mit Werten in $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$ heißt ein (positives) endlich additives G-Maß auf $\mathfrak{A}$, wenn m die Eigenschaften

(m 1) $f\in\mathfrak{A}: m(f)\geqq\alpha_0$ (Nichtnegativität)

(m 2) $f_1, f_2\in\mathfrak{A},\ f_1\wedge f_2=\chi_\phi$[5]$: m(f_1\vee f_2)=m(f_1)+m(f_2)$ (Additivität)

besitzt.

---

5 $A\subseteq L: \chi_A(l)=\begin{Bmatrix}\mathbb{0}: l\notin A\\ \mathbb{1}: l\in A\end{Bmatrix}$

(b) Ist $(L, \mathfrak{M})$ ein G-unscharfer Meßraum und μ ein endlich additives G-Maß auf $\mathfrak{M}$, welches die Bedingung

$$\text{(m 3)} \quad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{\mathbb{N}}, \quad f_n \wedge f_m = \chi_\phi \ (n \neq m): \\ \mu\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mu(f_k)\Big) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

erfüllt, dann heißt μ ein σ-additives G-Maß auf $\mathfrak{M}$ und das Tripel $(L, \mathfrak{M}, \mu)$ ein G-unscharfer Maßraum.

Bemerkung 2. Im Falle einer $2^{\aleph_0}$-distributiven, regulären Booleschen Algebra G kann jedes σ-additive G-Maß μ auf $\mathfrak{M}$ mit einer G-unscharfen Abbildung ψ_μ von $\mathfrak{M}$ nach $\mathbb{R}$ identifiziert werden. Dabei besteht zwischen μ und ψ_μ die Beziehung:

$$(f, r) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{R}: \psi_\mu(f, r) = \mu(f)(\{r\}).$$

Betrachten wir insbesondere den Fall $G = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, so erhalten wir aus der in den obigen Definitionen niedergelegten Begriffsbildung die übliche Maßtheorie finiter, reellwertiger Maße.

Satz 1. *Es sei m ein endlich additives G-Maß auf einer σ-regulären Booleschen Unteralgebra $\mathfrak{A}$ von G^L, welches der Bedingung*

$$\text{(m 3')} \quad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}, \quad f_n \geqslant f_{n+1}, \quad \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n = \chi_\phi: \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} m(f_n) = \alpha_0$$

genügt. Dann kann m genau zu einem σ-additivrn G-Maß μ auf der kleinsten, σ-vollständigen Booleschen Unteralgebra $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ von G^L, die $\mathfrak{A}$ enthält, fortgesetzt werden.

Beweis. Nach Sikorski [11] existiert eine Mengen-σ-Algebra $\mathcal{F}$ und ein σ-Ideal Δ in $\mathcal{F}$, so daß $\mathcal{F}/\Delta$ σ-isomorph zu der Booleschen σ-Algebra $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ ist. Es sei daher j der kanonische σ-Homomorphismus von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{F}/\Delta$ und φ ein σ-Isomorphismus von $\mathcal{F}/\Delta$ nach $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$. Offenbar ist $\tilde{\mathfrak{A}} = (\varphi \circ j)^{-1}(\mathfrak{A})$ eine Mengenunteralgebra von $\mathcal{F}$, die Δ umfaßt, und die Einschränkung von $\varphi \circ j$ auf die von $\tilde{\mathfrak{A}}$ erzeugte Mengen-σ-Algebra $\tilde{\mathfrak{A}}^\infty$ ist eine surjektive Abbildung von $\tilde{\mathfrak{A}}^\infty$ auf $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$. Weiterhin induziert m ein endlich additives, $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$-wertiges Maß ν auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ durch

$$A \in \tilde{\mathfrak{A}}: \nu(A) = m(\varphi(j(A))).$$

Aufgrund von (m 3') ist ν ein Maß und kann, da $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$ schwach σ-distributiv ist, nach Wright [14] genau zu einem σ-additiven, $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$-wertigen Maß $\bar{\nu}$ auf $\tilde{\mathfrak{A}}^\infty$ fortgesetzt werden. Wir definieren nun eine Fortsetzung μ von m in folgender Weise:

$$f \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}): \mu(f) = \bar{\nu}(A), \quad \text{falls } (\varphi \circ j)(A) = f. \tag{2.3}$$

Beachten wir die Beziehung

$$A \in \Delta \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}: \bar{\nu}(A) = \nu(A) = m(\chi_\phi) = \alpha_0,$$

so ist μ durch (2.3) wohldefiniert, und wir erhalten aus $\bar{\nu}$ die gewünschten Eigenschaften von μ. Q.E.D.

Trägt die zugrundegelegte, reguläre Boolesche Algebra G ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dann kann jeder finite gewöhnliche Maßraum zu einem G-unscharfen Maßraum so erweitert werden, daß die von Zadeh [16] entwickelte Theorie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf unscharfen Ereignissen sich in die Theorie von G-unscharfen Maßräumen einordnen läßt. Wir bezeichnen daher mit $(\Omega, \mathfrak{G}, p)$ einen vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum, mit I_p das σ-Ideal aller p-Nullmengen in $\mathfrak{G}$ und mit j_0 den kanonischen σ-Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/I_p$. Dann ist $\hat{\mathfrak{G}}$ eine reguläre Boolesche Algebra, und durch $\hat{p} \circ j_0 = p$ wird auf $\hat{\mathfrak{G}}$ ein strikt positives Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{p}$ definiert. Ferner kann $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, \hat{\mathfrak{G}})$ bekanntlich mit dem Vektorverband $\mathfrak{Z}(\Omega)$ aller p-fast-überall auf Ω definierten Zufallsvariablen identifiziert werden (vgl. Kappos [5], S. 95, S. 161; Sikorski [11], § 43). Mit diesen Vereinbarungen formulieren wir den

Satz 2. *Es sei $(L, \mathscr{L}, \lambda)$ ein gewöhnlicher Maßraum auf L mit finitem Maß λ und $\mathfrak{A}_\lambda$ die Menge aller $\hat{\mathfrak{G}}$-unscharfen Mengen f in L mit der Eigenschaft:*

$$\operatorname{Card}(f(L)) < \aleph_0 \quad \text{und} \quad \forall A \in \hat{\mathfrak{G}}: f^{-1}(\{A\}) \in \mathscr{L}.$$

Dann existiert ein $\hat{\mathfrak{G}}$-unscharfer Maßraum $(L, \mathfrak{M}_\lambda, \mu_\lambda)$ auf L, so daß die Bedingungen

(i) *$\mathfrak{M}_\lambda$ ist die kleinste σ-vollständige Boolesche Unteralgebra von $\hat{\mathfrak{G}}^L$, die $\mathfrak{A}_\lambda$ umfaßt,*

(ii) $\forall f \in \mathfrak{M}_\lambda: \int\limits_\Omega \mu_\lambda(f)\, dp = \int\limits_L \hat{p} \circ f\, d\lambda$

erfüllt sind.

Beweis. (a) In Analogie zu (1.4) erklären wir auf $\mathfrak{G}^L$ eine Halbordnung $\subseteq$ durch

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathfrak{G}^L: \tilde{f}_1 \subseteq \tilde{f}_2 \Leftrightarrow \forall l \in L: \tilde{f}_1(l) \subseteq \tilde{f}_2(l),$$

und $\mathfrak{G}^L$ erhält damit die Struktur einer σ-vollständigen Booleschen Algebra. Ferner induziert jedes Element $\tilde{f} \in \mathfrak{G}^L$ eine Abbildung $\varphi_{\tilde{f}}$ von Ω in die Potenzmenge $\mathscr{P}(L)$ von L in folgender Weise:

$$\omega \in \Omega: \varphi_{\tilde{f}}(\omega) = \{l \in L \mid \omega \in \tilde{f}(l)\}.$$

Damit erhalten wir:

$$l \in L: \varphi_{\tilde{f}}^{-1}(\{A \in \mathscr{P}(L) \mid l \in A\}) = \tilde{f}(l), \tag{2.4}$$

$$\omega \in \Omega: \varphi_{\tilde{f} \cap \tilde{h}}(\omega) = \varphi_{\tilde{f}}(\omega) \cap \varphi_{\tilde{h}}(\omega), \tag{2.5}$$

$$\omega \in \Omega: \varphi_{\tilde{f} \cup \tilde{h}}(\omega) = \varphi_{\tilde{f}}(\omega) \cup \varphi_{\tilde{h}}(\omega), \tag{2.6}$$

$$\{\omega \in \Omega \mid \varphi_{\tilde{f}}(\omega) \neq \varphi_{\tilde{h}}(\omega)\} = \bigcup_{l \in L} (\tilde{f}(l) \,\Delta\, \tilde{h}(l)). \tag{2.7}$$

Ist nun $\tilde{\mathfrak{A}}_\lambda = \{\tilde{f} \in \mathfrak{G}^L \mid \operatorname{Card}(\tilde{f}(L)) < \aleph_0, \forall A \in \mathfrak{G}: \tilde{f}^{-1}(\{A\}) \in \mathscr{L}\}$, dann ist die Zuordnung $\tilde{f} \to j_0 \circ \tilde{f}$ eine surjektive Abbildung von $\tilde{\mathfrak{A}}_\lambda$ auf $\mathfrak{A}_\lambda$, und es gilt:

$$(\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{A}}_\lambda: \varphi_{\tilde{f}}(\Omega) \subseteq \mathscr{L}) \quad \text{und} \quad (A \in \mathscr{P}(L): \varphi_{\tilde{f}}^{-1}(\{A\}) \in \mathfrak{G}). \tag{2.8}$$

(b) Es sei mit $\hat{\mathfrak{X}}$ die zu $\mathfrak{X}$ gehörende p-fast-überall definierte Zufallsvariable bezeichnet. Die Beziehung (2.8) gestattet nun eine Abbildung m_λ von $\mathfrak{A}_\lambda$ nach $\mathfrak{Z}(\Omega)$ ($\hat{=} \mathfrak{H}(\mathbb{R}, \mathfrak{G})$) in folgender Weise zu erklären:

$$f \in \mathfrak{A}_\lambda: m_\lambda(f) = \widehat{\lambda \circ \varphi_{\tilde{f}}}, \text{ falls } \tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{A}}_\lambda \quad \text{und} \quad j_0 \circ \tilde{f} = f. \tag{2.9}$$

Die Formel (2.7) zeigt, daß m_λ durch (2.9) wohldefiniert ist. Ferner entnehmen wir aus (2.4)–(2.6) im Zusammenhang mit der endlichen Additivität von λ, daß m_λ ein endlich additives $\hat{\mathfrak{G}}$-Maß auf der Booleschen Unteralgebra $\mathfrak{A}_\lambda$ von $\hat{\mathfrak{G}}^L$ ist. Um m_λ zu einem σ-additiven $\hat{\mathfrak{G}}$-Maß auf der kleinsten, σ-vollständigen Booleschen Algebra $\mathfrak{M}_\lambda$, die $\mathfrak{A}_\lambda$ umfaßt, fortzusetzen, genügt es in Hinblick auf Satz 1 für m_λ die Bedingung (m 3') zu bestätigen. Wir bemerken zunächst, daß für jedes $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{A}}_\lambda$ aufgrund von (2.8) die Menge $\mathscr{C} = \{(\omega, l) \in \Omega \times L \mid l \in \varphi_{\tilde{f}}(\omega)\}$ ein Element der Produkt-σ-Mengenalgebra $\mathfrak{G} \times \mathscr{L}$ ist. Aus (2.4) in Verbindung mit dem Satz von Fubini erhalten wir:

$$\int_\Omega \lambda \circ \varphi_{\tilde{f}} \, dp = \int_{\Omega \times L} \chi_{\mathscr{C}} \, d(p \times \lambda) = \int_L p \circ \tilde{f} \, d\lambda = \int_L \hat{p} \circ (j_0 \circ \tilde{f}) \, d\lambda. \tag{2.10}$$

Ist nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathfrak{A}_\lambda$ mit $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n = \chi_\phi$ und $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\tilde{\mathfrak{A}}_\lambda$ mit $j_0 \circ \tilde{f}_n = f_n$, so folgt aus (2.10):

$$\int_\Omega \inf_{n \in \mathbb{N}} (\lambda \circ \varphi_{\tilde{f}_n}) \, dp = \int_L \inf_{n \in \mathbb{N}} (\hat{p} \circ f_n) \, d\lambda = 0;$$

m.a.W. es gilt: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} m_\lambda(f_n) = \hat{0} (\hat{=} \alpha_0)$.

(c) Es sei $\mathbb{F} = \{f \in \hat{\mathfrak{G}}^L \mid \hat{p} \circ f \ \mathscr{L}\text{-meßbar}, \int_\Omega \mu_\lambda(f) \, dp = \int_L \hat{p} \circ f \, d\lambda\}$. Offenbar ist $\mathbb{F}$ bezüglich der in (1.4) niedergelegten Halbordnung eine σ-monotone Familie[6] in $\hat{\mathfrak{G}}^L$. Aufgrund von (2.9) und (2.10) umfaßt $\mathbb{F}$ die Boolesche Algebra $\mathfrak{A}_\lambda$ und damit auch $\mathfrak{M}_\lambda$. Daraus folgt (ii). Q.E.D.

Eine Anwendung von Satz 2 auf den Lebesgueschen Wahrscheinlichkeitsraum und der damit verbundenen Einordnung der Zadehschen Theorie erläutert das

Beispiel 2. Es sei ν das Lebesguesche Maß auf $[0, 1]$, $\mathscr{L}_\nu$ die Menge aller Lebesguesch meßbaren Teilmengen von $[0, 1]$, $\mathfrak{N}_\nu$ das σ-Ideal aller ν-Nullmengen in $\mathfrak{L}_\nu$ und j_ν der kanonische σ-Homomorphismus von $\mathfrak{L}_\nu$ auf $\hat{\mathfrak{L}}_\nu = \mathfrak{L}_\nu / \mathfrak{N}_\nu$. Dann gestattet die Beziehung

$$l \in L, \quad d \in [0, 1]^L: \Theta_d(l) = j_\nu([0, d(l)]) \tag{2.11}$$

jede im Sinne von Zadeh [15] unscharfe Menge d in L mit einer $\hat{\mathfrak{L}}_\nu$-unscharfen Menge Θ_d in L zu identifizieren. Insbesondere ist die Abbildung $\Theta: [0, 1]^L \to \hat{\mathfrak{L}}_\nu^L$, wenn wir die von Zadeh vorgeschlagene Halbordnung

$$d_1, d_2 \in [0, 1]^L: d_1 \preccurlyeq d_2 \Leftrightarrow \forall\, l \in L: d_1(l) \leqq d_2(l)$$

---

[6] $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}: f_n \preccurlyeq f_{n+1} \Rightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathbb{F}; \quad f_n \succcurlyeq f_{n+1} \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathbb{F}$

auf $[0,1]^L$ verwenden, ein injektiver σ-Verbandshomomorphismus. Ist nun $(L, \mathscr{L}_0, \lambda)$ ein weiterer Wahrscheinlichkeitsraum, dann existiert nach Satz 2 ein $\hat{\mathfrak{L}}_\nu$-unscharfer Maßraum $(L, \mathfrak{M}_\lambda, \mu_\lambda)$ der bezüglich ν und λ die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Aus (i) folgt zunächst, daß jede $\mathscr{L}_0$-meßbare Funktion $f \in [0,1]^L$ – d.h. jedes nach Zadeh [16] *unscharfe Ereignis* – aufgrund der in (2.11) festgelegten Darstellung als $\hat{\mathfrak{L}}_\nu$-unscharfe Menge mit einem Element aus $\mathfrak{M}_\lambda$ identifiziert werden kann. Unter Hinzunahme von (ii) erhalten wir:

$$P(f) = \int_L f\,d\lambda = \int_L \hat{\nu} \circ \Theta_f\,d\lambda = \int_{[0,1]} \mu_\lambda(\Theta_f)\,d\nu;$$

m.a.W.: das von Zadeh formulierte Wahrscheinlichkeitsmaß eines unscharfen Ereignisses stimmt mit dem Erwartungswert derjenigen ν-fast-überall definierten Zufallsvariable überein, die durch μ_λ dem unscharfen Ereignis zugeordnet wird.

§ 3. Das G-Integral G-unscharfer Funktionen

Es sei $(L, \mathfrak{M}, \mu)$ stets ein G-unscharfer Maßraum, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ das System der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{K}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ die im Beispiel 1 angegebene σ-vollständige Boolesche Unteralgebra von $G^{\mathfrak{H}(\mathbb{R},G)}$. Die Formel (2.1) zeigt, daß die Zuordnung $F: B \to f_B$ ein Boolescher σ-Isomorphismus von $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ auf $\mathfrak{K}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ ist. Ferner sei ψ eine *G-unscharfe Funktion*, d.h. eine G-unscharfe Abbildung von L nach $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$[7]. Ist ψ $(\mathfrak{M}, \mathfrak{K}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}))$-meßbar, dann definiert ψ aufgrund von (1.1) und (1.2) einen σ-Homomorphismus H_ψ von $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ nach $\mathfrak{M}$ durch

$$B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}: H_\psi(B) = \psi^{-1}(F(B)) = \psi^{-1}(f_B). \tag{3.1}$$

Das G-Integral von ψ bezüglich des σ-additiven G-Maßes μ wird nun als das verallgemeinerte, stochastische Integral des σ-Homomorphismus H_ψ formuliert. Dazu ist es erforderlich, analog zum Lebesgueschen Integral auch im Falle des von Kappos [6] definierten, verallgemeinerten, stochastischen Integrals eine Integration von σ-Homomorphismen in (abstrakten) Booleschen σ-Algebren auszuführen.

Nach Sikorski [11] (oder Loomis [8]) ist jede Boolesche σ-Algebra σ-repräsentierbar; insbesondere existiert also eine (gewöhnliche) Menge X, eine Mengen-σ-Algebra $\mathscr{F}$ aus Teilmengen von X und ein σ-Ideal I in $\mathscr{F}$, so daß $\mathfrak{M} \cong \mathscr{F}/I$. Mit h wird ein σ-Isomorphismus von $\mathscr{F}/I$ auf $\mathfrak{M}$ und mit j der kanonische σ-Homomorphismus von $\mathscr{F}$ auf $\mathscr{F}/I$ bezeichnet; wir erklären auf $\mathscr{F}$ ein $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$-wertiges σ-additives Maß μ_X durch

$$A \in \mathscr{F}: \mu_X(A) = \mu(h(j(A))). \tag{3.2}$$

Ferner kann nach Sikorski [11] jeder σ-Homomorphismus $H: \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{M}$ durch eine (gewöhnliche) Funktion $\varphi_H: X \to \mathbb{R}$ repräsentiert werden, und es gilt:

$$B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}: (h \circ j)(\varphi_H^{-1}(B)) = H(B). \tag{3.3}$$

7 Im Falle von $G = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ erhalten wir den üblichen Funktionsbegriff

Sind φ_H und $\tilde{\varphi}_H$ verschiedene, repräsentierende Funktionen von H, dann folgt aus (3.1), (3.2) und aus der σ-Additivität von μ_X:

$$\mu_X(\{x \in X \mid \varphi_H(x) \neq \tilde{\varphi}_H(x)\}) = \alpha_0. \tag{3.4}$$

Besitze nun ein σ-Homomorphismus $H: \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{M}$ eine im Sinne von Kappos [6] μ_X-integrable, repräsentierende Funktion φ_H, so ist aufgrund von (3.4) das Element $\int H\, d\mu = \int_X \varphi_H\, d\mu_X$ durch H eindeutig festgelegt. Wir zeigen nun, daß $\int H\, d\mu$ auch von der für $\mathfrak{M}$ benutzten Repräsentation $(X, \mathscr{F}, I)$ unabhängig ist. Es sei daher $(X', \mathscr{F}', I')$ eine weitere Repräsentation von $\mathfrak{M}$ und φ'_H eine H repräsentierende, $(\mathscr{F}', \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$-meßbare Funktion von X' nach $\mathbb{R}$.

Behauptung. *Ist φ_H μ_X-integrabel, so ist auch φ'_H $\mu_{X'}$-integrabel, und es gilt:*

$$\int_X \varphi_H\, d\mu_X = \int_{X'} \varphi'_H\, d\mu_{X'}.$$

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{Z}_n = \{I_i^{(n)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Zerlegung von $\mathbb{R}$ in nicht leere, halboffene Intervalle

$$I_i^{(n)} = [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[\quad \text{mit } \sup\{|a_i^{(n)} - b_i^{(n)}| : i \in \mathbb{N}\} \leq 1/n.$$

Wir definieren meßbare Funktionen auf X bzw. X' in folgender Weise:

$$x \in X: \ \varphi_{\mathfrak{Z}_n}(x) = a_i^{(n)}, \quad \text{falls } x \in \varphi_H^{-1}(I_i^{(n)});$$
$$x' \in X': \ \varphi'_{\mathfrak{Z}_n}(x') = a_i^{(n)}, \quad \text{falls } x' \in \varphi_H'^{-1}(I_i^{(n)}).$$

Aus der Konstruktion der $\varphi_{\mathfrak{Z}_n}$ und der μ_X-Integrabilität von φ_H folgt, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i^{(n)} \cdot \mu_X(I_i^{(n)}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i^{(n)} \cdot \mu(H(I_i^{(n)}))$$

existiert. Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\varphi'_{\mathfrak{Z}_n}$ $\mu_{X'}$-integrabel, und die gleichmäßige Konvergenz der $\varphi'_{\mathfrak{Z}_n}$ gegen φ'_H impliziert die $\mu_{X'}$-Integrabilität von φ'_H. Aus der gleichmäßigen Kongenz der $\varphi_{\mathfrak{Z}_n}$ und $\varphi'_{\mathfrak{Z}_n}$ erhalten wir nun:

$$\int_X \varphi_H\, d\mu_X = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i^{(n)} \cdot \mu(H(I_i^{(n)}))\Big) = \int_{X'} \varphi'_H\, d\mu_{X'}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Die oben ausgeführten Überlegungen ermöglichen folgende

Definition 3. Es sei ψ eine $(\mathfrak{M}, \mathfrak{K}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}))$-meßbare, G-unscharfe Funktion. Besitzt H_ψ eine μ_X-integrable, repräsentierende (gewöhnliche) Funktion φ_{H_ψ}, so heißt ψ μ-integrabel, und unter dem G-Integral von ψ über L bezüglich μ verstehen wir ein Element $\alpha \in \mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$, das durch die Beziehung

$$\alpha = \int_L \psi\, d\mu = \int H_\psi\, d\mu = \int_X \varphi_{H_\psi}\, d\mu_X \tag{3.5}$$

festgelegt ist[8].

---

[8] Im Falle von $G = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ stimmt das G-Integral mit dem Lebesgueschen Integral reeller Funktionen überein

Auf der Menge $\mathbb{F}(L)$ aller G-unscharfen Abbildungen von L nach $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$ führen wir eine Vektorverbandsstruktur ein:

$$\begin{aligned}
&\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{F}(L); \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \\
&(\psi_1 + \psi_2)(l, \alpha) = \bigvee \{\psi_1(l, \alpha') \wedge \psi_2(l, \alpha'') \mid \alpha' + \alpha'' = \alpha\} \\
&(\psi_1 \wedge \psi_2)(l, \alpha) = \bigvee \{\psi_1(l, \alpha') \wedge \psi_2(l, \alpha'') \mid \alpha' \wedge \alpha'' = \alpha\} \\
&(r\psi)(l, \alpha) = \psi(l, (1/r) \cdot \alpha).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Aus (1.3), (2.1) und (2.2) erhalten wir folgende Beziehungen:

$$r, r', r'' \in \mathbb{Q}: (\psi_1 + \psi_2)^{-1}(f_{B(r)}) = \bigvee \{\psi_1^{-1}(f_{B(r')}) \wedge \psi_2^{-1}(f_{B(r'')}) \mid r' + r'' = r\}, \tag{3.7}$$

$$(\psi_1 \wedge \psi_2)^{-1}(f_{B(r)}) = \psi_1^{-1}(f_{B(r)}) \wedge \psi_2^{-1}(f_{B(r)}), \tag{3.8}$$

$$r_0 > 0: (r_0 \cdot \psi)^{-1}(f_{B(r)}) = \psi^{-1}(f_{B(r/r_0)}). \tag{3.9}$$

Aus (3.7)–(3.9) folgt, da die kleinste, σ-vollständige Boolesche Unteralgebra von $G^{\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)}$, die $\{f_{B(r)} \mid r \in \mathbb{Q}\}$ umfaßt, mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ übereinstimmt, daß unter den in (3.6) definierten, algebraischen und verbandstheoretischen Operationen die Menge $\mathbb{M}(L)$ aller $(\mathfrak{M}, \mathfrak{K}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}))$-meßbaren, G-unscharfen Funktionen ein Vektorverband ist. Im Falle von μ-integrierbaren, G-unscharfen Funktionen erhalten wir den

Satz 3. (a) *Die Menge $\mathbb{L}^1(L, \mathfrak{M}, \mu)$ aller $(\mathfrak{M}, \mathfrak{K}(\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}))$-meßbaren, μ-integrierbaren, G-unscharfen Funktionen bilden einen Teilvektorverband von $\mathbb{M}(L)$, und die Zuordnung $\psi \to \int_L \psi \, d\mu$ ist eine positive, lineare Abbildung von $\mathbb{L}^1(L, \mathfrak{M}, \mu)$ nach $\mathfrak{H}(\mathbb{R}, G)$.*

(b) $f \in \mathfrak{M}: \int_L \kappa_f \, d\mu = \mu(f)$.

Beweis. Zu (a). In Rückgriff auf die in [6] angegebenen Eigenschaften verallgemeinerter, stochastischer Integrale genügt es in Bezugnahme auf (3.5), die nachstehenden Beziehungen zu bestätigen:

$$(h \circ j)(\varphi_{H(\psi_1 + \psi_2)}^{-1}(B(r))) = (h \circ j)((\varphi_{H_{\psi_1}} + \varphi_{H_{\psi_2}})^{-1}(B(r))), \tag{3.10}$$

$$(h \circ j)(\varphi_{H(\psi_1 \wedge \psi_2)}^{-1}(B(r))) = (h \circ j)((\mathrm{Min}(\varphi_{H_{\psi_1}}, \varphi_{H_{\psi_2}}))^{-1}(B(r))), \tag{3.11}$$

$$(h \circ j)(\varphi_{H(r_0 \cdot \psi)}^{-1}(B(r))) = (h \circ j)((r_0 \cdot \varphi_{H_\psi})^{-1}(B(r))). \tag{3.12}$$

Wir beschränken uns darauf, hier nur (3.10) zu verifizieren. Der Nachweis von (3.11) und (3.12) verläuft dann entsprechend. Da $h \circ j$ ein σ-Homomorphismus ist, ziehen wir zur Beweisführung nur rationale r heran. Aus (3.1) und (3.3) erhalten wir in Verbindung mit (3.7):

$$\begin{aligned}
&(h \circ j)(\varphi_{H(\psi_1 + \psi_2)}^{-1}(B(r))) \\
&\quad = \bigvee \{\psi_1^{-1}(f_{B(r')}) \wedge \psi_2^{-1}(f_{B(r'')}) \mid r' + r'' = r\} \\
&\quad = (h \circ j)((\varphi_{H_{\psi_1}} + \varphi_{H_{\psi_2}})^{-1}(B(r))).
\end{aligned}$$

Zu (b): Ist $A \subseteq X$ mit $(h \circ j)(A) = f$, dann ist die charakteristische Funktion χ_A eine κ_f repräsentierende Funktion. Q.E.D.

Zusatz. Ist die zugrunde gelegte Boolesche Algebra σ-distributiv, dann ist der Vektorverband $\mathbb{F}(L)$ bedingt σ-vollständig. In diesem Falle erlaubt das G-Integral außerdem, Grenzwertsätze vom Typus „Beppo Levi" zu formulieren.

Literatur

1. Chang, C. L.: Fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl. **24**, 182–190 (1968)
2. Goguen, J. A.: L-Fuzzy sets. J. Math. Anal. Appl. **18**, 145–174 (1967)
3. Goguen, J. A.: The fuzzy Tychonoff Theorem. J. Math. Anal. Appl. **43**, 734–742 (1973)
4. Kantorovic, L. V., Vulih, B. Z., Pinsker, A. G.: Partially ordered groups and partially ordered spaces. Trans. Amer. Math. Soc., Ser.2, **27**, 51–124 (1963)
5. Kappos, D. A.: Probability algebras and stochastic spaces. New York, London: Academic Press 1969
6. Kappos, D. A.: Generalized stochastic Integral, Actes du Colloque International n° 186 sur "les Probabilités sur les Structures Algébriques". 1969, 223–232, C.N.R.S. (1970)
7. Kaufmann, A.: Introduction à la théorie des sousensembles flous. Paris: Masson 1973
8. Loomis, L. A.: On the representation of σ-complete Boolean algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 757–760 (1947)
9. Olmsted, J. M. H.: Lebesgue theory on a Boolean algebra. Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 164–193 (1942)
10. Sikorski, R.: The integral in a Boolean algebra. Colloq. Math. **2**, 20–26 (1949)
11. Sikorski, R.: Boolean Algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Bd. 25, 2. Edition, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1964
12. Vladimirov, D. A.: Boolesche Algebren. Berlin: Akademie-Verlag 1972
13. Vulikh, B. Z.: Introduction to the theory of partially ordered spaces. (Translation from the Russian) Groningen: Wolters-Noordhoff, Ltd. 1967
14. Wright, J. D. M.: The measure extension problem for vector lattices. Ann. Inst. Fourier **21**, 4, 65–85 (1971)
15. Zadeh, L. A.: Fuzzy sets. Information and Control **8**, 338–353 (1965)
16. Zadeh, L. A.: Probability measures of fuzzy events. J. Math. Anal. Appl. **23**, 421–427 (1968)
17. Zadeh, L. A.: Similarity relations and fuzzy orderings. Information Sci. 177–200 (1971)

Received April 24, 1975