Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 7, 17—28 (1967)

Rhythmische Abbildungen abelscher Gruppen II

PETER FLOR

Eingegangen am 6. Oktober 1966

In der vorliegenden Arbeit soll die in [*11*] begonnene Untersuchung rhythmischer Abbildungen fortgesetzt werden. Zunächst wird eine Charakterisierung der absolut rhythmischen Abbildungen mit den Mitteln der topologischen Dynamik gegeben (Satz 2). Sie beruht auf einem allgemeinen Satz der topologischen Dynamik (Satz 1). Anschließend werden fastautomorphe Funktionen untersucht. Sie wurden erst in jüngster Zeit von BOCHNER [*3*] definiert und von VEECH [*17*] sehr genau untersucht. Auf die Ergebnisse von VEECH gestützt kann ich die fastautomorphen Funktionen sehr einfach charakterisieren (Satz 3). Sodann werden einige Beziehungen zwischen der Theorie der rhythmischen und der der fastautomorphen Funktionen hergestellt. Zuletzt betrachte ich den Spezialfall der rekurrenten Folgen.

1. Ein Satz aus der topologischen Dynamik

Es sei (X, G, π) eine topologische Transformationsgruppe. Das bedeutet bekanntlich [*12*]: X ist ein topologischer Raum, der *Phasenraum*; G ist eine topologische Gruppe, *Phasengruppe* genannt; und π ist eine stetige Abbildung von $G \times X$ auf X, die folgenden Axiomen genügt:

$$\pi(e, x) = x \quad (e \text{ ist das Einheitselement in } G)$$
$$\pi(g, \pi(h, x)) = \pi(g h, x).$$

Jeder topologischen Transformationsgruppe (X, G, π) kann man den *Ellis*schen Abschluß $E = E_X(G)$ zuordnen [*7, 8, 9*]: $E_X(G)$ ist der im Produktraum X^X gebildete Abschluß der Menge der Funktionen $\pi(g, .)$, $g \in G$. E ist eine Halbgruppe unter Komposition, in der ein stetig-homomorphes Bild von G dicht liegt. In E ist jede Rechtsmultiplikation stetig; ebenso ist die Linksmultiplikation mit jedem Bild eines Elementes von G stetig.

Von nun an wird vorausgesetzt, daß X *kompakt* ist. Dann ist nach dem Satz von TYCHONOFF auch X^X und daher $E_X(G)$ kompakt.

Definition 1. Ist $x \in X$, so versteht man unter der *Bahnhülle* (engl. *orbit-closure*) $G(x)$ von x den topologischen Abschluß der Menge $\{\pi(g, x) \mid g \in G\}$ (die Bezeichnung $G(x)$ entnehmen wir [*15*]). Aus der Kompaktheit von X folgt leicht: $G(x) = \{\tau x \mid \tau \in E_X(G)\}$. $G(x)$ ist kompakt und unter G invariant.

Definition 2. $x \in X$ heißt *fastperiodisch,* wenn $x \in G(y)$ für jedes $y \in G(x)$; anders gesagt: wenn $G(x)$ minimal im System der abgeschlossenen nicht leeren G-invarianten Teilmengen von X ist (vgl. Definition 2 in [*8*]).

Lemma 1. *x ist dann und nur dann fastperiodisch, wenn*

$$(\forall \sigma \in E)\,(\exists \tau \in E)\,\tau \sigma x = x.$$

Lemma 2. *Ist $x \in X$ fastperiodisch, $\tau \in E$, so ist τx fastperiodisch.*

Lemma 1 und Lemma 2 folgen unmittelbar aus $G(x) = E \cdot x$.

Lemma 3. *Ist $x \in Y \subset X$, wobei Y G-invariant ist, so sind folgende Aussagen gleichbedeutend:*

$$\text{a)} \qquad \exists\, \sigma \in E_Y(G), \quad y = \sigma x,$$

$$\text{b)} \qquad \exists\, \tau \in E_X(G), \quad y = \tau x.$$

Denn sowohl a) wie b) sind gleichbedeutend mit $y \in G(x)$.

Definition 3. Seien zwei Transformationsgruppen (X, G, π) und (Y, G, ϱ) mit derselben Phasengruppe gegeben. Dann definieren wir die *Produktgruppe* $(X \times Y, G, \pi \times \varrho)$ durch $\pi \times \varrho(g, (x, y)) = (\pi(g, x), \varrho(g, y))$.

Lemma 4. *$E_{X\times X}(G) \cong E_X(G)$; genauer: jedes $\tau \in E_{X\times X}(G)$ hat die Gestalt $\tau(x, y) = (\sigma x, \sigma y)$ mit einem $\sigma \in E_X(G)$.*

Denn nach Definition von $E_{X\times X}(G)$ ist

$$\tau(x, y) = \lim_\nu \pi \times \pi(g_\nu, (x, y))$$

für ein geeignetes Netz $\{g_\nu\}$ in G. Also

$$\tau(x, y) = \lim_\nu (\pi(g_\nu, x), \pi(g_\nu, y)) = (\lim_\nu \pi(g_\nu, x), \lim_\nu \pi(g_\nu, y)) = (\sigma x, \sigma y)$$

mit

$$\sigma = \lim \pi(g_\nu, .) \in E_X(G).$$

Definition 4. $x \in X$ und $y \in X$ heißen *asymptotisch verbunden*[1], und wir schreiben $P(x, y)$, wenn es ein $\sigma \in E_X(G)$ mit $\sigma x = \sigma y$ gibt. Ist $x \in M \subset X$ und gilt $P(x, y)$, $y \in M$ nur für $y = x$, so heißt *x in M asymptotisch frei*. Ist jedes x in X asymptotisch frei, so heißt die Transformationsgruppe *distal*.

Satz 1. *Sei $Y \subset X$ abgeschlossen und invariant, seien alle Elemente von Y fastperiodisch und sei $x \in Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *x ist in $G(x)$ asymptotisch frei.*
2. *x ist in Y asymptotisch frei.*
3. *Für alle $y \in Y$ ist (x, y) fastperiodisch.*

Die Fastperiodizität in 3. bezieht sich natürlich auf die Transformationsgruppe $(X \times X, G, \pi \times \pi)$.

Beweis. Aus 1. *folgt* 3. Sei $\sigma \in E_X(G)$. Nach Lemma 1 ist zu zeigen: $\exists\, \varrho \in E_X(G)$ mit $\varrho\sigma x = x$ und $\varrho\sigma y = y$. ($\varrho, \sigma \in E_X(G)$ darf man zufolge Lemma 4 schreiben.) Ich setze $R = \{\tau \in E_X(G) \mid \tau\sigma y = y\}$. Da y fastperiodisch ist, ist R nicht leer. R ist kompakt, ebenso $R\sigma$ wegen der Stetigkeit der Rechtsmultiplikation in E. $R\sigma$ ist eine Halbgruppe ($\tau\sigma y = y$, $\tau'\sigma y = y \to \tau\sigma\tau'\sigma y = y$). Nach [7], Lemma 1 enthält $R\sigma$ ein Idempotent $\varrho\sigma$. Es gilt $\varrho\sigma\varrho\sigma = \varrho\sigma$, also $\varrho\sigma(\varrho\sigma x) = \varrho\sigma(x)$, daher $P(\varrho\sigma x, x)$. Wegen der Voraussetzung 1. muß $\varrho\sigma x = x$ sein. Da $\varrho\sigma$ in $R\sigma$ liegt, ist $\varrho\sigma y = y$.

Aus 3. *folgt* 2. Sei $y \in Y$ mit $P(x, y)$; genauer sei $\sigma x = \sigma y$, $\sigma \in E_Y(G)$. Nach Voraussetzung ist (x, y) fastperiodisch; nach Lemma 1 $\exists\, \tau \in E_Y(G)$ mit $\tau\sigma(x, y) = (x, y)$. Also $y = \tau\sigma y = \tau(\sigma y) = \tau(\sigma x) = \tau\sigma x = x$.

[1] „nonseparated“ in [12], „proximal“ in [9].

Aus 2. folgt 1. Sei $\sigma x = \sigma y$, $y \in G(x)$, $\sigma \in E_{G(x)}(G)$. Nach Lemma 3 $\exists\, \tau \in E_Y(G)$ mit $\tau x = \tau y$. Da x in Y asymptotisch frei ist, ist $x = y$.

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Die Voraussetzung, daß Y nur aus fastperiodischen Elementen besteht, kann natürlich nicht weggelassen werden. Ist beispielsweise X der Raum aller Folgen mit Werten in $[0, 1]$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, so ist jede konstante Folge x in $G(x)$ asymptotisch frei, denn für konstante Folgen ist $G(x) = \{x\}$; in X ist hingegen keine Folge asymptotisch frei, denn z.B. ist $\lim\limits_{n\to\infty}(x(n) - y(n)) = 0$ hinreichend für $P(x, y)$.

Man kann Satz 1 als lokale Version von ([*7*], Theorem 1) deuten, genauer gesagt jener Teilaussage von Theorem 1, wonach (X, G, π) dann und nur dann *distal* ist, wenn *jedes* Paar (x, y) fastperiodisch ist. Diese Aussage folgt unmittelbar aus unserem Satz 1. Durch transfinite Induktion kann man aus Satz 1 auch das volle Theorem 1 von Ellis herleiten. Natürlich beruht Satz 1 seinerseits ganz wesentlich auf dem fundamentalen Lemma 1 von Ellis über die Existenz von Idempotenten.

2. Absolut rhythmische Abbildungen

Von nun an soll die Gruppe G diskret sein. In [*11*] war zu sehen, daß die Topologie von G zu gewissen Schwierigkeiten führt, die, wie mir scheint, mit dem Wesen der Rhythmik wenig zu tun haben. Im vorliegenden Abschnitt soll außerdem G *kommutativ* sein. Doch behalten wir die multiplikative Schreibweise bei.

Wir betrachten Abbildungen von G in einen vollständigen uniformen Raum S. Eine solche Abbildung $f: G \to S$ möge *beschränkt* heißen, wenn $f(G)$ totalbeschränkt ist. Sei A der Raum aller beschränkten Abbildungen von G in S in der Topologie der punktweisen Konvergenz. Wir definieren eine Transformationsgruppe (A, G, π) durch

$$\pi(g, f) \cdot (x) = f(xg) \quad (f \in A,\ g \in G,\ x \in G)\,.$$

G operiert also auf A durch Translation. A ist zwar im allgemeinen nicht kompakt; gibt man aber in S eine feste abgeschlossene und totalbeschränkte, also kompakte Teilmenge M vor und betrachtet man alle Funktionen aus A, deren Werte in M liegen, so hat man eine kompakte invariante Teilmenge von A. Insbesondere ist in A jede Bahnhülle kompakt.

Definition 5. $f \in A$ heißt *rhythmisch*, wenn f in $(G(f), G, \pi)$ fastperiodisch ist.

Ich nehme hier als Definition, was in [*11*] unter gewissen Voraussetzungen als Satz erhalten wurde ([*11*], Satz 9). Diese Voraussetzungen sind erfüllt, wenn G diskret und S vollständig ist, wie in der vorliegenden Arbeit angenommen wurde.

Bei diskretem G fallen auch die Begriffe „rhythmisch“ und „gleichmäßig rhythmisch“ zusammen.

Wir erhalten daher aus den Definitionen 1 und 2 sowie den Lemmata 1 und 2 von [*11*] Charakterisierungen rhythmischer Abbildungen:

Lemma 5. *$f: G \to S$ ist dann und nur dann rhythmisch, wenn f beschränkt ist und eine beliebige der folgenden vier Bedingungen erfüllt:*

a) *zu jeder endlichen Teilmenge K von G und jedem ε aus einer Basis der Uniformität von S (wir schreiben dafür $\varepsilon \in \mathbf{S}$) gibt es eine relativ dichte Teilmenge T von G mit $(f(x), f(xt)) \in \varepsilon$ für alle $x \in K, t \in T$;*

b) *wenn für jedes endliche $K \subset G$, $\varepsilon \in \mathbf{S}$, $z \in G$ die Menge aller $y \in G$ mit $T(z)$ bezeichnet wird, für welche $(f(xz), f(xyz)) \in \varepsilon$ für alle $x \in K$ gilt, so ist (bei festem K und ε) das Mengensystem $\{T(z) \mid z \in G\}$ gleichmäßig relativ dicht;*

c) *zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{S}$ und jedem endlichen $K \subset G$ gibt es ein $\pi\colon G \to G$ mit endlicher Bildmenge und der Eigenschaft:*

$$(f(x), f(xy \cdot \pi(y))) \in \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad x \in K,\ y \in G;$$

d) *zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{S}$ und jedem endlichen $K \subset G$ gibt es ein $\pi\colon G \times G \to G$ mit endlicher Bildmenge und der Eigenschaft:*

$$(f(xz), f(xy \cdot \pi(y, z))) \in \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad x \in K, y \in G, z \in G\,.$$

($T \subset G$ heißt *relativ dicht*, wenn es ein endliches $K \subset G$ mit $KT = TK = G$ gibt — in dieser Form ist die Definition auch im nichtkommutativen Fall (§ 3) zu brauchen —; ein Mengensystem Σ heißt *gleichmäßig relativ dicht*, wenn es ein endliches $K \subset G$ mit $KT = G$ für alle $T \in \Sigma$ gibt.)

Ehe ich zum eigentlichen Thema des § 2 komme, will ich ein Beispiel für die Vorteile geben, die die Voraussetzung bietet, G sei diskret.

Korollar 1 *(starker Stetigkeitssatz). Ist $f\colon G \to S$ rhythmisch, $\varphi\colon f(G) \to S'$ stetig und beschränkt, so ist φf rhythmisch.*

Ist nämlich ein endliches $K \subset G$ und ein $\eta \in \mathbf{S}'$ gegeben, so gibt es ein ε mit $U_\varepsilon(f(x)) \subset \varphi^{-1} U_\eta(\varphi f(x))$ für alle $x \in K$. Ist daher $x \in K$, $(f(x), f(xt)) \in \varepsilon$, so ist $(\varphi f(x), \varphi f(xt)) \in \eta$. Nun wende man Lemma 5, a) an.

Die Bedeutung des Korollars liegt vor allem darin, daß φ weder gleichmäßig stetig noch auf dem Abschluß von $f(G)$ definiert zu sein braucht. Eine typische Anwendung des Korollars ergibt etwa: *ist T der eindimensionale Torus, ist die Mächtigkeit von G kleiner als $2^{\aleph_0}$ und ist $f\colon G \to T$ rhythmisch, so gibt es auf G eine reellwertige rhythmische Funktion φ mit $f \equiv \varphi$* mod 1. (Die entsprechende Aussage für fastperiodische Funktionen ist falsch; so ist die Folge $\{\alpha n\}$ für jedes reelle α fastperiodisch modulo Eins; ist α irrational, so gibt es keine zu $\{\alpha n\}$ mod 1 kongruente *reelle* fastperiodische Folge.)

Definition 6. $f\colon G \to S$ heißt *absolut rhythmisch*, wenn für jedes rhythmische $g\colon G \to S'$ das Paar (f, g) rhythmisch ist. Dabei ist S' ein beliebiger weiterer vollständiger uniformer Raum.

Satz 1 lehrt nun einerseits, daß es genügt, alle Funktionen aus $G(f)$ mit f zu paaren, um zu erkennen, ob f absolut rhythmisch ist, und erlaubt andererseits eine Charakterisierung der absolut rhythmischen Funktionen durch asymptotische Eigenschaften. Zur Formulierung dieser Ergebnisse führen wir noch folgende aus [*3*] und [*17*] stammende Bezeichnung ein: ist $\alpha = \{\alpha_\nu\}$ ein Netz von Elementen von G und ist $g(x) = \lim f(x\alpha_\nu)$ für alle $x \in G$, so schreiben wir

$$g = S_\alpha f\,.$$

(Man kann sich die S_α als Elemente von $E_{G(f)}(G)$ oder als Elemente der Stone-Čech-Kompaktifizierung von G denken.)

Die Anwendung von Satz 1 ergibt nun:

Satz 2. *Dafür, daß f absolut rhythmisch ist, ist jede der folgenden zwei Bedingungen notwendig und hinreichend:*

a) *für jedes $g \in G(f)$ ist (f, g) rhythmisch;*

b) *f ist beschränkt, und aus $S_\alpha S_\beta f = S_\alpha f$ folgt $S_\beta f = f$.*

3. Fastautomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt ist G eine beliebige, nicht notwendigerweise kommutative Gruppe.

Wir zitieren zunächst einige Definitionen und Sätze aus [*17*]. Während VEECH nur komplexwertige Funktionen betrachtet, wollen wir wieder Werte in einem beliebigen vollständigen uniformen Raum S zulassen. Die Beweise der uns interessierenden Sätze von VEECH lassen sich wörtlich auf den allgemeineren Fall übertragen.

Definition 1.2.1. Eine Funktion $f: G \to S$ heißt *rechts-fastautomorph,* wenn jedes Netz in G ein Teilnetz $\alpha = \{\alpha_\nu\}$ besitzt, für welches die Limites $g = S_\alpha f$ und $h = S_{\alpha^{-1}} g$ existieren und $h = f$ ist. ($\alpha^{-1} = \{\alpha_\nu^{-1}\}$; ebenso später $\alpha\beta = \{\alpha_\nu \beta_\nu\}$.) Entsprechend werden links-fastautomorphe Funktionen definiert.

Satz 1.2.1 (iv). Jede rechts-fastautomorphe Funktion ist beschränkt.

Lemma 1.3.1. Ist f rechts-fastautomorph und $S_\alpha f = g$, so ist bereits $S_{\alpha^{-1}} g = f$.

Satz 1.3.1. Jede links-fastautomorphe Funktion ist rechts-fastautomorph und umgekehrt.

Lemma 2.1.1. Sei f fastautomorph, $\varepsilon \in \mathbf{S}$, $N \subset G$ endlich. Dann ist die Menge

$$C_\varepsilon(N) = \{\tau \in G \,|\, (f(s\tau t), f(st)) \in \varepsilon \quad \text{für alle} \quad s \in N, t \in N\}$$

relativ dicht.

Korollar 2.1.2. Sei f fastautomorph, $\varepsilon \in \mathbf{S}$, $N \subset G$ endlich, n eine natürliche Zahl. Dann existiert ein $\delta \in \mathbf{S}$ und ein endliches $M \subset G$ mit folgender Eigenschaft: sind $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in C_\delta(M)$, so liegen alle Produkte

$$\tau_1^{e_1} \tau_2^{e_2} \ldots \tau_n^{e_n} (e_i = 0 \text{ oder } \pm 1) \quad \text{in} \quad C_\varepsilon(N).$$

Satz 2.2.1 (zusammen mit Definition 2.1.2). $f: G \to S$ ist dann und nur dann fastautomorph, wenn f beschränkt ist und es zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{S}$ und jedem endlichen $N \subset G$ ein relativ dichtes $B_\varepsilon \subset C_\varepsilon(N)$ gibt, welches den Bedingungen $B_\varepsilon = B_\varepsilon^{-1}$, ${B_\varepsilon}^2 \subset C_{\varepsilon^2}(N)$ genügt.

Ich gebe nun eine einfache Kennzeichnung der fastautomorphen Funktionen an.

Satz 3. *Eine Funktion auf G ist dann und nur dann fastautomorph, wenn sie beschränkt und in der Bohr-Topologie von G stetig ist.*

Die Bohr-Topologie ist die von den fastperiodischen Funktionen induzierte schwache Topologie auf G. Zur Theorie der Bohr-Topologie vgl. [*1*] und [*6*].

Ich bezeichne die Bohr-Kompaktifizierung von G mit $\varrho: G \to \hat{G}$ und setze $\tilde{G} = \varrho(G)$. $\tilde{G}$ ist also zu G homomorph, totalbeschränkt und in $\hat{G}$ dicht.

Sei also f beschränkt und in der Bohr-Topologie stetig (d. h. $f\varrho^{-1}$ ist wohldefiniert — ϱ braucht nicht umkehrbar eindeutig zu sein — und stetig). Ferner sei ein Netz α in G gegeben. Nach einem eventuellen Übergang zu einem Teilnetz kann man voraussetzen, daß $\varrho(\alpha)$ in $\hat{G}$ konvergiert ($\hat{G}$ ist kompakt) und daß $S_\alpha f = g$ existiert (f ist beschränkt, also $G(f)$ kompakt). Sei $x \in G$, $\varepsilon \in \boldsymbol{S}$. Da $f\varrho^{-1}$ stetig ist, gibt es eine Einsumgebung U in $\tilde{G}$ mit $(f(x \cdot \varrho^{-1}(u)), f(x)) \in \varepsilon$ für jedes $u \in U$ und jeden Wert von $\varrho^{-1}(u)$. $\varrho(\alpha)$ konvergiert in $\hat{G}$, ist also ein Cauchy-Netz in $\tilde{G}$. Insbesondere gibt es ein ν_0 mit $\varrho(\alpha_\mu^{-1}\alpha_\nu) \in U$ für $\mu \geqq \nu_0, \nu \geqq \nu_0$. Für solche μ und ν ist folglich $(f(x\alpha_\mu^{-1}\alpha_\nu), f(x)) \in \varepsilon$. Nimmt man zuerst über ν, dann über μ den Grenzwert, so ergibt sich $(S_{\alpha^{-1}}S_\alpha f(x), f(x)) \in \varepsilon$. Das gilt für jedes ε und jedes $x \in G$; daher ist $S_{\alpha^{-1}}S_\alpha f = f$, also f fastautomorph.

Nun sei angenommen, daß f fastautomorph ist. f ist beschränkt (Satz 1.2.1 (iv) aus [*17*]). Es bleibt zu zeigen, daß $f\varrho^{-1}$ wohldefiniert und stetig ist. Zunächst skizziere ich den Beweis: auf G wird eine Topologie T_f eingeführt. G ist unter T_f eine sowohl rechts- wie links-totalbeschränkte topologische Gruppe; daraus folgt bekanntermaßen, daß die Rechts- und die Linksuniformität auf (G, T_f) zusammenfallen. Jede solche Topologie auf G ist nach [*1*], Theorem 1 schwächer als die Bohr-Topologie oder stimmt mit dieser überein. Wenn noch gezeigt wird, daß f in T_f stetig ist, folgt die Stetigkeit von f in der Bohr-Topologie.

T_f wird dadurch definiert, daß man die Mengen $C_\varepsilon(N)$, $\varepsilon \in \boldsymbol{S}$, $N \subset G$, N endlich, als Basis des Umgebungssystems der Einheit betrachtet. Nach ([*4*], p. 13) muß eine Filterbasis $\boldsymbol{U}$ in einer Gruppe folgenden Forderungen genügen, um Basis des Systems der Einsumgebungen einer topologischen Gruppe zu sein:

1. $(\forall U \in \boldsymbol{U})\,(\exists V \in \boldsymbol{U})\, V^2 \subset U$
2. $(\forall U \in \boldsymbol{U})\,(\exists V \in \boldsymbol{U})\, V^{-1} \subset U$
3. $(\forall U \in \boldsymbol{U})\,(\forall a \in G)\,(\exists V \in \boldsymbol{U})\, V \subset aUa^{-1}$.

Daß das System $\{C_\varepsilon(N)\}$ die Forderungen 1.) und 2.) erfüllt, folgt aus [*17*], Korollar 2.1.2 (mit $n = 2$). Was die Forderung 3.) betrifft, so seien N, ε und a gegeben. Ich setze $M = Na^{-1} \cup aN$ und behaupte: $C_\varepsilon(M) \subset aC_\varepsilon(N)a^{-1}$. Ist nämlich $\tau \in C_\varepsilon(M)$, $s \in N$, $t \in N$, so ist $f(s \cdot a^{-1}\tau a \cdot t) = f(p\tau q)$ mit $p = sa^{-1} \in M$, $q = at \in M$ und $f(pq) = f(sa^{-1}at) = f(st)$, daher

$$(f(sa^{-1}\tau at), f(st)) = (f(p\tau q), f(pq)) \in \varepsilon \quad \text{wegen} \quad \tau \in C_\varepsilon(M)\,,$$

also

$$a^{-1}\tau a \in C_\varepsilon(N)\,.$$

Somit ist durch T_f eine topologische Gruppe definiert. Da alle $C_\varepsilon(N)$ relativ dicht sind, ist G unter T_f totalbeschränkt.

Es bleibt zu zeigen, daß f unter T_f stetig ist. Es gelte $g_\nu \to g$ in T_f. Es gibt dann zu jedem $\varepsilon \in \boldsymbol{S}$ und zu $N = \{e, g\}$ ein $\nu(\varepsilon)$ mit $g^{-1}g_\nu \in C_\varepsilon(N)$ für $\nu \geqq \nu(\varepsilon)$.

Daraus folgt

$$(f(g \cdot g^{-1}g_\nu \cdot e), f(g \cdot e)) \in \varepsilon\,,$$

das ist

$$(f(g_\nu), f(g)) \in \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu(\varepsilon)\,.$$

Also ist f in T_f stetig, und Satz 3 ist bewiesen.

In dem Spezialfall $G = \boldsymbol{Z}$ (die Gruppe der ganzen Zahlen), S diskret sind die $\tilde{G}$-stetigen Funktionen genau die BIRKHOFF-Folgen (s. [*10*], 6.1). (f ist eine reelle Birkhoff-Folge, wenn $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{sgn} f_i$, wobei die f_i fastperiodische Folgen sind, die den Wert Null nicht annehmen, und die λ_i Konstante sind.) Satz 3 liefert uns somit, zusammen mit VEECHS Definition 1.2.1 und Satz 2.2.1, zwei Charakterisierungen der Birkhoff-Folgen.

Korollar 2. *$f: G \to S$ ist dann und nur dann fastautomorph, wenn $f = gh$, $G \xrightarrow{h} S' \xrightarrow{g} S$, wobei S' ein im allgemeinen nicht vollständiger uniformer Raum, h fastperiodisch und g stetig und beschränkt ist.*

Denn h ist bekanntlich genau dann fastperiodisch, wenn $h = h'\varrho$ mit einem gleichmäßig stetigen h'. Ist also $f = gh = gh'\varrho$, so ist f nach Satz 3 fastautomorph, da gh' stetig und beschränkt ist. Umgekehrt ist nach Satz 3 jedes fastautomorphe f in der Form $f = g\varrho$ zerlegbar, und ϱ ist fastperiodisch.

Ebenso beweist man

Korollar 3. *$f: G \to S$ ist dann und nur dann fastautomorph, wenn $f = gh$, $G \xrightarrow{h} G' \xrightarrow{g} S$, wobei G' eine totalbeschränkte topologische Gruppe, h ein stetiger Homomorphismus und g stetig und beschränkt ist.*

Wiederum ergibt sich eine bekannte Charakterisierung der fastperiodischen Funktionen, wenn man zusätzlich verlangt, daß g gleichmäßig stetig ist.

Herr VEECH hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß ein Beweis des „nur dann"-Teiles von Satz 3 (genauer gesagt: von Korollar 3) implizit in seiner Arbeit enthalten ist. In [*17*, § 3.3, erster Absatz] wird zu einer gegebenen fastautomorphen Funktion f ein Homomorphismus φ von G in eine kompakte Gruppe X_0 konstruiert, und man erkennt leicht, daß f sich mit $h = \varphi$ in der Weise zerlegen läßt, die im Korollar 3 angegeben ist. (Dabei spielt natürlich $\varphi(G)$ und nicht X_0 die Rolle von G'; ein g ist durch f und $h = \varphi$ eindeutig festgelegt.)

4. Fastautomorphie und Rhythmik

Nun sei G wieder kommutativ. In [*17*, § 3] hat VEECH eine Transformationsgruppe (X, G, L) eingeführt: dabei ist X ein Raum von Funktionen $\eta(s, t)$ auf $G \times G$, und für $\gamma \in G$ ist $L(\gamma, \eta)(s, t) = \eta(s\gamma, t)$. X ist dann $G(\xi)$, wobei $\xi(s, t) = f(st)$ ist. Da wir voraussetzen, daß G kommutativ ist, gilt für jedes $\eta \in X: \eta(s, t) = \eta(t, s) = \varphi(st)$ für eine geeignete Funktion φ auf G. Wir können dann VEECHS Raum X mit $G(f)$ und ξ mit f identifizieren.

Satz 4. *Jede fastautomorphe Funktion ist absolut rhythmisch.*

Zum Beweis benötige ich ein weiteres Resultat von VEECH, das im Beweis von [*17*, Lemma 3.2.2] vorkommt:

ist f fastautomorph und existiert $S_\alpha S_\beta f$, so gilt $S_{\alpha^{-1}\beta^{-1}} S_\alpha S_\beta f = f$.

Sei f fastautomorph. Infolge von Satz 2 wird Satz 4 bewiesen sein, wenn gezeigt ist: aus $S_\mu S_\nu f = S_\mu f$ folgt $S_\nu f = f$. Nach dem zitierten Ergebnis von VEECH ist zunächst (die Konvergenz läßt sich durch Übergang zu Teilnetzen aus Kompaktheitsgründen immer erreichen) mit $\alpha = \mu$, $\beta = \nu$:

$$S_{\mu^{-1}\nu^{-1}} S_\mu S_\nu f = f = S_{\mu^{-1}\nu^{-1}} S_\mu f .$$

Ferner

$$(\text{mit} \quad \alpha = \mu^{-1}\nu^{-1} = \nu^{-1}\mu^{-1}, \quad \beta = \mu):$$

$$S_\nu f = S_\nu S_{\mu^{-1}\nu^{-1}} S_\mu f = f,$$

wie zu beweisen war.

Die Klasse der fastautomorphen Funktionen umfaßt also die Klasse der fastperiodischen Funktionen und ist in der Klasse der absolut rhythmischen Funktionen enthalten. Dasselbe gilt, wenn man an Stelle der fastautomorphen die *distalen* Funktionen [*2, 16*] betrachtet. Doch stimmen die distalen Funktionen keineswegs mit den fastautomorphen überein; vielmehr gilt

Satz 5. *Jede Funktion, die zugleich fastautomorph und distal ist, ist fastperiodisch.*

Sei f distal und fastautomorph. Dann ist nach dem eben zitierten Satz von Veech

$$S_{\beta^{-1}\alpha^{-1}} S_\beta S_\alpha f = f.$$

Andrerseits ist nach Definition der Fastautomorphie

$$S_{\beta^{-1}\alpha^{-1}} S_{\alpha\beta} f = f.$$

Nun verwenden wir, daß f distal ist, was man so aussprechen kann: aus $S_\gamma S_\alpha f = S_\gamma S_\beta f$ folgt $S_\alpha f = S_\beta f$. Insbesondere erhalten wir durch „Kürzen" von $S_{\beta^{-1}\alpha^{-1}}$:

$$S_\beta S_\alpha f = S_{\alpha\beta} f = S_{\beta\alpha} f \qquad (\text{da } G \text{ kommutativ ist}).$$

Nach einem Satz von Bochner [*3*, Theorem 2], aus dem sich wohl die Theorie der fastautomorphen Funktionen entwickelt hat, ist $S_{\beta\alpha} f = S_\beta S_\alpha f$ kennzeichnend für Fastperiodizität. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Die Umkehrung von Satz 5 ist trivial, und wir haben somit wieder eine Kennzeichnung der Fastperiodizität erhalten. Zugleich ergibt sich, daß die Umkehrung von Satz 4 nicht zutrifft. Denn es sind Funktionen bekannt, die distal, aber nicht fastperiodisch sind. Jede solche Funktion ist absolut rhythmisch; nach Satz 5 kann sie nicht fastautomorph sein. Ein Beispiel einer absolut rhythmischen, weder distalen noch fastautomorphen Funktion gebe ich im Schlußabschnitt an.

Vorher sei noch eine weitere Betrachtung an [*17*, § 3] angeschlossen. Veech definiert dort eine binäre Relation $\sim$ in $G(f)$: $S_\alpha f \sim S_\beta f$ bedeutet, daß ein Netz γ mit $S_{\gamma^{-1}} S_\gamma S_\alpha f = S_\beta f$ existiert. Veech beweist, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Satz 6. *Ist f fastautomorph, so stimmen auf $G(f)$ die Relationen $\sim$ und P überein.*

Insbesondere ist in diesem Falle P eine Äquivalenzrelation. (Das trifft ja im allgemeinen nicht zu: siehe [*8*] und [*9*].)

Sei $S_\alpha f \sim S_\beta f$, genauer $S_{\gamma^{-1}} S_\gamma S_\alpha f = S_\beta f$. Dann ist

$$(S_\gamma S_{\gamma^{-1}} S_{\alpha^{-1}}) S_\alpha f = S_\gamma S_{\gamma^{-1}} (S_{\alpha^{-1}} S_\alpha f) = S_\gamma S_{\gamma^{-1}} f = f$$

und

$$(S_\gamma S_{\gamma^{-1}} S_{\alpha^{-1}}) S_\beta f = (S_\gamma S_{\gamma^{-1}} S_{\alpha^{-1}})(S_{\gamma^{-1}} S_\gamma S_\alpha) f = S_{\delta^{-1}} S_\delta f = f$$

mit $\delta_{\lambda\mu\nu} = \gamma_\lambda^{-1} \gamma_\mu \alpha_\nu$. Also $P(S_\alpha f, S_\beta f)$.

Sei andrerseits $P(S_\alpha f, S_\beta f)$, genauer $S_\gamma S_\alpha f = S_\gamma S_\beta f$. Dann ist

$$f = S_{\gamma^{-1}} S_{\alpha^{-1}} S_\gamma S_\alpha f = S_{\gamma^{-1}} S_{\alpha^{-1}} S_\gamma S_\beta f, \quad S_\alpha f = S_\alpha S_{\gamma^{-1}} S_{\alpha^{-1}} S_\gamma S_\beta f = S_{\delta^{-1}} S_\delta S_\beta f$$

mit

$$\delta_{\mu\nu} = \alpha_\mu^{-1}\gamma_\nu,$$

also

$$S_\beta f \sim S_\alpha f.$$

5. Rekurrente Folgen

Abschließend wenden wir uns jetzt dem speziellen Fall der *rekurrenten* Folgen zu — das sind rhythmische Funktionen auf der Gruppe $\boldsymbol{Z}$ der ganzen Zahlen mit Werten in einem diskreten Raum. Sehr ausführlich ist in der Literatur die rekurrente Folge von MORSE studiert worden. Sie kann so definiert werden: ist $n \geqq 0$, so sei $\sigma(n)$ die Ziffernsumme der dyadischen Entwicklung von n. Die MORSE-Folge μ ist dann für $n \geqq 0$ durch $\mu(n) = 0$ oder 1, $\mu(n) \equiv \sigma(n) \pmod 2$ definiert. Ist $n > 0$, so wird $\mu(-n) = \mu(n-1)$ gesetzt.

Es ist bekannt ([*12*], Theorem 12.56 (1)), daß es in $G(\mu)$ Folgen μ', ν und ν' mit der Eigenschaft gibt: die einzigen asymptotischen Verbindungen in $G(\mu)$ sind die Beziehungen $P(\mu, \mu')$, $P(\nu, \nu')$, $P(\mu, \nu')$, $P(\mu', \nu)$ und die daraus durch Translation hervorgehenden.

Wie leicht zu zeigen ist, hat für jedes rekurrente f die Menge $G(f)$ entweder eine endliche Mächtigkeit oder die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$. Im Falle $f = \mu$ sind also von den $2^{\aleph_0}$ Folgen aus $G(\mu)$ nur abzählbar viele, nämlich μ, μ', ν, ν' und ihre Bilder unter G, nicht absolut rhythmisch.

Satz 7. *Kein Element von $G(\mu)$ ist fastautomorph.*

Wie ich schon erwähnt habe, bedeutet das soviel wie: keine Folge aus $G(\mu)$ ist eine Birkhoff-Folge.

Ich bezeichne mit π die Folge $2\mu - 1$, also

$$\pi(n) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}, \quad \text{falls } \mu(n) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

Offenbar genügt es zu zeigen: kein Element von $G(\pi)$ ist Birkhoff-Folge.

Lemma 6. *Ist f fastperiodisch und $f(n)\pi(n) \geqq 0$ für alle n, so ist $f = 0$.*

Sei $2^b > a \geqq 0$, $f(a) \neq 0$. Sei U die Menge der $2^{-b-1}|f(a)|$-Verschiebungszahlen für f. Da f fastperiodisch ist, muß U relativ dicht sein; sei etwa $U + [0, 2^N - 1] = \boldsymbol{Z}$. Zu jedem $k \in \boldsymbol{Z}$ existiert also ein t mit $0 \leqq t < 2^N$ und $k + t \in U$. Nun möge k die Menge $\{2^n \mid n > N\}$ durchlaufen; für jedes solche n sei $2^n + t_n \in U$, $0 \leqq t_n < 2^N$. Für die unendlich vielen t_n stehen nur endlich viele Werte zur Verfügung; also gibt es Zahlen p und q mit $q > p > N$ und $t_p = t_q$. Nach Definition von U und t_n sind die Zahlen $2^b(2^p + t_p)$ und $2^b(2^q + t_q)$, als Summen von je 2^b Elementen von U, $\frac{|f(a)|}{2}$-Verschiebungszahlen für f; ihre Summe $2^b(2^p + 2^q + 2t_p)$ ist eine $|f(a)|$-Verschiebungszahl für f. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} f(a) &= \operatorname{sgn} f(a + 2^b(2^p + t_p)) = \operatorname{sgn} f(a + 2^b(2^q + t_p)) \\ &= \operatorname{sgn} f(a + 2^b(2^p + 2^q + 2t_p)) \neq 0. \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $f \cdot \pi \geqq 0$, $\pi(n) = \pm 1$ für alle n ist daher

$$\pi(a + 2^b(2^p + t_p)) = \pi(a + 2^b(2^p + 2^q + 2t_p)).$$

Das Entsprechende gilt für μ statt π, also modulo 2 auch für σ. Andrerseits ist $0 \leqq a < 2^b$, $t_p \leqq 2t_p < 2^{N+1} \leqq 2^p < 2^q$, daher

$$\sigma(a + 2^b(2^p + t_p)) = \sigma(a) + 1 + \sigma(t_p),$$
$$\sigma(a + 2^b(2^p + 2^q + 2t_p)) = \sigma(a) + 2 + \sigma(t_p).$$

Diese beiden Zahlen unterscheiden sich um Eins und sollen doch modulo 2 übereinstimmen. Wir sind bei einem Widerspruch angelangt. Die Voraussetzung $f(a) \neq 0$ ist also unmöglich, es ist $f(a) = 0$ für jedes $a \geqq 0$. Da f fastperiodisch ist, gilt dasselbe für alle a, und das Lemma ist bewiesen.

Wäre nun etwa $S_\alpha \pi$ eine Birkhoff-Folge, so müßte es, da π, und somit auch $S_\alpha \pi$, nur die Werte ± 1 annimmt, eine fastperiodische Folge f mit $S_\alpha \pi = \operatorname{sgn} f$ geben. (S. [*10*], Lemma 6.1.) π ist rhythmisch; also gibt es eine Folge β mit $\pi = S_\beta S_\alpha \pi = S_\beta \operatorname{sgn} f$; $\pi(n) = \lim \operatorname{sgn} f(n + \beta_\nu) = \operatorname{sgn} \lim f(n + \beta_\nu)$, falls dieser letzte Wert nicht Null ist. Insbesondere ist $\pi(n) S_\beta f(n) \geqq 0$ für alle n. Dem Lemma zufolge ist $S_\beta f = 0$. Da f fastperiodisch ist, ist $f = S_{\beta^{-1}} S_\beta f = 0$, während nach der Annahme f den Wert Null überhaupt nicht annimmt. $S_\alpha f$ ist also keine Birkhoff-Folge, d. h. nicht fastautomorph.

Satz 7 zeigt, daß es nicht zu jedem rekurrenten f ein fastautomorphes g in $G(f)$ gibt. Gibt es in $G(f)$ zumindest immer absolut rhythmische Funktionen? Ich weiß es nicht. (Die Frage läßt sich allgemeiner stellen: gibt es in jeder minimalen Transformationsgruppe mit kompaktem Phasenraum ein asymptotisch freies Element?)

Doch läßt sich eine ähnliche Frage positiv beantworten.

Definition 7 (Spezialfall von [*12*], Definition 10.21). f und g seien rekurrent. Wir sagen: f und g sind *positiv (negativ) asymptotisch gleich*, wenn es ein solches n_0 gibt, daß für alle $n \geqq n_0$ gilt: $f(n) = g(n)$ $(f(-n) = g(-n))$.

Satz 8. *Ist f rekurrent, so gibt es in $G(f)$ eine Folge g mit der Eigenschaft: ist h rekurrent, $h \neq g$, so sind g und h weder positiv noch negativ asymptotisch gleich.*

Zum Beweis führen wir den Hilfsbegriff des *Blocks* ein. Unter einem Block verstehen wir einen endlichen Vektor $B = (b_1, \ldots, b_n)$; ist f eine Folge, so sagen wir: *der Block B kommt in f vor*, wenn es eine Zahl p gibt mit $f(p + i) = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Offensichtlich kommt jeder Block, der in irgendeiner Folge aus $G(f)$ auftritt, auch in f vor; ist f rekurrent, so gilt auch das Umgekehrte.

Lemma 7. *Ist f rekurrent, so gibt es für jeden Block B, der in f auftritt, einen ebenfalls in f vorkommenden Block B', dem immer, wenn er in f auftritt, B unmittelbar folgt. Kurz gesagt: B' erzwingt die rechte Fortsetzung B.*

Beweis des Lemmas. Sei der Block B in f etwa durch den Abschnitt $(f(-p), f(-p + 1), \ldots, f(-1))$ vertreten. Wir zerlegen die Folge f in Abschnitte der Länge p und erhalten so eine Folge

$$\{\ldots, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots\}$$

mit $B_k = (f(kp), f(kp + 1), \ldots, f(kp + p - 1))$ und $B_{-1} = B$.

Es ist bekannt ([*12*], Theorem 4.04), daß die Folge der B_i wieder rekurrent ist. (Das ist gleichbedeutend mit der Feststellung, daß f unter der Untergruppe $p\boldsymbol{Z}$ von $\boldsymbol{Z}$ rekurrent ist.)

Nun betrachten wir die Gesamtheit aller Folgen $h \in G(f)$, die der Bedingung: $h(n) = f(n)$ für alle $n < 0$ genügen. Jede Folge h zerlegen wir, wie oben f, in

p-Blöcke; dabei ergibt sich etwa $\{\ldots B_{-2}, B_{-1}, H_0, H_1, H_2, \ldots\}$. Die Menge aller H_i, die in den h vorkommen, ist endlich, denn jedes H_i ist ein p-Block, der in f vorkommt. Wir bezeichnen die verschiedenen H_i in irgendeiner Reihenfolge mit C_1, $C_2, \ldots, C_s$; dabei sei $C_s = B_{-1}$ gewählt. (Jedes B_i ist ein H_j, denn f ist ein h, und wegen der erwähnten Rekurrenz der Folge $\{B_i\}$ kommt B_{-1} unter den B_i mit $i \geqq 0$ vor.) Wir bilden rekursiv eine Folge $\{\ldots B_{-2}, B_{-1}, K_0, K_1, K_2, \ldots\}$. Sind K_0, $K_1, \ldots, K_{i-1}$ schon gewählt, dann sei K_i unter den C_k, die in allen nur möglichen Fortsetzungen von $\{\ldots B_{-2}, B_{-1}, K_0, \ldots, K_{i-1}\}$ unmittelbar anschließen, *dasjenige mit dem kleinsten Index*. Dadurch ist eine Folge $\{\ldots B_{-2}, B_{-1}, K_0, K_1, \ldots\}$ eindeutig festgelegt. Ihr entspricht eine Folge k mit

$$(k(pn), k(pn+1), \ldots, k(pn+p-1)) = \begin{cases} K_n & n \geqq 0 \\ B_n & n < 0 \,. \end{cases}$$

Da jeder rechts abbrechende Abschnitt von k in $G(f)$ fortsetzbar ist, ist k Limes von Folgen aus $G(f)$ und gehört daher selbst zu $G(f)$. k ist also rekurrent, nach einer früheren Bemerkung somit auch $\{\ldots B_{-2}, B_{-1}, K_0, K_1, \ldots\}$. Insbesondere tritt $C_s = B$ unter den K_i auf, da $B_{-1} = B$ ist. Nach Konstruktion der K_i bedeutet das, daß an der betreffenden Stelle kein anderer p-Block stehen kann; die rechte Fortsetzung B ist dort *erzwungen.*

Zwar haben wir bisher nur gesehen, daß B als rechte Fortsetzung von einer nach links unendlichen Folge erzwungen wird. Aus der Kompaktheit von $G(f)$ folgt aber, daß eine linke Halbfolge selbst mehrere verschiedene rechte Fortsetzungen der Länge p hat, wenn jedem ihrer endlichen Teilblöcke diese Eigenschaft zukommt. Folglich wird B als rechte Fortsetzung schon von einem endlichen Teilblock der konstruierten nach links unendlichen Folge erzwungen. Damit ist Lemma 7 bewiesen.

Natürlich kann man aus Symmetriegründen in Lemma 7 die Worte „folgt" und „rechte Fortsetzung" durch „vorausgeht" und „linke Fortsetzung" ersetzen.

Nun zum Beweis von Satz 8. Ich beginne mit einem beliebigen endlichen Abschnitt

$$M_0\,,$$

der in f vorkommt. Sei M_{-1} ein Block, der die rechte Fortsetzung M_0 erzwingt, und M_1 ein Block, der die linke Fortsetzung $M_{-1} M_0$ erzwingt. Wir haben nun den Block

$$M_{-1} M_0 M_1;$$

die Lage (Indizierung) von M_0 soll dabei festgehalten werden. Auf den Block $M_{-1} M_0 M_1$ wenden wir nun dasselbe Verfahren neuerlich an. Durch Iteration erhalten wir eine Folge

$$g = \{\ldots M_{-n} \ldots M_{-2} M_{-1} M_0 M_1 M_2 \ldots M_n \ldots\}$$

mit der Eigenschaft:

M_{-n} *erzwingt die rechte Fortsetzung* $M_{-n+1} M_{-n+2} \ldots M_0 \ldots M_{n-1}$,

M_n *erzwingt die linke Fortsetzung* $M_{-n} M_{-n+1} \ldots M_{n-1}$.

Wie früher für k beweist man $g \in G(f)$. Dieses g hat nun die in Satz 8 postulierte Eigenschaft: g ist in $G(f)$ durch jede linke Halbfolge und durch jede rechte Halbfolge eindeutig festgelegt. Ist h rekurrent, aber nicht in $G(f)$, so kann trivialerweise zwischen h und g nicht asymptotische Gleichheit, ja nicht einmal asymptotische Verbindung bestehen.

Daß man mit Satz 8 zumindest in die Nähe des Begriffs „absolut rhythmisch" kommt, zeigt folgendes Ergebnis, dessen Beweis durch direkte Konstruktion sehr leicht ist:

Satz 9. *Ist f rekurrent und nicht distal, so gibt es in $G(f)$ zwei Folgen g und h, die voneinander verschieden, aber positiv asymptotisch gleich sind.*

Wesentlich tiefer liegt die Tatsache, daß man hier „nicht distal" durch „nicht periodisch" ersetzen kann, weil nämlich jede distale rekurrente Folge periodisch ist. Dies folgt aus [7, theorem 2]; ein elementarer Beweis wird in der Dissertation von W. HENHAPL geführt (Wien 1966; s. [14], p. 165–166).

Literatur

[1] ALFSEN, E. M., and P. HOLM: A note on compact representations and almost periodicity in topological groups. Math. Scandinav. **10**, 127–136 (1962).

[2] AUSLANDER, L., and F. HAHN: Real functions coming from flows on compact spaces and concepts of almost periodicity. Trans. Amer. math. Soc. **106**, 415–426 (1963).

[3] BOCHNER, S.: A new approach to almost periodicity. Proc. nat. Acad. Sci. USA **48**, 2039–2043 (1963).

[4] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique, fasc. III, 3ème ed. Paris: Hermann 1960.

[5] CORPUT, J. G. VAN DER: Diophantische Ungleichungen II. Rhythmische Systeme. Abschnitte A und B. Acta math. **59**, 209–328 (1932).

[6] DOLCHER, M.: Questioni topologiche collegate con la quasi-periodicità nel campo reale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **35**, 1–17 (1964).

[7] ELLIS, R.: Distal transformation groups. Pacific J. Math. **8**, 401–405 (1958).

[8] — A semigroup associated with a transformation group. Trans. Amer. math. Soc. **94**, 272–279 (1960).

[9] —, and W. H. GOTTSCHALK: Homomorphisms of transformation groups. Trans. Amer. math. Soc. **94**, 258–271 (1960).

[10] FLOR, P.: „Fastperiodische" Folgen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Monatsh. Math. **67**, 385–400 (1963).

[11] — Rhythmische Abbildungen abelscher Gruppen. Österreich. Akad. Wiss., math. naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II **174**, 117–138 (1966).

[12] GOTTSCHALK, W. H., and G. A. HEDLUND: Topological Dynamics. (AMS Colloquium Publications, vol. 36.) Providence, R. I.: Amer. math. Soc. 1955.

[13] HLAWKA, E.: Rhythmische Folgen auf kompakten Gruppen I. Österreich. Akad. Wiss., math. naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II **171**, 67–74 (1962).

[14] —, u. W. HENHAPL: Rhythmische Folgen auf kompakten Gruppen II. Österreich. Akad. Wiss., math. naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II **174**, 139–173 (1966).

[15] JACOBS, K.: Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie (Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgebiete, N. F. 29). Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[16] KNAPP, A. W.: Distal functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA **52**, 1409–1412 (1964).

[17] VEECH, W. A.: Almost automorphic functions on groups. Amer. J. Math. **87**, 719–751 (1965).

Mathematisches Institut der Universität
A 1090 Wien IX
Strudlhofgasse 4