Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 90—97 (1963)

Über die Ergodizität und r-Ergodizität stationärer Wahrscheinlichkeitsmaße

Von

JIŘÍ NEDOMA

Bei Untersuchungen von Eigenschaften der periodischen Informationsquellen und Übertragungskanäle der diskreten Informationstheorie braucht man die Relation zwischen zufälligen Folgen, die in bezug auf die Verschiebungstransformation T, und Folgen, die in bezug auf die „iterierte" Verschiebungstransformation T^r stationär und ergodisch sind.

In diesem Artikel sind einige Resultate, die diese Relation betreffen, enthalten.

Das Hauptresultat ist im Satz 1 formuliert.

Ich danke Herrn JACOBS und Herrn MANDL, welche die Arbeit durchgelesen und zu ihrer Verbesserung beigetragen haben.

Wir beginnen mit notwendigen Definitionen und Beziehungen.

Im ganzen Artikel bedeutet $(X, \mathbf{\Pi})$ einen fest gegebenen meßbaren Raum, d. h.: X ist eine nichtleere Menge und $\mathbf{\Pi}$ ein Borelkörper von Untermengen von X. Die Menge aller ganzen Zahlen werden wir mit I bezeichnen, N soll die Menge aller positiven Zahlen bedeuten. Weiter sei T eine ein-eindeutige samt ihrer Inversen meßbare Abbildung von X auf sich. Für jedes $n \in N$ ist T^n die n-mal iterierte Transformation T, also $T^n(x) = T^{n-1}(T(x))$ für jedes $x \in X$. T^0 ist die identische Abbildung: $T^0(x) = x$. Endlich sei $T^{-n} = (T^n)^{-1}$, also T^{-n} die zu T^n inverse Abbildung.

In dem ganzen Artikel werden wir über Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf dem Borelkörper $\mathbf{\Pi}$ definiert sind, sprechen, d. h. wir werden immer voraussetzen, daß die Menge X das Maß eins hat. Sei also ein Maß μ auf dem Borelkörper $\mathbf{\Pi}$ gegeben. Wir werden sagen, daß μ periodisch ist, wenn eine Zahl $r \in N$ existiert, so daß $\mu(E) = \mu(T^r(E))$ für jedes $E \in \mathbf{\Pi}$ gilt. Die Zahl r heißt dann eine Periode von μ. Offensichtlich sind dann auch die Zahlen nr, $n \in N$ Perioden desselben periodischen Maßes μ. Ist $r = 1$, so sprechen wir auch von einem stationären Maß μ.

Die Menge $E \in \mathbf{\Pi}$ heißt r-invariant, wenn $E = T^r(E)$ gilt. Wir werden sagen, daß die Menge $E \in \mathbf{\Pi}$ (r, μ)-unzerlegbar ist, wenn $E \in \mathbf{\Pi}$, $\mu(E) > 0$, $E = T^r(E)$, und wenn für jede r-invariante meßbare Untermenge $F \subset E$ gilt, daß aus $\mu(F) > 0$ folgt $\mu(F) = \mu(E)$. Offensichtlich ist jede r-invariante Menge positiven Maßes, welche eine Untermenge einer (r, μ)-unzerlegbaren Menge ist, auch (r, μ)-unzerlegbar. Das Maß μ ist r-ergodisch, wenn es periodisch mit der Periode r ist, und wenn die Menge X (r, μ)-unzerlegbar ist. Wenn $r = 1$, werden wir kurz von invarianten Mengen, μ-unzerlegbaren Mengen und ergodischen Maßen sprechen.

Wenn μ ein periodisches Maß mit der Periode r ist, setzen wir

$$\mu^{[r]} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \mu T^i,$$

das heißt:

$$\mu^{[r]}(E) = \frac{r}{1} \sum_{i=0}^{r-1} \mu(T^i(E)) \quad \text{für jedes} \quad E \in \mathbf{\Pi}.$$

Offenbar ist das Maß $\mu^{[r]}$ stationär. Weiter ist $\mu^{[r]}$ ergodisch, wenn μ ein r-ergodisches Maß ist (diese Behauptung kann man ebenso beweisen wie Theorem 7.1., Seite 732 der Arbeit [*3*]).

Jedem r-ergodischen Maß μ können wir also natürlicherweise das ergodische Maß $\mu^{[r]}$ zuordnen. Es entsteht die Frage, ob umgekehrt zu jedem ergodischen Maß μ für jedes $r \in N$ ein r-ergodisches Maß π auf $\mathbf{\Pi}$ existiert derart, daß $\mu = \pi^{[r]}$ gilt. Die Antwort ist positiv, und wir werden sie im Satz 1 formulieren und beweisen. Zuerst aber werden wir zwei Hilfslemmata beweisen.

Lemma 1. *Es sei μ stationär, und es gelte für eine Menge $E \in \mathbf{\Pi}$ und ein $l \in N$ die Beziehung $\mu(E) = \mu(E \cap T^l(E))$. Dann ist für jedes $k \in N$*

$$\mu\Big(\bigcap_{i=0}^{k} T^{il}(E)\Big) = \mu(E). \tag{1}$$

Beweis. Wenn $E_i \subset \mathbf{\Pi}$, $i = 1, 2, 3$; $E_1 \subset E_3$, $E_2 \subset E_3$ und $\mu(E_1) = \mu(E_2) = \mu(E_3)$ ist, dann ist auch $\mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_3)$. Jetzt kann man das Lemma durch vollständige Induktion beweisen: (1) gilt für $k = 1$, und aus der Voraussetzung, daß (1) für ein $k \in N$ gilt, bekommt man, daß es auch für $k + 1$ gilt, indem man $E_1 = \bigcap_{i=0}^{k} T^{il}(E)$, $E_2 = \bigcap_{i=1}^{k+1} T^{il}(E)$, $E_3 = \bigcap_{i=1}^{k} T^{il}(E)$ setzt. Dabei muß man die Stationarität von μ benützen.

Lemma 2. *Es sei μ ein ergodisches Maß und $r \in N$. Dann existiert eine Zahl $s \in N$, welche r teilt, und eine solche Menge $G \in \mathbf{\Pi}$, daß*

(a) $T^s(G) = G$,

(b) *G ist (r, μ)-unzerlegbar,*

(c) $T^i(G) \cap T^j(G) = \emptyset$ *für* $0 \leqq i < j < s$,

(d) $\mu(G) = 1/s$.

Bemerkung. *Im Beweis werden wir zeigen, daß* (c) *auch gilt, wenn* $i \neq j \pmod{s}$.

Beweis. Wenn das ergodische Maß zugleich r-ergodisch ist, dann gilt die Behauptung für $s = 1$ und $G = X$. Es sei also die Menge X nicht (r, μ)-unzerlegbar. Das bedeutet, daß die Menge

$$J = \{E : E \in \mathbf{\Pi},\ T^r(E) = E,\ 0 < \mu(E) < 1\}$$

nichtleer ist. Sie ist gegen finite Durchschnittsbildung abgeschlossen und enthält mit E auch $T(E)$. Für $E \in J$ ist $\bigcup_{i=0}^{r-1} T^i(E)$ gegenüber der Transformation T eine invariante Menge, für welche $\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{r-1} T^i(E)\Big) \geqq \mu(E) > 0$ gilt, und aus der Ergodizität des Maßes μ folgt also $\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{r-1} T^i(E)\Big) = 1$. Da $\mu(E) = \mu(T^i(E))$, so gilt $\sum_{i=0}^{r-1} \mu(T^i(E)) = r\,\mu(E) \geqq \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{r-1} T^i(E)\Big) = 1$, also

$$\mu(E) \geqq \frac{1}{r} \quad \text{für} \quad E \in J. \tag{2}$$

Es existiert eine Menge $F \in J$, so daß

(3) $$\mu(F) < \frac{1}{r} + \inf_{E \in J} \mu(E).$$

Eine solche Menge F ist (r, μ)-unzerlegbar. Nehmen wir nämlich an, es existierte eine Menge $E \subset F$ derart, daß $T^r(E) = E$, $0 < \mu(E) < \mu(F)$. Dann wäre $E \in J$ und $F - E \in J$. Da $\mu(E) \geqq \inf_{E \in J} \mu(E)$ und nach (2) $\mu(F - E) \geqq 1/r$, wäre also $\mu(F) = \mu(E) + \mu(E - F) \geqq \inf_{E \in J} \mu(E) + 1/r$, was ein Widerspruch zu (3) ist.

Nun werden wir beweisen, daß

(4) $$\mu(F \cap T(F)) = 0$$

gilt.

Wäre $\mu(F \cap T(F)) > 0$, dann folgte aus der (r, μ)-Unzerlegbarkeit der Menge F, daß $\mu(F \cap T(F)) = \mu(F)$ und nach Lemma 1 also $\mu(\bigcap_{i=0}^{r-1} T^i(F)) = \mu(F)$. Die Menge $\bigcap_{i=0}^{r-1} T^i(F)$ ist eine invariante Menge, und daher folgte aus der Ergodizität des Maßes μ, daß $\mu(\bigcup_{i=0}^{r-1} T^i(F)) = 1$. Aber dies ist ein Widerspruch zu $F \in J$, da hieraus $\mu(\bigcap_{i=0}^{r-1} T^i(F)) \leqq \mu(F) < 1$ folgte. Also gilt (4).

Bis zum Ende des Beweises soll s eine natürliche Zahl bezeichnen, für welche gilt:

(5) $$\mu(F \cap T^j(F)) = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, s - 1,$$

(6) $$\mu(F \cap T^s(F)) = \mu(F).$$

Aus (4) folgt, daß es eine derartige Zahl $s > 1$ gibt: Man wähle s derart, daß zum ersten Male $\mu(F \cap T^s(F)) > 0$ gilt und beachte, daß die Gleichung (6) aus der r-Invarianz der Menge $F \cap T^{is}(F)$ für $i \in N$ und aus der (r, μ)-Unzerlegbarkeit der Menge F folgt. Aus der r-Invarianz der Menge F folgt, daß $s \leqq r$.

Setzen wir nun $H = \bigcap_{i=0}^{r-1} T^{is}(F)$. Dann ist $H \subset F$. Wenn wir nun das Lemma 1 und die Beziehung (6) anwenden, erhalten wir sogleich, daß $\mu(H) = \mu(F) > 0$. Aus der r-Invarianz der Menge F folgt für $v \in I$ die vs-Invarianz der Menge H, d.h. $T^{vs}(H) = H$. Daher erhalten wir dann

(7) $$T^{vs+i}(H) = T^i(T^{vs}(H)) = T^i(H).$$

Wir bezeichnen jetzt das Komplement der Menge H mit dem Symbol H', also $H' = X - H$, und setzen

$$G = H - \bigcup_{l=1}^{s-1} T^l(H) = H \cap \bigcap_{l=1}^{s-1} T^l(H').$$

Dann ist $G \in \mathbf{\Pi}$. Wir werden beweisen, daß die Menge G die Beziehungen (a) bis (d) mit unserem s erfüllt. Den Beweis, daß s das r teilt, verschieben wir bis zum Schluß.

Es gilt (a): Aus (7) folgt unmittelbar für jede ganze Zahl i

$$T^{vs+i}(G) = T^i(G) \quad \text{für} \quad 0 \leqq i < s .$$

Wenn wir $v = 1$, $i = 0$ setzen, erhalten wir (a).

Es gilt (b): Wenn wir weiter in der letzten Gleichheit $v = r/s$, $i = 0$ setzen, erhalten wir $T^r(G) = G$, also ist G eine r-invariante Menge.

Weiter ist, da $H' \supset F'$,

$$G \supset H \cap \bigcap_{l=1}^{s-1} T^l(F') = H - H \cap \bigcup_{l=1}^{s-1} T^l(F) . \tag{8}$$

Da $H \cap \bigcup_{l=1}^{s-1} T^l(F) \subset \bigcup_{l=1}^{s-1} F \cap T^l(F)$, erhalten wir nach (5)

$$\mu(H \cap \bigcup_{l=1}^{s-1} T^l(F)) \leqq \sum_{l=1}^{s-1} \mu(F \cap T^l(F)) = 0 ,$$

so daß wir aus (8) die Beziehungen $\mu(G) = \mu(H) = \mu(F) > 0$ bekommen.

Also ist G eine r-invariante Menge mit positivem Maß, $G \subset F$. Da $F\,(r, \mu)$-unzerlegbar ist, muß auch $G\,(r, \mu)$-unzerlegbar sein, und (b) gilt.

Es gilt (c): Für die ganzen Zahlen i und j gelte $i \not\equiv j \pmod s$. Es ist

$$T^j(G) \subset T^j(\bigcap_{l=1}^{s-1} T^l(H')) = \bigcap_{l=1}^{s-1} T^{j+l}(H') . \tag{9}$$

Da $i \not\equiv j \pmod s$, existieren Zahlen u und v, so daß

$$l \leqq u \leqq s-1 , \quad j + u = i + vs .$$

Nach (9) ist

$$T^j(G) \subset T^{j+u}(H') .$$

Andererseits gilt nach (7)

$$T^i(G) \subset T^i(H) = T^{i+vs}(H) = T^{j+u}(H) .$$

Also hat man für $i \not\equiv j \pmod s$

$$T^i(G) \cap T^j(G) \subset T^{j+u}(H) \cap T^{j+u}(H') = \emptyset . \tag{10}$$

Für $0 \leqq i < j < s$ folgt unmittelbar (c).

Es gilt (d): Da G nach (a) s-invariant ist, erhalten wir

$$T(\bigcup_{j=0}^{s-1} T^j(G)) = \bigcup_{j=0}^{s-1} T^j(G) .$$

Folglich ist die Menge $\bigcup_{j=0}^{s-1} T^j(G)$ invariant.

Aus (c) und der Stationarität des Maßes μ folgt:

$$\mu(\bigcup_{j=0}^{s-1} T^j(G)) = \sum_{j=0}^{s-1} \mu(T^j(G)) = s\,\mu(G) . \tag{11}$$

Wie wir gezeigt haben, ist $\mu(G) > 0$, also $\bigcup_{j=0}^{s-1} T^j(G)$ eine invariante Menge positiven Maßes; aus der Ergodizität des Maßes μ folgt, daß $(\bigcup_{j=0}^{s-1} T^j(G)) = 1$. Durch Vergleich mit (11) erhalten wir $s\mu(G) = 1$, so daß (d) gilt.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, daß s das r teilt. Wenn dies nicht so wäre, dann würde $r \not\equiv 0 \pmod{s}$ gelten, und durch Anwendung von (10) würden wir erhalten

$$G = T^r(G) \cap G = \emptyset,$$

also $\mu(G) = 0$, was im Widerspruch zu (d) ist. Damit ist der Beweis des Lemma beendet.

Nun wollen wir den Satz 1 formulieren.

Satz 1. *Es sei r eine natürliche Zahl, $r \geq 1$. Es sei μ ein ergodisches Maß. Dann existiert ein r-ergodisches Maß π, so daß $\mu = \pi^{[r]}$ gilt* .

Beweis. Wenn μ ein ergodisches Maß ist, welches gleichzeitig r-ergodisch ist, dann genügt es, $\pi = \mu$ zu setzen. Sei also μ ein ergodisches Maß, welches nicht r-ergodisch ist. Dann existiert nach Lemma 2 eine Zahl s, welche die Zahl r teilt, und eine Menge G derart, daß die Beziehungen (a) bis (d) erfüllt sind. Wir setzen

$$\pi(E) = s\mu(E \cap G) \quad \text{für jedes} \quad E \in \mathbf{\Pi}. \tag{12}$$

Aus der Beziehung (d) folgt, daß $\pi(X) = 1$, so daß π ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Da μ und G r-invariant sind, erhalten wir

$$\pi(T^r(E)) = s\mu(T^r(E \cap G)) = s\mu(E \cap G) = \pi(E),$$

so daß π r-stationär ist.

Wir beweisen, daß π ein r-ergodisches Maß ist. Wenn E eine r-invariante Menge mit $\pi(E) > 0$ ist, dann folgt aus der Beziehung $\pi(E) = s\mu(E \cap G)$, daß $\mu(E \cap G) > 0$. Daher ist $E \cap G$ eine r-invariante Untermenge von G mit positivem Maß, so daß nach (b) $\mu(E \cap G) = 1/s$ und somit $\pi(E) = s\,(1/s) = 1$ gilt, womit die r-Ergodizität des Maßes π bewiesen ist.

Nun werden wir die Gleichheit $\pi^{[r]} = \mu$ beweisen. Für jede Menge $E \in \mathbf{\Pi}$ gilt

$$E = [E \cap (\bigcup_{i=0}^{s-1} T^i(G))'] \cup [E \cap (\bigcup_{i=0}^{s-1} (T^i(G)))]. \tag{13}$$

Wenn wir (c) und (d) anwenden, erhalten wir

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{s-1} T^i(G)) = \sum_{i=0}^{s-1} \mu(T^i(G)) = 1,$$

so daß $\mu[(\bigcup_{i=0}^{s-1} T^i(G))'] = 0$. Also hat das erste Glied auf der rechten Seite von (13) vermöge μ das Maß Null; das zweite Glied ist eine Vereinigung von disjunkten Mengen (laut (c)) und für jedes $E \in \mathbf{\Pi}$ ist

$$\mu(E) = \sum_{i=0}^{s-1} \mu(T^i(G) \cap E). \tag{14}$$

Wenn wir $r = ks$ setzen, dann bekommen wir durch Anwendung der s-Invarianz der Menge G und der Stationarität des Maßes μ aus dem Ausdruck (14):

$$\mu(E) = \frac{s}{r}\sum_{i=0}^{s-1} k\,\mu(T^i(G) \cap (E) = \frac{s}{r}\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{k} \mu(T^{sj+i}(G) \cap E)$$
$$= \frac{s}{r}\sum_{i=0}^{r-1} \mu(T^i(G) \cap E) = \frac{s}{r}\sum_{i=0}^{r-1} \mu(T^{-i}(G) \cap E)$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} s\,\mu(G \cap T^i(E)) = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} \pi\, T^i(E) = \pi^{[r]}(E)\,.$$

Also genügt das Maß π, das durch die Beziehung (12) definiert wurde, der Behauptung des Satzes, welcher damit bewiesen ist.

Die Behauptung des Satzes 1 können wir noch ein wenig verstärken, wie wir im weiteren zeigen werden.

Wir definieren für jedes $r \in N$ eine Äquivalenz in der Menge aller r-ergodischen Maße dadurch, daß wir zwei ergodische Maße μ und π dann und nur dann r-äquivalent nennen, wenn für ein $i \in N$ die Beziehung $\pi = \mu T^i$ gilt.

Die Äquivalenz von r-ergodischen Maßen werden wir mit dem Symbol $\sim r$ bezeichnen. Für jedes $r \in N$ bezeichne Θr die durch

$$\Theta r(\mu) = \mu^{[r]}$$

gegebene Abbildung der Menge aller r-ergodischen Maße in die Menge aller ergodischen Maße. Nach Satz 1 ist Θr eine Transformation der r-ergodischen Maße *auf* die Menge der ergodischen Maße. Diese Transformation Θr ist nun — bis auf Äquivalenz $\sim r$ — eine ein-eindeutige Transformation, wie wir im nächsten Satz beweisen werden.

Satz 2. *Sei $r \in N$, und seien μ und π r-ergodische Maße. Dann gilt*

$$\Theta r(\mu) = \Theta r(\pi) \quad \textit{wenn} \quad \mu \sim r\pi \quad \textit{ist}, \tag{15}$$

und

$$\Theta r(\mu) \neq \Theta r(\pi) \quad \textit{wenn} \quad \mu \sim r\pi \quad \textit{nicht gilt}. \tag{16}$$

Beweis. Die Gleichheit (15) folgt unmittelbar aus der r-Stationarität der periodischen Maße μ und π und aus der Definition von $\mu^{[r]}$ und $\pi^{[r]}$.

Wir müssen (16) beweisen. Sei μ nicht r-äquivalent zum periodischen Maß π. Wir werden das bekannte Faktum benützen, daß zwei verschiedene ergodische Maße μ_1 und μ_2 zueinander singulär sind, d. h.: es existiert eine solche Menge $E \in \mathbf{\Pi}$, daß $\mu_1(E) = 1$ und $\mu_2(E) = 0$. Das gilt offensichtlich auch für die r-ergodischen Maße. Da das ergodische Maß μ dem periodischen Maß π nicht r-äquivalent ist, unterscheidet sich das periodische Maß μ von allen periodischen Maßen πT^i, $i = 0, \ldots, r-1$, und es existieren also solche Mengen E_i, daß

$$\mu(E_i) = 1\,, \quad \pi T^i(E_i) = 0\,, \quad i = 0, \ldots, r-1\,.$$

Wenn wir $E = \bigcap_{i=0}^{r-1} E_i$ setzen, dann ergibt sich

$$\mu(E) = 1\,, \quad \pi T^i(E) = \pi(T^i(E)) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, r-1\,.$$

Daraus folgt $0 = \pi^{[r]}(E) < \mu^{[r]}(E)$, so daß, wenn die periodischen Maße μ und π nicht r-äquivalent sind, die Maße $\mu^{[r]}$ und $\pi^{[r]}$ nicht einander gleich sind, womit die Beziehung (16) bewiesen ist. Wir werden folgende Bezeichnung anführen.

Wenn $r \in N$ und A ein Alphabet ist, dann sei

$\mathfrak{Z}_r(A)$ die Klasse aller r-ergodischen Maße zum Alphabet A; insbesondere ist also für $r = 1$,

$\mathfrak{Z}_1(A)$ die Klasse aller ergodischen Maße zum Alphabet A;

$\overline{\mathfrak{Z}}_r(A)$ sei die Klasse aller Maße $\mu^{[r]}$, für welche $\mu \in \mathfrak{Z}_r(A)$ gilt.

Auf Grund des Satzes 1 gilt also die Gleichheit

$$\mathfrak{Z}_1(A) = \overline{\mathfrak{Z}}_r(A).$$

Diese Relation können wir noch ein wenig verallgemeinern. Sei nämlich $\overline{\mathfrak{Z}}_{rk}^r(A)$ die Menge aller Quellen, welche aus Quellen der Menge $\mathfrak{Z}_{rk}(A)$ dadurch entstehen, daß wir die Quelle $\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} \mu T^{ik}$ bilden. Dann gilt

$$\mathfrak{Z}_k(A) = \overline{\mathfrak{Z}}_{rk}^r(A). \tag{17}$$

Diese Beziehung können wir ähnlich wie die Relation $\mathfrak{Z}_1(A) = \overline{\mathfrak{Z}}_r(A)$ beweisen oder die Tatsache benützen, daß man durch eine Transformation der Quellenalphabete die Maße aus der Klasse $\mathfrak{Z}_k(A)$ ein-eindeutig in die Maße zum Alphabet A^k überführen kann; dabei geht die Transformation T^k des Raumes A^I in die Transformation T' des Raumes $(A^k)^I$ über. Unter diesen Voraussetzungen sind die (für die Transformation T) r-ergodischen Quellen im Alphabet A auf die (für die Transformation T') ergodischen Quellen im Alphabet A^k abgebildet. Dann ist $\mathfrak{Z}_k(A) = \overline{\mathfrak{Z}}_{rk}(A)$ mit $\mathfrak{Z}_1(A^k) = \overline{\mathfrak{Z}}_r(A^k)$ äquivalent.

Es ist beim Untersuchen der Eigenschaften der periodischen Informationsquellen und Kanäle manchmal zweckmäßig, die Ergodizität von periodischen Quellen auch anders zu definieren. Wir werden sagen, daß das Maß (d. h. das Wahrscheinlichkeitsmaß) μ schwach r-ergodisch ist, wenn μ ein periodisches Maß mit der Periode r und $\mu^{[r]}$ ein ergodisches Maß ist. In diesem Sinne wurde die Ergodizität periodischer Maße in [*1*], Seite 236, definiert.

Wir setzen jetzt voraus, daß man das Maß μ in folgender Weise ausdrücken kann:

$$\mu = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \pi T^i, \quad \alpha_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i = 1, \tag{18}$$

wo π ein r-ergodisches Maß ist.

Dann haben wir

$$\mu^{[r]} = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}\Big(\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \pi T^i\Big) T^j = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_i \Big(\frac{r}{1}\sum_{j=0}^{r-1} \pi T^j\Big) T^i = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \pi^{[r]} = \pi^{[r]},$$

also ist $\mu^{[r]}$ ergodisch, d. h. das Maß μ ist schwach r-ergodisch.

Also ist jedes Maß μ, das eine lineare Kombination eines r-ergodischen Maßes π und seiner Transformierten πT^i ist, schwach r-ergodisch.

Man kann nun unter bestimmten Bedingungen die umgekehrte Behauptung beweisen. Es gilt folgender

Satz 3. *Es seien ein meßbarer Raum* $(X, \mathbf{\Pi})$ *und eine ein-eindeutige Abbildung* T *von* X *in sich gegeben, für welche die folgende Behauptung gilt: Zu jedem* r*-ergodischen Maß* π *gibt es eine Menge* $E(\pi) \in \mathbf{\Pi}$ *so, daß* $\pi(E(\pi)) = 1$ *und* $\lambda(E(\pi)) = 0$ *für alle* r*-ergodische Maße* $\lambda \neq \pi$*, die auf* $\mathbf{\Pi}$ *definiert sind, gilt.*

Es sei μ ein schwach r-ergodisches Maß. Dann existieren ein r-ergodisches Maß π und r Zahlen α_i so, daß (18) *gilt.*

Bemerkung: Wie man aus dem Beweis von Satz 4.6.1 in [2] S. 86ff. leicht entnimmt, ist die in der Voraussetzung enthaltene Behauptung stets erfüllt, wenn μ perfekt und $\mathbf{\Pi}$ abzählbar erzeugt ist.

Beweis. Da $\mu^{[r]}$ ein ergodisches Maß ist, gibt es nach Satz 1 ein r-ergodisches Maß π, für welches $\pi^{[r]} = \mu^{[r]}$ gilt. Der Voraussetzung nach existieren also solche Mengen $E(\pi T^i) \in \mathbf{\Pi}$, daß $\pi T^i (E(\pi T^i)) = 1$ und $\lambda(E(\pi T^i)) = 0$ für alle $\lambda \neq \pi T^i$, $i = 0, 1, \ldots, r$ ist. Wenn wir $\bigcup_{i=0}^{r-1} E(\pi T^i)$ mit $E(\pi^{[r]})$ bezeichnen, dann haben wir also $\mu^{[r]}(E(\pi^{[r]})) = \pi^{[r]}(E(\pi^{[r]})) = 1$, woraus $\mu(E(\pi^{[r]})) = 1$ folgt.

Da aber μ ein periodisches Maß ist, kann man

$$\mu(E) = \int_\Gamma \lambda(E)\, d\nu$$

schreiben, wobei $E \in \mathbf{\Pi}$ ist, Γ die Menge aller r-ergodischen Maße bezeichnet, und ν ein bestimmtes, zu μ gehöriges Maß ist. ν ist auf einem Borelkörper von Untermengen von Γ definiert. Wir haben also

$$\begin{aligned}\mu(E(\pi^{[r]})) = 1 &= \int_\Gamma \lambda(E(\pi^{[r]}))\, d\nu = \int_{\{\mu T^i;\, i=0,\ldots,r-1\}} \lambda(E(\pi^{[r]}))\, d\nu + \int_{\Gamma - \{\mu T^i;\, i=0,\ldots,r-1\}} \lambda(E(\pi^{[r]}))\, d\nu \\ &= \int_{\{\mu T^i;\, i=0,\ldots,r-1\}} 1\, d\nu + \int_{\Gamma - \{\mu T^i;\, i=0,\ldots,r-1\}} 0\, d\nu = \nu(\{\mu T^i;\, i = 0, \ldots, r\}).\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $\alpha_i = \nu(\{\mu T^i\})$, dann bekommen wir

$$\mu(E) = \int_\Gamma \lambda(E)\, d\nu = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i (\mu T^i)(E)$$

was für jedes $E \in \mathbf{\Pi}$ gilt, w. z. b. w.

Dieser letzte Satz ermöglicht es uns, unter den oben formulierten Voraussetzungen die Struktur der schwach r-ergodischen Wahrscheinlichkeitsmaße mit Hilfe von r-ergodischen Maßen auszudrücken.

Literatur

[1] Jacobs, K.: Über die Durchlaßkapazität periodischer und fast periodischer Kanäle. Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, Prag 1960.

[2] — Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[3] Winkelbauer, K.: Communication channels with finite past history. Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, Prag 1960.

Institut für Informationstheorie und Automation
Vyšehradská 49, Prag 2

(Eingegangen am 20. Dezember 1962)