Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 421—432 (1963)

# Über die Grenzverteilung von Summen Markowscher Ketten auf endlichen Gruppen. II

Von

Johann Cigler

## Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Grenzverteilung von Summen Markowscher Ketten auf endlichen Gruppen, das in [5], [4] und [3] auf die Behandlung der Markow-Kette $\mathfrak{S}$* der Paare $\binom{X_n}{S_n}$ zurückgeführt worden war, unter Verwendung eines Matrix-wertigen Gruppenringes und der Fouriertransformation behandelt. Die Rolle der Klasseneinteilung von $\mathfrak{S}$ übernimmt dabei der Begriff des Trägers einer Matrix-wertigen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die hier verwendeten Methoden lassen den Zusammenhang mit den entsprechenden Resultaten im Falle von Summen unabhängiger Zufallsvariablen besonders klar sichtbar werden und scheinen auch eher auf den Fall kompakter topologischer Gruppen übertragbar zu sein. Außerdem gestatten sie uns, einige Sätze zu beweisen, für welche die früher verwendeten Methoden nicht ausreichen.

## §1. Matrix-wertige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Sei $G$ eine endliche, nicht notwendig kommutative, Gruppe der Ordnung $k$. Unter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p$ auf $G$ versteht man bekanntlich ein $k$-tupel $p = (p_g)$ mit $p_g \geqq 0$ $(g \in G)$ und $\sum_{g \in G} p_g = 1$. Da im Falle einer endlichen Gruppe jedes Maß $p = (p_g)$ totalstetig bezüglich des Haarschen Maßes ist, kann man jedem Maß $p = (p_g)$ das Element $P = \sum_{g \in G} p_g g$ des Gruppenringes $R(G)$ umkehrbar eindeutig zuordnen. Die Zweckmäßigkeit dieser Zuordnung ist z. B. in [1] klar ersichtlich.

Für unsere Zwecke erweist es sich als besonders günstig, einen Gruppenring zu betrachten, dessen Elemente Matrizen sind. Wir bezeichnen mit $R_l(G)$ die Menge aller Elemente der Gestalt $A = \sum_{g \in G} A_g g$, wobei die $A_g = (a_{ij}^g)$ $l$-zeilige quadratische Matrizen sind ($l \geqq 1$ ganz; im Falle $l = 1$ stimmt $R_l(G)$ mit $R(G)$ überein). Wir definieren Addition und Multiplikation (Faltung) für Elemente $A = \sum A_g g$ und $B = \sum B_g g$ durch

$$A + B = \sum (A_g + B_g) g$$

bzw.

$$A * B = \sum_{g \in G} \Big(\sum_{g_1 g_2 = g} A_{g_1} B_{g_2}\Big) g .$$

---

* Für die Fragestellung und die verwendeten Bezeichnungen und Definitionen sei auf den ersten Teil [3] dieser Arbeit verwiesen.

Dieser Matrix-wertige Gruppenring wird offenbar zu einer Banachalgebra, wenn man die Norm von $A$ durch $\|A\| = \sum_{g\in G} \|A_g\|$ definiert. Dabei sei $\|A_g\|$ irgend eine multiplikative Matrixnorm ($\|AB\| \leqq \|A\|\,\|B\|$). Die Dreiecksungleichung für die Elemente aus $R_l(G)$ folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung für die Matrizen. Für das Produkt folgt die Ungleichung $\|A * B\| \leqq \|A\|\,\|B\|$ folgendermaßen:

$$\|A*B\| = \|\sum_g \Big(\sum_{g_1 g_2 = g} A_{g1} B_{g2}\Big) g\| = \sum_g \|\sum_{g_1 g_2 = g} A_{g1} B_{g2}\| \leqq \sum_g \sum_{g_1 g_2 = g} \|A_{g1} B_{g2}\| \leqq$$
$$\leqq \sum_g \sum_{g_1 g_2 = g} \|A_{g1}\|\,\|B_{g2}\| = \|A\|\,\|B\|.$$

Wir wollen nun insbesondere die Menge $R_l^+(G)$ aller Elemente $A \in R_l(G)$ untersuchen, für die $A_g \geqq 0$ (d. h. alle Elemente $a_{ij}^g \geqq 0$) sind und $\sum_{g\in G} A_g = S(A) = P$ ist, wobei $P$ eine stochastische Matrix ist (d. h. $P = (p_{ij})$ mit $p_{ij} \geqq 0$ und $\sum_{j=1}^{l} p_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, l$). Ein solches Element $A$ nennen wir eine Matrix-wertige Wahrscheinlichkeitsverteilung (MWV), genauer eine zu $S(A) = P$ gehörige MWV ($P$-MWV). Man sieht sofort, daß die Menge $R_l^+$ bezüglich der Multiplikation eine Halbgruppe bildet. Von wesentlicher Bedeutung für die Struktur dieser Halbgruppe sind die Idempotente, d.h. die Elemente $A \in R_l^+$ mit $A * A = A$. Die genauere Kenntnis gewisser Idempotente wird uns auch die Bestimmung der Grenzwahrscheinlichkeiten von Summen Markowscher Ketten ermöglichen.

Um nun in die Struktur der Idempotente etwas eindringen zu können, benötigen wir noch einige Hilfsüberlegungen.

Ist die Gruppe $G$ kommutativ und $\chi(g)$ ein Charakter von $G$, dann ist durch $\chi(A) = \sum_{g\in G} A_g \chi(g)$ ein Homomorphismus von $R_l(G)$ in den Ring aller $l \times l$-Matrizen gegeben. Denn

$$\chi(A+B) = \chi\Big(\sum_g (A_g + B_g) g\Big) = \sum_g (A_g + B_g)\,\chi(g) = \chi(A) + \chi(B)$$

und

$$\chi(A*B) = \chi\Big(\sum_g \Big(\sum_{g_1 g_2 = g} A_{g_1} B_{g_2}\Big) g\Big) = \sum_g \Big(\sum_{g_1 g_2 = g} A_{g_1} B_{g_2}\Big)\,\chi(g_1 g_2) = \chi(A)\,\chi(B).$$

Insbesondere gilt für $\chi \equiv 1 : \chi(A) = S(A) = \sum_{g\in G} A_g$. Es ist daher auch $S(A*B) = S(A) S(B)$. Ist $G$ nicht kommutativ und $U(g)$ eine irreduzible unitäre Darstellung von $G$ vom Grad $m$, dann definieren wir $U(A)$ durch $U(A) = \big(\sum_{g\in G} a_{ij}^g U(g)\big)$, d. h. $U(A)$ ist eine $ml \times ml$-Matrix, die man auch auffassen kann als $l \times l$-Matrix, deren Elemente selbst wieder $m \times m$-Matrizen sind. Offenbar liefert $U(A)$ ebenfalls einen Homomorphismus von $R_l(G)$, und zwar in den Ring aller $ml \times ml$-Matrizen. Wir können $U(A)$ auch in der Gestalt $U(A) = \sum_{g\in G} A_g U(g)$ schreiben. Dabei ist zu beachten, daß bei der Multiplikation zweier Matrizen $U(A)$ und $U(B)$ nur die $A_g$ und $B_g$ und ebenso die $U(g)$ untereinander multipliziert werden und daß $A_g$ mit $U(g)$ vertauschbar ist (auch im Falle, daß alle vorkommenden Matrizen dieselbe Ordnung besitzen). Aus dem Satz von Peter-Weyl ergibt sich nun unmittelbar, daß ein Element $A \in R_l(G)$ eindeutig bestimmt ist durch die Menge aller Matrizen $U(A)$, wobei $U$ alle irreduziblen unitären Darstellung von $G$ durchläuft. (Wir wollen im folgenden diese Menge mit $\mathfrak{U}$ bezeichnen.) Daraus ergibt sich nun unmittelbar: Notwendig und hinreichend für die Idempotenz von $A$ ist, daß für jedes $U \in \mathfrak{U}$ die Matrix $U(A)$ idempotent ist.

Notwendig ist also insbesondere, daß $S(A) = P$ eine idempotente stochastische Matrix ist. Wir wollen im folgenden stets $S(A) = P$ vorgeben und nach allen idempotenten $P$-MWVen fragen. Eine Klasse von Idempotenten ist natürlich stets vorhanden: Sei $P$ eine idempotente Matrix und $H$ eine Untergruppe von $G$ der Ordnung $a$. Für $h \in H$ sei $A_h = P/a$, sonst $A_g = 0$. Dann ist, wie man sofort sieht, $A * A = A$.

Im Falle $l = 1$, d. h. im Falle gewöhnlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist damit die Klasse aller Idempotente erschöpft. Hier reduzieren sich nämlich alle Matrizen $A_g$ auf reelle Zahlen $p_g$ und $P = 1$. Die oben definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $A$ ist hier gegeben durch:

$$A_h = 1/a \quad \text{für} \quad h \in H, \qquad A_g = 0 \quad \text{sonst}.$$

Das ist aber genau das Haarsche Maß auf der Untergruppe $H$.

Andererseits weiß man, daß jedes idempotente Maß das Haarsche Maß auf einer geeigneten Untergruppe ist (vgl. [*6*]).

Im Falle $l \geqq 2$ sind damit jedoch keineswegs alle Idempotente von $R_l^+(G)$ erschöpft. Denn sei z. B. $G$ die zyklische Gruppe der Ordnung 2 mit den Elementen $e$, $g$. Dann existieren schon in $R_2^+(G)$ andere Idempotente, z. B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} g$$

mit $\alpha + \beta = 1$, das zu $S(A) = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gehört.

Für die Bestimmung der idempotenten Wahrscheinlichkeitsverteilungen in $R(G)$ spielt der Begriff des Trägers einer Wahrscheinlichkeitsverteilung eine entscheidende Rolle. Ein analoger Begriff kann auch hier eingeführt werden: Wir bezeichnen mit $E_{ij}$ die $l \times l$-Matrix, für die $a_{ij} = 1$ gilt und alle Elemente $a_{i'j'}$ mit $(i', j') \neq (i, j)$ gleich Null sind. Ist $A = \sum A_g g$, so verstehen wir unter dem Träger von $A$ ($\operatorname{Tr} A$) die Menge aller Elemente $E_{ij} g \in R_l(G)$, für die $a_{ij}^g \neq 0$ ist. Außerdem rechnen wir stets das Nullelement von $R_l(G)$ zum Träger einer Matrixwertigen Wahrscheinlichkeitsverteilung $A$ hinzu (im Falle $l \geqq 2$). Im Falle $l = 1$ verstehen wir wie üblich unter $\operatorname{Tr} p$ die Menge aller Gruppenelemente $g$ für die $p_g \neq 0$ ist.

Man kann dann $A$ in der Gestalt schreiben: $A = \sum a_{ij}^g E_{ij} g$, wobei über alle $E_{ij} g \in \operatorname{Tr} A$ summiert wird.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß $\operatorname{Tr} A * B = \operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B$ gilt, wobei $\operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B$ die Menge aller Elemente der Gestalt $E_{ij} E_{i'j'} g g' = \delta_{ji'} E_{ij'} g g'$ mit $E_{ij} g \in \operatorname{Tr} A$ und $E_{i'j'} g' \in \operatorname{Tr} B$ bedeutet. Ist nun $A$ ein Idempotent, $A * A = A$, dann ergibt sich $\operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A$, d. h. $\operatorname{Tr} A$ ist eine Halbgruppe. (Unter einer Halbgruppe wollen wir im folgenden immer eine Menge $N$ mit $N^2 = N$ verstehen.)

Wie das bereits angeführte Beispiel zeigt, kann es bei gegebener idempotenter Matrix $P$ unendlich viele Idempotente geben, die denselben Träger besitzen. Für die Halbgruppen die als Träger einer idempotenten MWV auftreten, welche als Grenzverteilung von Summen Markowscher Ketten darstellbar ist, zeigen wir im folgenden Abschnitt, daß es hier genau ein Idempotent mit den angegebenen Eigenschaften gibt.

Wir zeigen nun den folgenden

**Satz 1.** *Sei $A$ eine Matrix-wertige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dann existiert stets*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqq N} A^n = B .$$

*Überdies gilt $AB = BA = B$ und $B^2 = B$.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, daß für jedes $U \in \mathfrak{U}$ $\lim 1/N \sum_{n\leqq N} U(A)^n = U(B)$ existiert. Die übrigen Relationen sind dann klar.

Da $U(A)$ die Gestalt $U(A) = (\sum_g a_{ij}^g U(g))$ besitzt, wobei $\sum_j \sum_g |a_{ij}^g| \leqq 1$ gilt und alle Potenzen von $U(A)$ von derselben Gestalt sind, ist die Folge $1/N \sum_{n\leqq N} U(A)^n$ relativ kompakt. Sei $U(B)$ ein Häufungswert dieser Folge. Man zeigt dann genau so wie in [2], Satz 3, daß $U(B)$ sogar der Grenzwert $\lim 1/N \sum_{n\leqq N} U(A)^n$ ist.

Wir wollen nun aus der Konvergenz dieser Folgen einige Folgerungen ziehen. Es existiert eine nichtsinguläre Matrix $T$, so daß $D = T^{-1} U(A) T$ die kanonische Gestalt der Matrix $U(A)$ ist. $D$ hat dann die Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} K_1 & & & & 0 \\ & K_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & K_r \end{pmatrix}$$

wobei die $K_i$ die Jordanschen Kästchen bedeuten sollen, d. h.

$$K_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Dabei können verschiedene $K_i$ auch übereinstimmen. In der Hauptdiagonale der Kästchen stehen die Eigenwerte $\lambda_i$ von $U(A)$, die natürlich auch übereinstimmen können. Wir benötigen nun das folgende

**Lemma 1.** *Sei $D = T^{-1} U(A) T$ die kanonische Gestalt der Matrix $U(A)$. Dann gilt für jeden Eigenwert $\lambda$, daß $|\lambda| \leqq 1$. Ist $|\lambda| = 1$ dann reduziert sich das zugehörige Kästchen auf die $1 \times 1$-Matrix $\lambda$.*

*Beweis.* Wegen $1/N \sum_{n \leqq N} D^n = T^{-1}\,(1/N \sum_{n \leqq N} U(A)^n)\,T$ muß die Folge $1/N \sum_{n \leqq N} D^n$ konvergieren. Nun hat $D^n$ die Gestalt

$$D^n = \begin{pmatrix} K_1^n & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & K_r^n \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } K_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & \cdots \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \cdots \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_i^n \end{pmatrix}.$$

Wäre $|\lambda| > 1$, dann wäre die Folge $1/N \sum_{n \leqq N} \lambda^n$ nicht konvergent. Daher könnte auch die Folge $1/N \sum_{n \leqq N} D^n$ nicht konvergieren, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es ist also $|\lambda| \leqq 1$. Sei nun $|\lambda| = 1$. Angenommen, $D$ besäße ein Kästchen der Gestalt

$$K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \text{ Zeilen, } k \geqq 2\,.$$

Da die Folge $1/N \sum_{n \leqq N} K^n$ konvergiert, müssen auch die einzelnen Elemente dieser Matrix konvergieren, also insbesondere auch die Folge $1/N \sum_{n \leqq N} n\,\lambda^{n-1}$. Das ist aber für $|\lambda| = 1$ unmöglich, wie eine einfache Rechnung zeigt. Aus der eben bewiesenen speziellen Gestalt der Matrix $D$ ergibt sich nun unmittelbar das

**Lemma 2.** *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Folge $U(A)^n$ ist, daß für jeden Eigenwert $\lambda$ von $U(A)$ entweder $|\lambda| < 1$ oder $\lambda = 1$ gilt.*

*Beweis.* Ist die Folge $U(A)^n$ konvergent und $|\lambda| = 1$, dann bestehen die zugehörigen Kästchen nur aus der Zahl $\lambda^n$. Die Folge $\lambda^n$ ist jedoch nur für $\lambda = 1$ konvergent. Sei umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt. Ist $\lambda = 1$, dann ist die Folge $\lambda^n$ trivialerweise konvergent. Sei also $|\lambda| < 1$ und

$$K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

ein zugehöriges Jordankästchen.

Dann ist das allgemeine Element $a_{ij}^{(n)}$, von $K^n$ gegeben durch

$$a_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{für} \quad i > j$$

$$= \binom{n}{j-i} \lambda^{n-j+i} \quad \text{für} \quad i \leqq j\,.$$

Für $n \to \infty$ gilt also in jedem Fall $\lim a_{ij}^{(n)} = 0$.

Für spätere Anwendungen benötigen wir das

**Lemma 3.** *Es sei jeder Eigenwert $\lambda$ von $U(A)$ vom Betrag* 1 *eine Einheitswurzel. Dann ist notwendig und hinreichend für die Konvergenz von $U(A)^n$, daß alle Grenzwerte* $\lim\limits_{N\to\infty} 1/N \sum\limits_{n \leqq N} U(A)^{ln}$ *übereinstimmen* ($l = 1, 2, 3, \ldots$).

*Beweis.* Wir brauchen nur die Kästchen von $D$ zu untersuchen. Ist $|\lambda| < 1$, dann konvergiert das zugehörige Kästchen $K^n \to 0$. Ist $|\lambda| = 1$ und $\lambda$ eine Einheitswurzel, dann sind alle Grenzwerte $\lim 1/N \sum\limits_{n \leqq N} \lambda^{nl}$ nur dann gleich, wenn $\lambda = 1$ ist, denn sonst müßte $1/N \sum\limits_{n \leqq N} \lambda^n \to 0$ streben und $1/N \sum\limits_{n \leqq N} \lambda^{ln} \to 1$ für eine geeignete Potenz $l$.

## § 2. Grenzverteilungen von Summen Markowscher Ketten

Sei $\{X_n\}$ eine stationäre Markow-Kette mit Werten aus der Gruppe $G$. In [*3*] haben wir die Markow-Kette $\mathfrak{S}$ näher untersucht, die aus allen Paaren $\binom{X_n}{S_n}$ besteht, wobei $S_n = S_0 X_1 X_2 \ldots X_n$ bedeuten soll und haben aus der Grenzverteilung dieser Markow-Kette auf die Grenzverteilung der Summen $S_n$ geschlossen. Wir wollen nun diese Resultate unter Verwendung Matrix-wertiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen beweisen.

Sei $g_0 = e, g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}$ eine beliebige Durchnumerierung der Elemente von $G$. Sei $P = (p_{g_i g_j})$ die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $G$ außer einer einzigen irreduziblen Klasse nur noch transiente Elemente enthält. Der Fall mehrerer irreduzibler Klassen läßt sich ohne wesentliche Schwierigkeiten auf den obigen Fall zurückführen.

Wir betrachten nun das folgende Element $A \in R_k^+(G)$ (wobei $k$ die Ordnung der Gruppe $G$ bedeutet):

$$A = \sum_{g \in G} A_g\, g \quad \text{mit} \quad A_g = (a_{g_i g_j}^g),$$

wobei

$$a_{g_i g_j}^g = \delta_{g_j g}\, p_{g_i g_j} \quad \text{gilt.} \quad \left(\delta_{gh} = \begin{matrix} 1 & g = h \\ 0 & g \neq h \end{matrix}\right).$$

Das Element $a_{g_i g_j}^g$ ist dann nichts anderes als die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P\left(\binom{X_{l+1}}{S_{l+1}} = \binom{g_j}{sg} \,\middle|\, \binom{X_l}{S_l} = \binom{g_i}{s}\right).$$

(Diese hängt natürlich nicht von $s$ ab und wegen der Stationärität von $\{X_n\}$ auch nicht von $l$.) Sei nun $A^n$ die $n$-te Potenz von $A$ im Sinne der Faltung.

Wir setzen

$$A^n = \sum_{g \in G} A_g^{(n)} g \quad \text{mit} \quad A_g^{(n)} = (a_{g_i g_j}^{g,n}).$$

Dann ist

$$a_{g_i g_j}^{g,n} = P\left(\begin{pmatrix} X_{l+n} \\ S_{l+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ s\,g \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_l \\ S_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ s \end{pmatrix}\right).$$

Denn ist diese Relation für ein $n \geqq 1$ schon bewiesen, so ergibt sie sich für $n+1$ folgendermaßen:

$$A_g^{(n+1)} = \sum_{g^{(1)} g^{(2)} = g} \sum A_{g^{(1)}}^{(n)} A_{g^{(2)}}, \quad \text{d. h.}$$

$$a_{g_i g_j}^{g,n+1} = \sum_{g^{(1)} g^{(2)} = g} \sum \sum_{h \in G} a_{g_i h}^{g^{(1)},n}\, a_{h g_j}^{g^{(2)}} = \sum_{g^{(1)} g^{(2)} = g} \sum \sum_{h \in G} P\left(\begin{pmatrix} X_{l+n} \\ S_{l+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ s\,g^{(1)} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_l \\ S_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ s \end{pmatrix}\right)$$

$$\cdot P\left(\begin{pmatrix} X_{l+n+1} \\ S_{l+n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ s\,g^{(1)} g^{(2)} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_{l+n} \\ S_{l+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ s\,g^{(1)} \end{pmatrix}\right)$$

$$= P\left(\begin{pmatrix} X_{l+n+1} \\ S_{l+n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ s\,g \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_l \\ S_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ s \end{pmatrix}\right).$$

Unser Hauptproblem besteht in der Bestimmung des Grenzwertes

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} P\left(\begin{pmatrix} X_n \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ g \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ e \end{pmatrix}\right),$$

der nach unseren allgemeinen Überlegungen stets existiert.

Wir wollen diesen Grenzwert kurz mit

$$P\left(\begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ g \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ e \end{pmatrix}\right)$$

bezeichnen. (Offenbar besitzen für jedes $s$ und $l$ alle Ausdrücke der Gestalt

$$P\left(\begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ s\,g \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_l \\ S_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ s \end{pmatrix}\right)$$

ein und denselben Wert.) Setzt man

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} A^n = B \quad \text{mit} \quad B = \sum_{g \in G} B_g\, g,$$

$B_g = (b_{g_i g_j}^g)$, so ist also

$$b_{g_i g_j}^g = P\left(\begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ g \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ e \end{pmatrix}\right).$$

Wir haben also unser Problem zurückgeführt auf die Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{N \to \infty} 1/N \sum\limits_{n \leqq N} A^n$, wobei $A$ ein Element von $R_k^+(G)$ ist, das eine besonders einfache Gestalt besitzt.

Wir wollen nun einen Einblick in die Struktur von $\mathrm{Tr}\, B$ gewinnen. Wir verwenden dabei aus den Ergebnissen von [4], daß die Menge $\mathfrak{S}$ eine Markow-Kette bildet, deren wesentliche Elemente $\begin{pmatrix} g \\ s \end{pmatrix}$ genau diejenigen sind, für die $g$ wesentliches Element der Markow-Kette $\{X_n\}$ ist. Offenbar ist $E_{g_ig_j}g$ genau dann in $\operatorname{Tr} B$, wenn $g_j$ wesentlich ist und $\begin{pmatrix} g_i \\ e \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} g_j \\ g \end{pmatrix}$ gilt. Sei $\begin{pmatrix} g \\ e \end{pmatrix}$ ein wesentliches Element und $H$ die zugehörige Invarianzgruppe, deren Ordnung wir mit $a$ bezeichnen wollen. Dann geht $\begin{pmatrix} g \\ e \end{pmatrix}$ in genau $a$ Elemente der Gestalt $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ über, nämlich für jedes $h \in H$. Daraus folgt sofort, daß bei festem wesentlichem Element $g_j$ und jedem $g_i$ genau $a$ Werte $g$ existieren, für die $E_{g_ig_j}\, g \in \operatorname{Tr} B$ gilt. Ist $g_j$ transient, dann liegt $E_{g_ig_j}\; g$ für kein $g_i$ und kein $g$ in $\operatorname{Tr} B$. Weiters bemerken wir noch, daß falls $\begin{pmatrix} g_i \\ e \end{pmatrix}$ wesentlich ist, mit $E_{g_ig_j} \cdot g \in \operatorname{Tr} B$ auch $E_{g_jg_i}\, g^{-1} \in \operatorname{Tr} B$ gilt. Für jedes wesentliche $g$ ist $E_{gg}\; e \in \operatorname{Tr} B$.

Wir wollen die Halbgruppen, die als Träger einer Grenzverteilung $B$ von Summen Markowscher Ketten, $B = \lim\limits_{N\to\infty} 1/N \sum\limits_{n \leq N} A^n$, auftreten, invariante Halbgruppen nennen. Nach den obigen Bemerkungen ist die Bestimmung einer invarianten Halbgruppe äquivalent mit der Bestimmung der Klassen, in die $\mathfrak{S}$ zerfällt.

Sei nun $K$ eine invariante Halbgruppe und $Q$ eine idempotente stochastische Matrix, $Q = (q_{g_j})$. Wir definieren dann eine matrixwertige Wahrscheinlichkeitsverteilung $E_K$, deren Träger $K$ ist, durch

$$\begin{aligned} E_K &= \sum C_g\, g\,, \quad \text{wobei} \quad C_g = (c^g_{g_ig_j}) \quad \text{mit} \\ c^g_{g_ig_j} &= \frac{1}{a}\, q_{g_j} \quad \text{wenn} \quad E_{g_ig_j}\, g \in K \\ &= 0 \quad \text{sonst}. \end{aligned}$$

Dann gilt der folgende Satz:

**Satz 2.** *Für jede $Q$-MWV $D$ mit $\operatorname{Tr} D \subseteqq K$ gilt $D * E_K = E_K * D = E_K$. Insbesondere ist $E_K * E_K = E_K$, also $E_K$ ein Idempotent.*

*Beweis.* Sei $D = \sum D_g g$. Dann gilt nach Voraussetzung $d^g_{g_ig_j} \neq 0$, nur wenn $c^g_{g_ig_j} \neq 0$ gilt. Wir müssen nun folgendes beweisen:

$$\sum_{gh=k} C_g D_h = \sum_{gh=k} D_g C_h = C_k\,.$$

Wir beweisen den ersten Teil, der zweite geht ganz analog. Es ist zu zeigen, daß für jedes feste $g_1, g_2, k$ gilt

$$\sum_g \sum_{g'} c^g_{g_1g'}\, d^{g^{-1}k}_{g'g_2} = c^k_{g_1g_2}\,.$$

Wenn $E_{g_1g_2}k \notin K$, dann kann auch nicht gleichzeitig $E_{g_1g'}g$ und $E_{g'g_2}g^{-1}k$ in $K$ liegen, denn sonst wäre $E_{g_1g'}g E_{g'g_2}g^{-1}k = E_{g_1g_2}k \in K$, was unserer Annahme widerspricht. In diesem Falle sind also beide Seiten gleich Null. Sei also $E_{g_1g_2}k \in K$. Dann ist die rechte Seite von Null verschieden. Die linke Seite ist ebenfalls ungleich Null. Denn nach Voraussetzung ist $E_{g_1g_2}k \in K$. Es ist daher $g_2$ wesentlich. Und daraus folgt, daß $E_{g_2g_2}e \in K$ ist. Daher sind mindestens im Produkt $E_{g_1g_2}k \times E_{g_2g_2}e$ beide Faktoren in $K$. Da $\begin{pmatrix} g_1 \\ e \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} g_2 \\ k \end{pmatrix}$, gibt es für jedes wesentliche Element $g'$ genau $a$ Werte $g$, so daß $\begin{pmatrix} g_1 \\ e \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} g' \\ g \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} g_2 \\ k \end{pmatrix}$, d. h. aber daß für diese Werte $g$ sowohl $E_{g_1g'}g$ als auch $E_{g'g_2}g^{-1}k$ in $K$ liegen.

Wir bekommen also:

$$\sum_g \sum_{g'} c^g_{g_1 g'} d^{g-1k}_{g' g_2} = \sum_{g'} \sum_g \frac{1}{a} q_{g'} d^{g-1k}_{g' g_2} = \sum_{g'} \frac{1}{a} q_{g'} \sum_g d^{g-1k}_{g' g_2} = \sum_{g'} \frac{1}{a} q_{g'} q_{g_2} = \frac{1}{a} q_{g_2} = c^k_{g_1 g_2}.$$

Setzt man hier speziell $D = E_K$ so ergibt sich die Idempotenz von $E_K$.

Satz 2 ermöglicht uns nun den Beweis des folgenden Satzes, der die ausgezeichnete Stellung der invarianten Halbgruppen $K$ und der Matrix-wertigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $E_K$ zum Ausdruck bringt.

**Satz 3.** *Sei $K$ eine invariante Halbgruppe und $Q$ eine idempotente stochastische Matrix der Gestalt $Q = (q_{g_j})$. Dann existiert auf $K$ genau eine $Q$-*MWV, *nämlich $E_K$, die $K$ als Träger besitzt.*

*Beweis.* Daß $E_K$ diese Eigenschaften erfüllt, ergibt sich unmittelbar aus Satz 2. Wir müssen noch zeigen, daß $E_K$ das einzige derartige Idempotent ist. Sei $R$ ein weiteres Idempotent mit $S(R) = Q$ und $\mathrm{Tr}\, R = K$. Dann existiert eine Zahl $c > 0$, so daß für jedes $g \in G$ die Matrizen $R_g - c C_g \geqq 0$ sind. Sei $c_0$ die größte Zahl $c$ mit dieser Eigenschaft. Offenbar ist dann auch

$$(R - c_0 E_K)(R - c_0 E_K) = R - c' E_K \quad (c' = 2c_0 - c_0^2 \geqq c_0)$$

nicht negativ. Aus der Definition von $c_0$ folgt daher $c_0 = c' = 2c_0 - c_0^2$. Wegen $c_0 > 0$ ist daher $c_0 = 1$. Für jedes $g$ ist daher $R_g - C_g \geqq 0$. Andererseits ist $S(R_g - C_g) = 0$. Daraus ergibt sich unmittelbar $R_g - C_g = 0$, d. h. $R = E_K$ und das war zu beweisen*. Aus diesem Satz ergibt sich sofort der

**Satz 4.** *Sei* $\lim 1/N \sum_{n \leqq N} A^n = B$. *Dann ist* $B = E_{\mathrm{Tr}\, B}$. *Mit a. W.*

$$P\left(\begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j \\ g \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i \\ e \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} q_{g_j} \frac{1}{a} & \textit{wenn} \begin{pmatrix} g_i \\ e \end{pmatrix} \rightharpoondown \begin{pmatrix} g_j \\ g \end{pmatrix} \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

*Dabei ist* $Q = \lim 1/N \sum_{n \leqq N} P^n$, $P = S(A)$.

Wir nennen die invariante Halbgruppe $\mathrm{Tr}\, B$ die von $\mathrm{Tr}\, A$ erzeugte invariante Halbgruppe und schreiben $\mathrm{Tr}\, B = [\mathrm{Tr}\, A]$.

Wir bezeichnen nun mit $(\mathrm{Tr}\, A)^W$ die Menge aller Elemente $E_{g_i g_j} g \in \mathrm{Tr}\, A$, für die $g_j$ wesentlich ist. Dann gilt $\mathrm{Tr}\, B \supseteqq (\mathrm{Tr}\, A)^W$. Denn ist $g_j$ wesentlich und $E_{g_i g_j} g \in \mathrm{Tr}\, A$, dann ist $E_{g_j g_j} e \in \mathrm{Tr}\, B$ und daher $E_{g_i g_j} g = E_{g_i g_j} g.\ E_{g_j g_j} e \in \mathrm{Tr}\, A \times \times \mathrm{Tr}\, B = \mathrm{Tr}\, B$. Aus der Definition des Trägers ergibt sich weiter sofort, daß $\mathrm{Tr}\, B$ die kleinste invariante Halbgruppe ist, die $(\mathrm{Tr}\, A)^W$ umfaßt.

Wir beweisen nun das folgende

**Lemma 4.** *Sei $P = (p_{ij})$ eine stochastische Matrix und seien $U_1, U_2, \ldots, U_n$ $n$ unitäre Matrizen einer Ordnung $m \geqq 1$, derart daß jedes endliche Produkt $U_{i_1} \times \times U_{i_2} \cdot \ldots \cdot U_{i_l}$ dieser Matrizen nur Einheitswurzeln als Eigenwerte besitzt. Dann ist jeder Eigenwert $\lambda$ vom Betrag 1 der Matrix*

$$P(U) = \begin{pmatrix} p_{11} U_1 & p_{12} U_2 & \cdots & p_{1n} U_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} U_1 & p_{n2} U_2 & \cdots & p_{nn} U_n \end{pmatrix}$$

*eine Einheitswurzel.*

* Zum Beweis vergleiche man [*1*].

*Beweis*. Sei $\lambda$ ein Eigenwert der Matrix $P(U)$ mit $|\lambda|$ gleich 1. Dann gilt, wenn die $x_j$ Vektoren eines $R_m$ bezeichnen,

$$\begin{pmatrix} p_{11} U_1 & \dots & p_{1n} U_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} U_1 & \dots & p_{nn} U_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Führt man die übliche euklidisch-unitäre Norm ein, dann gilt wegen der Unitarität von $U$ $\| U x \| = \| x \|$.

Sei $a = \max \| x_i \|$ und $x_j$ ein Element maximaler Norm.

Dann gilt nach Voraussetzung

$$p_{j1} U_1 x_1 + \cdots + p_{jn} U_n x_n = \lambda x_j \quad \text{mit} \quad |\lambda| = 1 .$$

Geht man zu den Normen über, so bekommt man also

$$a = \| x_j \| \leqq p_{j1} \| U_1 x_1 \| + \cdots + p_{jn} \| U_n x_n \| = p_{j1} \| x_1 \| + \cdots + p_{jn} \| x_n \| \leqq a .$$

Das ist nur möglich, wenn alle $p_{ji}$, für die $\| x_i \| < a$ gilt, gleich Null sind.

Sei nun $L$ die Menge aller $j$, so daß $\| x_j \| = a$ erfüllt ist. Dann bilden die $p_{ij}$ mit $i, j \in L$ eine stochastische Teilmatrix von $P$.

Wir beweisen nun unsere Behauptung mit Induktion nach $n$. Für $n = 1$ reduziert sich die Behauptung auf die Voraussetzung, daß nämlich jeder Eigenwert vom Betrag 1 einer Matrix $U_i$ eine Einheitswurzel ist. Sei nun $n > 1$. Existiert eine stochastische Teilmatrix, dann ist nach Induktionsvoraussetzung schon alles bewiesen. Wir können also voraussetzen, daß keine stochastische Teilmatrix existiert. Dann ist für jedes $i$ $\| x_i \| = a$. Weiters können wir o.B.d.A. annehmen, daß $a = 1$ ist.

Da keine stochastische Teilmatrix existiert, gibt es einen Zyklus $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, so daß $p_{i_j i_{j+1}} \neq 0$ ist.

Wir betrachten nun die $i_j$-te Zeile unserer Gleichung:

$$p_{i_j 1} U_1 x_1 + \cdots + p_{i_j i_{j+1}} U_{i_{j+1}} x_{i_{j+1}} + \cdots + p_{i_j n} U_n x_n = \lambda x_{i_j} .$$

Diese Gleichung kann nur dann erfüllt sein, wenn alle $U_i x_i$ mit $p_{i_j i} \neq 0$ übereinstimmen. Denn sonst folgt aus der Dreiecksungleichung, daß

$$\| p_{i_j 1} U_1 x_1 + \cdots + p_{i_j n} U_n x_n \| < 1 = \| \lambda x_{i_j} \|$$

gilt. Dann reduziert sich unsere Gleichung aber auf $U_{i_{j+1}} x_{i_{j+1}} = \lambda x_{i_j}$. Daraus ergibt sich dann unmittelbar, daß $U_{i_1} U_{i_2} \dots U_{i_n} x_{i_n} = \lambda^n x_{i_n}$ gelten muß. Nach Voraussetzung muß aber $\lambda^n$ eine Einheitswurzel sein und daher muß auch $\lambda$ selbst eine Einheitswurzel sein. Damit ist Lemma 4 bewiesen.

Wir sind nun in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen, der uns einigen Aufschluß darüber gibt, wann die Folgen $A^n$ konvergieren.

**Satz 5.** *Notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Folge $A^n$ ist, daß für jedes $l = 1, 2, 3, \dots$*

$$[\operatorname{Tr} A^l] = [\operatorname{Tr} A]$$

*gilt.*

Sei $U(g)$ eine irreduzible unitäre Darstellung von $G$. Dann ist jeder Eigenwert von $U(g)$ eine Einheitswurzel. Denn sei $U(g)x = \lambda x$. Dann gilt, wenn $k$ die Ordnung der Gruppe bezeichnet, $U(g^k) = U(g)^k = E$, d.h. $U(g)^k x = \lambda^k x = x$. Es ist also $\lambda$ eine Einheitswurzel.

Notwendig und hinreichend für die Konvergenz von $A^n$ ist, daß für jedes $U \in \mathfrak{U}$ die Folge $U(A)^n$ konvergiert. Nach Lemma 3 ist es aber gleichbedeutend damit, daß für jedes $l = 1, 2, 3, \ldots$ die Grenzwerte $\lim 1/N \sum_{n \leqq N} U(A)^{ln}$ übereinstimmen. Nun ist dieser Grenzwert aber nach Satz 4 gleich $E_{[\mathrm{Tr}\, A^l]}$. Daraus ergibt sich die Behauptung unseres Satzes.

Im Spezialfall, wo die $X_n$ unabhängig sind, ist die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten $P = (p_{g_i g_j})$ unabhängig von $g_i$, d. h. $P = (p_{g_j})$. $\mathrm{Tr}\, A$ besteht dann aus allen Elementen $E_{g_i g_j} g_j$ für alle $g_i$ und alle $g_j$ mit $p_{g_j} \neq 0$. Man kann daher $\mathrm{Tr}\, A$ mit der Menge aller $g_j$ identifizieren, für die $p_{g_j} \neq 0$ ist. $[\mathrm{Tr}\, A]$ ist dann die kleinste Untergruppe von $G$, die $\mathrm{Tr}\, A$ umfaßt. Wir zeigen, daß Satz 5 in diesem Falle äquivalent ist mit dem bekannten

**Korollar.** *Seien die $X_n$ unabhängig. Dann konvergiert die Folge $A^n$ genau dann, wenn es keinen Normalteiler $K$ der Invarianzgruppe $H = [\mathrm{Tr}\, A]$ gibt, so daß* $\mathrm{Tr}\, A$ *ganz in einer Restklasse nach $K$ liegt.*

*Beweis:* Wenn $\mathrm{Tr}\, A$ ganz in einer Restklasse nach $K$ liegt, d. h. $\mathrm{Tr}\, A \subseteqq aK$, dann sei $l$ eine Potenz so, daß $a^l = e$ gilt. Dann ist aber $(\mathrm{Tr}\, A)^l \subseteqq a^l K = K$. Es ist also $[\mathrm{Tr}\, A^l] \neq [\mathrm{Tr}\, A]$. Die Folge $A^n$ kann daher nicht konvergieren.

Sei nun umgekehrt $A^n$ nicht konvergent. Dann gibt es nach Satz 5 eine Zahl $l$, so daß $[\mathrm{Tr}\, A^l] \subset [\mathrm{Tr}\, A]$ gilt.

Wir bezeichnen $\bigcap_{l=1}^{\infty} [\mathrm{Tr}\, A^l] = K$. Sei $A^l$ eine Potenz von $A$, so daß $[\mathrm{Tr}\, A^l] \subseteqq K$ gilt und überdies $e \in [\mathrm{Tr}\, A^l]$ erfüllt ist.

Diese Bedingungen sind offenbar stets erfüllbar. Wegen $e \in \mathrm{Tr}\, A^l$ gilt dann für jedes $n$ $\mathrm{Tr}\, A^{ln} \supseteqq \mathrm{Tr}\, A^{l(n-1)}$. Es gibt daher, weil die Gruppe endlich ist, eine Potenz $lk$, so daß $\mathrm{Tr}\, A^{l(k+1)} = \mathrm{Tr}\, A^{lk}$ gilt. $\mathrm{Tr}\, A^{lk}$ ist dann eine Untergruppe, die natürlich mit $K$ übereinstimmen muß.

Wir setzen nun zur Abkürzung $\mathrm{Tr}\, A = M$. Dann haben wir gezeigt: Für eine geeignete Potenz, wir wollen sie wieder mit $l$ bezeichnen, gilt $M^l = K$. Daraus folgt nun unmittelbar, daß $M^{l+1} = MK = KM$ gilt und für jedes $m$ analog $(KM)^m = M^m K = KM^m$ ist. Angenommen, $MK$ bestünde aus mehr als einer Restklasse nach $K$, z. B. seien $aK$ und $bK$ in $MK$ enthalten. Dann müßte für jedes $x \in M^{l-1}$ gelten: $xaK = K$ und $xbK = K$, $aK$ und $bK$ wären also nicht verschieden. Das ist ein Widerspruch. Genau so zeigt man, daß $MK = KM$ auch nur aus einer Linksrestklasse nach $K$ besteht. Es existiert also ein $a$ mit $aK = Ka = MK$. Nun ist $H$ die kleinste Untergruppe, die $M$ und damit auch $KM = aK$ umfaßt. Andererseits lehrt ein bekannter Schluß, daß die Menge aller $x \in H$ mit $xK = Kx$ eine Untergruppe von $H$ ist, die $aK$ umfaßt. Sie muß also mit $H$ übereinstimmen. Das heißt aber, daß $K$ Normalteiler in $H$ ist. Und damit ist alles bewiesen.

## Literatur

[1] BÖGE, W.: Über die Charakterisierung unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsverteilungen. J. reine angew. Math. **201**, 150–156 (1959).
[2] CIGLER, J.: Folgen normierter Maße auf kompakten Gruppen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **1**, 3–13 (1962).
[3] — Über die Grenzverteilung von Summen Markowscher Ketten auf endlichen Gruppen. I. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **1**, 415 (1963).
[4] —, und L. SCHMETTERER: Über die Summe Markowscher Ketten auf endlichen Gruppen. Proc. Third Prague Conf. (in Vorbereitung).
[5] KOUTSKÝ, Z.: Einige Eigenschaften der modulo $k$ addierten Markowschen Ketten. Proc. Second Prague Conf. 1959, 263–278.
[6] WENDEL, J. G.: Haar measure and the semigroup of measures on a compact group. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 923–929 (1954).

Mathematisches Institut
der Universität Wien
Wien IX
Strudlhofgasse 4

*(Eingegangen am 29. Oktober 1962)*