Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 415—420 (1963)

Über die Grenzverteilung von Summen Markowscher Ketten auf endlichen Gruppen. I

Von

Johann Cigler

Sei $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ein diskreter stochastischer Prozeß mit Werten aus einer endlichen, nicht notwendig kommutativen Gruppe G der Ordnung k. Sei $P(X_n = g)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable X_n den Wert $g \in G$ annimmt. Sei ferner allgemein $P(X_{n+1} = g_1, X_{n+2} = g_2, \ldots, X_{n+i} = g_i)$ die Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig $X_{n+1} = g_1, X_{n+2} = g_2, \ldots, X_{n+i} = g_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, 3, \ldots)$ gilt. Mit $P(X_1 X_2 = g)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, daß $X_1 = g_1$ und $X_2 = g_2$ gilt, wobei $g_1 g_2 = g$ erfüllt ist. Offenbar ist

$$P(X_1 X_2 = g) = \sum_{\substack{g_1 \in G \\ g_1 g_2 = g}} \sum_{g_2 \in G} P(X_1 = g_1, X_2 = g_2).$$

Analog ergibt sich

$$P(X_1 X_2 \ldots X_n = g) = \sum_{\substack{g_1 \in G \\ g_1 g_2 \ldots g_n = g}} \cdots \sum_{g_n \in G} P(X_1 = g_1, \ldots, X_n = g_n).$$

Unser Ziel ist die Untersuchung des Grenzverhaltens der Wahrscheinlichkeiten $P(X_1 X_2 \ldots . X_n = g)$ für $n \to \infty$.

Im allgemeinen Fall eines beliebigen stochastischen Prozesses sind keinerlei Ergebnisse bekannt. Für den Fall, daß der Prozeß $\{X_n\}$ stationär ist und die Zufallsvariablen X_n unabhängig sind, ist das Ergebnis wohlbekannt (vgl. [2]): Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der „Summen" $X_1 X_2 \ldots X_n$ (bzw. das arithmetische Mittel dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung) strebt dann gegen das Haarsche Maß einer Untergruppe H von G. Für den Fall, daß $\{X_n\}$ eine stationäre Markow-Kette bildet und G zyklisch ist, wurden einige Resultate von Z. Koutský [3] gewonnen. Diese Untersuchungen wurden dann für beliebige endliche Gruppen in [1] fortgeführt. Die vorliegende Arbeit setzt es sich zum Ziel, die allgemeine Gestalt der Grenzverteilungen der Summen $X_1 X_2 \ldots X_n$ zu bestimmen und Kriterien für die asymptotische Gleichverteilung aufzustellen.

Sei $\{X_n\}$ eine stationäre Markow-Kette, deren „Zustände" die Elemente der Gruppe G sind. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sei $P = (p_{g_i g_j})$. Dabei seien die Elemente $g_i \in G$ in einer beliebigen, aber für das Folgende festen Reihenfolge durchnumeriert und $g_0 = e$ das Einheitselement der Gruppe G. Dann gilt $p_{g_i g_j} \geqq 0$ und $\sum_{g_j \in G} p_{g_i g_j} = 1$. Die Elemente von P^n seien mit $p^{(n)}_{g_i g_j}$ bezeichnet. Wir nennen ein Element g_j von g_i aus in n Schritten erreichbar, falls $p^{(n)}_{g_i g_j} > 0$ ist. Wir schreiben dann $g_i \overset{(n)}{\rightsquigarrow} g_j$. Gibt es stets ein n, so daß $g_i \overset{(n)}{\rightsquigarrow} g_j$, so nennen wir g_j von g_i aus erreichbar, $g_i \rightsquigarrow g_j$. Folgt aus $g_i \rightsquigarrow g_j$ auch stets $g_j \rightsquigarrow g_i$, dann heißt g_i wesentlich. Ist g_i wesentlich, dann auch jedes von g_i erreichbare Element g_j. Wir bezeichnen die Menge aller g_j, die von einem wesentlichen Element g_i aus erreichbar sind, als irreduzible Klasse. Man bekommt somit eine Zerlegung der wesentlichen Elemente von G in irreduzible Klassen. Ist der Zustand g_i nicht wesentlich, so nennen wir ihn transient.

Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß G selbst eine irreduzible Klasse ist. Dies bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wie aus den Resultaten in [1] ersichtlich ist. Sei also G irreduzibel. Dann existiert stets

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} P^n = Q = (q_{g_i g_j}).$$

Dabei ist $q_{g_i g_j} = q_{g_j}$ unabhängig von g_i und positiv. Bekanntlich bilden die Summen $S_n = X_1 X_2 \ldots X_n$ selbst keine einfache Markow-Kette, wohl aber die Paare $\binom{X_n}{S_n}$ (vgl. [3], [1]). Sei daher $\mathfrak{S}$ die Menge aller Paare $\binom{g}{s}$, $g, s \in G$. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{\binom{g_i}{s_i}\binom{g_j}{s_j}}$ von einem Zustand $\binom{g_i}{s_i}$ in einen Zustand $\binom{g_j}{s_j}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} p_{\binom{g_i}{s_i}\binom{g_j}{s_j}} &= p_{g_i g_j} \text{ wenn } s_j = s_i g_j \\ &= 0 \qquad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit C_s die Menge aller Zustände $\binom{g'}{s'} \in \mathfrak{S}$, die von $\binom{e}{s}$ aus erreichbar sind. Wegen der Irreduzibilität von G enthält C_s für jedes $g \in G$ mindestens ein Element der Gestalt $\binom{g}{s'}$ mit einem passenden $s' \in G$. Zwei Klassen C_{s_0} und C_{s_1} sind entweder identisch oder fremd; $C_{s_0} = C_{s_1}$ ist genau dann der Fall, wenn man von $\binom{e}{s_0}$ in $\binom{e}{s_1}$ übergehen kann. Offenbar sind alle Zustände einer Klasse C_s wesentlich (vgl. z. B. [1]). Wir haben also eine Zerlegung von $\mathfrak{S}$ in irreduzible Klassen C_s gewonnen. Es existiert nun eine eindeutig bestimmte Untergruppe H von G, so daß $C_s = C_{sh}$ genau für jedes $h \in H$ gilt. Wir nennen H die Invarianzgruppe (vgl. [1]). Sei nämlich H die Menge aller Elemente h mit $\binom{e}{e} \prec \binom{e}{h}$. Ist dann $h \in H$, $h' \in H$, dann auch $hh' \in H$, wie aus der Relation $\binom{e}{e} \prec \binom{e}{h} \prec \binom{e}{hh'}$ ersichtlich ist. Die Menge H ist also eine Gruppe. Gehören $\binom{g}{s}$ und $\binom{g'}{s'}$ derselben Klasse an, so schreiben wir kurz $\binom{g}{s} \sim \binom{g'}{s'}$. Sei a die Ordnung der Invarianzgruppe H. Dann zerfällt $\mathfrak{S}$ in genau k/a irreduzible Klassen, die alle dieselbe Anzahl ka von Elementen besitzen.

Sei $h_0 = e, h_1, \ldots, h_{a-1}$ eine beliebige Anordnung der Elemente von H. Wir zerlegen nun die Zustände aus C_e in a Klassen $D_{h_0}, D_{h_1}, \ldots, D_{h_{a-1}}$. Zur Klasse D_{h_0} möge $\binom{e}{e}$ gehören, sowie $k-1$ weitere Elemente der Gestalt $\binom{g_1}{s_1}, \binom{g_2}{s_2}, \ldots, \binom{g_{k-1}}{s_{k-1}}$ mit geeigneten s_i, so daß $\binom{g_i}{s_i} \in C_e$. Ist D_{h_0} bereits gewählt, so setze man für $h \in H$

$$D_h = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ h\, s_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_{k-1} \\ h\, s_{k-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Offenbar sind alle D_h verschieden und ihre Vereinigung ist C_e.

Ist nun $C_s \neq C_e$, dann setze man

$$D_{sh} = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ s\, h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ s\, h\, s_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_{k-1} \\ s\, h\, s_{k-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Es gilt dann

$$p_{\binom{g_i}{h_l s_i}\binom{g_j}{h_m s_j}} = p_{\binom{g_i}{s h_l s_i}\binom{g_j}{s h_m s_j}}.$$

Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten ist also für jede Klasse C_s dieselbe wie die für C_e. Es genügt daher, die Klasse C_e zu betrachten. In C_e gilt

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} p_{\binom{g_i}{h_l s_i}\binom{g_j}{h_m s_j}} &= p_{g_i g_j} \quad \text{wenn } h_m s_j = h_l s_i g_j \\ &= 0 \qquad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit hängt also bei festem g_i, g_j nur vom Wert $h_l^{-1} \cdot h_m$ ab.

Daraus ergibt sich unmittelbar, daß die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten für die Zustände aus C_e gegeben ist durch

$$R = \begin{pmatrix} A_{h_0} & A_{h_1} & \cdots & A_{h_{a-1}} \\ A_{h_1^{-1} h_0} & A_{h_1^{-1} h_1} & \cdots & A_{h_1^{-1} h_{a-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{h_{a-1}^{-1} h_0} & A_{h_{a-1}^{-1} h_1} & \cdots & A_{h_{a-1}^{-1} h_{a-1}} \end{pmatrix}$$

Dabei ist $A_{h_l^{-1} h_m}$ die $k \times k$-Matrix mit den Elementen in (1), d. h. $A_{h_l^{-1} h_m}$ ist die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten aus einem Zustand aus D_{h_l} in einen Zustand aus D_{h_m}. Aus (1) ergibt sich unmittelbar, daß $\sum\limits_{h \in H} A_h = P$.

Da C_e eine irreduzible Klasse ist, besitzt die Matrix R die Zahl 1 als einfachen Eigenwert. Es gibt daher genau eine stochastische Matrix S mit $RS = SR = S$ und $S^2 = S$. Nun gilt für die Matrix

$$Q = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} P^n$$

die Gleichung $PQ = QP = Q$ und $Q^2 = Q$. Daher folgt, daß die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} Q \cdots \frac{1}{a} Q \\ \cdots\cdots \\ \frac{1}{a} Q \cdots \frac{1}{a} Q \end{pmatrix}$$

eine (und daher die eindeutig bestimmte) Lösung der Gleichungen $RS = SR = S$ und $S^2 = S$ ist. Das ergibt sich nämlich unmittelbar aus den Relationen

$$\sum_{h\in H} A_h \frac{1}{a} Q = \frac{1}{a} (\sum_{h\in H} A_h) Q = \frac{1}{a} P Q = \frac{1}{a} Q$$

$$\sum_{h\in H} \frac{1}{a} Q A_h = \frac{1}{a} Q (\sum_{h\in H} A_h) = \frac{1}{a} Q P = \frac{1}{a} Q .$$

Aus dem Obigen folgt nun, daß

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} R^n = S \text{ gilt, d. h. also, daß} \tag{2}$$

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} P\left\{\begin{pmatrix} g' \\ s' \end{pmatrix} \overset{(n)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} g \\ s \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{a} q_g .$$

Nachträglich überzeugt man sich sehr leicht davon, daß die obigen Überlegungen und insbesondere Formel (2) auch in dem Fall richtig bleiben, daß G außer einer Klasse wesentlicher Elemente auch noch transiente Elemente enthält. Ist g transient, dann gilt natürlich $q_g = 0$ und umgekehrt. (Falls e transient sein sollte, muß man die obigen Überlegungen, die mit H und der Klasseneinteilung C_s, D_h zusammenhängen, in naheliegender Weise modifizieren. An den Resultaten ändert sich nichts.)

Wir bekommen somit den

Satz 1. *Die Gruppe G bestehe aus einer irreduziblen Klasse und einer (eventuell leeren) Klasse transienter Elemente. Dann gilt, wenn a die Ordnung der Invarianzgruppe H bezeichnet und g' und g wesentlich sind,*

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} P\left\{\begin{pmatrix} g' \\ s' \end{pmatrix} \overset{(n)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} g \\ s \end{pmatrix}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{a} q_g, & \textit{wenn} \begin{pmatrix} g' \\ s' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} g \\ s \end{pmatrix} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Damit ist — wenn man die Klasseneinteilung von $\mathfrak{S}$ als bekannt voraussetzt — die Frage nach der Grenzverteilung der Summen $X_1 X_2 \dots X_n$ vollständig beantwortet. Bezeichnet man nämlich mit $\{p_g\}$ die Anfangswahrscheinlichkeiten der Markow-Kette, dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeiten $P(X_1 X_2 \dots X_n = s)$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} P(X_1 X_2 \dots X_n = s) = \frac{1}{a} \sum_{\substack{g_i \in G \\ g_i g_j = s \\ \binom{g_i}{g_i} \sim \binom{g_j}{s}}} \sum_{g_j \in G} p_{g_i} q_{g_j} .$$

Von besonderem Interesse ist jedoch die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(s \,\middle|\, \begin{pmatrix} g' \\ s' \end{pmatrix}\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} P\left\{S_n = s \,\middle|\, \begin{pmatrix} g' \\ s' \end{pmatrix}\right\}.$$

Aus Satz 1 ergibt sich nun unmittelbar der

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt*

$$P\left(s \,\middle|\, \begin{pmatrix} g' \\ s' \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{a} \sum_{\substack{g \in G \\ \binom{g'}{s'} \sim \binom{g}{s}}} q_g . \tag{4}$$

Wir wollen nun für ein wesentliches Element $g \in G$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten (Maße) $P\left(s \middle| \binom{g}{e}\right)$ genauer untersuchen. Sei H_g die Menge aller Elemente h' mit $\binom{g}{e} \sim \binom{g}{h'}$. Dann ist H_g eine zu H konjugierte Gruppe, die Invarianzgruppe bezüglich g. Aus Satz 2 ergibt sich $0 < P\left(h' \middle| \binom{g}{e}\right) \leqq \frac{1}{a}$ für jedes $h' \in H_g$. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen der wichtige Spezialfall eintritt, daß $P\left(h' \middle| \binom{g}{e}\right) = \frac{1}{a}$ für jedes $h' \in H_g$ gilt, m. a. W. wann $P\left(s \middle| \binom{g}{e}\right)$ das Haarsche Maß auf H_g ist. Das wird durch den folgenden Satz geklärt:

Satz 3. *Die Gruppe G bestehe aus einer irreduziblen Klasse und einer (eventuell leeren) Klasse transienter Elemente. Sei $g \in G$ wesentlich. Dann ist $P\left(s \middle| \binom{g}{e}\right)$ genau dann das Haarsche Maß auf der Invarianzgruppe H_g, wenn für jedes wesentliche g_i $p_{g_i g_j} > 0$ nur für Elemente $g_j \in H_g$ gilt.*

Beweis: Sei H_g die Invarianzgruppe bezüglich g. Für jedes $h' \in H_g$ gilt $0 < P\left(h' \middle| \binom{g}{e}\right) \leqq \frac{1}{a}$. Nun ist $P\left(s \middle| \binom{g}{e}\right)$ genau dann das Haarsche Maß auf H_g, wenn für jedes $h' \in H_g$ gilt $P\left(h' \middle| \binom{g}{e}\right) = \frac{1}{a}$. Nach Satz 2 ist aber dafür notwendig und hinreichend, daß für jedes $h' \in H_g$ und jedes g_j mit $q_{g_j} > 0$ $\binom{g}{e} \sim \binom{g_j}{h'}$ gilt.

Sei also $\binom{g}{e} \sim \binom{g_j}{h'}$ für jedes g_j mit $q_{g_j} > 0$. Da die Klasse, die $\binom{g}{e}$ enthält, bei festem g_j nur a Elemente der Gestalt $\binom{g_j}{s}$ enthält, gilt also $\binom{g}{e} \not\sim \binom{g_j}{s}$ für $s \notin H_g$. Wäre nun $p_{g_i g_j} > 0$ für ein $g_j \notin H_g$, dann würde gelten $\binom{g_i}{h'} \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \binom{g_j}{h' g_j}$ mit $h' g_j \notin H_g$. Das ist aber unmöglich. Es ist also $p_{g_i g_j} = 0$ für jedes $g_j \notin H_g$.

Sei umgekehrt $p_{g_i g_j} = 0$ für $g_j \notin H_g$. Dann ist $\binom{g}{e} \rightsquigarrow \binom{g_j}{h'}$ nur für $h' \in H_g$ möglich. Da aber H_g die Invarianzgruppe bezüglich g ist, ist für jedes $h' \in H_g$ $\binom{g}{e} \sim \binom{g_j}{h'}$ erfüllt und daher nach Satz 2 $P\left(s \middle| \binom{g}{e}\right) = \frac{1}{a}$.

Eine unmittelbare Folgerung dieses Satzes ist der

Korollar 1. *Ist G irreduzibel, dann ist $P\left(s \middle| \binom{g}{e}\right)$ genau dann das Haarsche Maß auf einer Untergruppe von G, wenn die Invarianzgruppe mit G übereinstimmt. $P\left(s \middle| \binom{g}{e}\right)$ ist dann das Haarsche Maß auf G.*

Wir wollen nun noch die wichtige Frage untersuchen, wann $\lim_{n \to \infty} P\left(S_n = s \middle| \binom{g}{e}\right)$ existiert. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn die Klasse C_g nicht zyklisch ist.

Einen Einblick in diesen Fall gibt der Satz 4.

Satz 4. *Die Klasse C_g ist genau dann zyklisch, wenn es einen Normalteiler K_g von H_g vom Index l gibt, so daß* $\binom{g}{e} \overset{(nl)}{\rightsquigarrow} \binom{g}{k}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *genau für alle* $k \in K_g$ *erfüllt ist. K_g heißt dann die Periodengruppe bezüglich g.*

Beweis: Die Existenz einer Untergruppe K_g mit den angegebenen Eigenschaften wurde schon in [*1*] bewiesen. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß K_g sogar ein Normalteiler ist.

Sei C_g zyklisch, K_g die Periodengruppe, l die Periode. Dann sind die Klassen Z_i der Elemente, die von $\binom{g}{e}$ in Schritten der Länge $nl + i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ erreicht werden können, fremd und enthalten alle die gleiche Anzahl von Elementen. Gilt $\binom{g}{e} \overset{(nl+i)}{\rightsquigarrow} \binom{g}{s}$, dann auch $\binom{g}{k} \overset{(nl+i)}{\rightsquigarrow} \binom{g}{ks}$ für jedes $k \in K_g$. Andererseits geht $\binom{g}{s}$ in nl Schritten in $\binom{g}{sk}$ über. Daher liegen sowohl ks als auch sk in Z_i für jedes $k \in K_g$, d. h. es gilt $K_g s = s K_g$ und zwar für jedes $s \in H$. Damit ist gezeigt, daß K_g ein Normalteiler in H ist.

Literatur

[*1*] CIGLER, J., und L. SCHMETTERER: Über die Summe Markowscher Ketten auf endlichen Gruppen. Proc. Third Prague Conf. (in Vorbereitung).

[*2*] ITO, K., and Y. KAWADA: On the probability distribution on a compact group. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **22**, 977—998 (1940).

[*3*] KOUTSKÝ, Z.: Einige Eigenschaften der modulo k addierten Markowschen Ketten. Proc. Second Prague Conf. 1959, 263—278.

Mathematisches Institut
der Universität Wien
Wien IX
Strudlhofgasse 4

(Eingegangen am 29. Oktober 1962)