Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 6, 65—112 (1966)

Zur mathematischen Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien

WILHELM VON WALDENFELS*

Eingegangen am 28. Oktober 1965

Zusammenfassung. Das Thema dieser Arbeit ist die Ableitung und Diskussion einer Formel von P. W. ANDERSON. Das statistische Modell eines unendlich ausgedehnten Gases bestehend aus gleichartigen, voneinander unabhängigen Teilchen wird aufgestellt und daraus die Formel hergeleitet. Wie die Diskussion des Linienprofils ergibt, gilt die quasistatische Approximation auf den Linienflügeln. Mit der Stoßapproximation in der Linienmitte hat man nur zu rechnen, falls die mittlere Anzahl der Teilchen innerhalb des Weißkopf-Radius sehr klein gegen 1 ist.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

A

Auch unter idealen Bedingungen, wenn das leuchtende Atom frei von Umwelteinflüssen in einem ausgedehnten Vakuum ruht, ist eine Spektrallinie niemals völlig scharf, sondern sie ist etwas verbreitert. Diese Verbreiterung ist der Strahlungsdämpfung zuzuschreiben und wird als natürliche Linienbreite bezeichnet. Betrachtet man ein leuchtendes Gas von endlicher Dichte und endlicher Temperatur, so sind die Spektrallinien oft erheblich über die natürliche Linienbreite hinaus verbreitert. Diese Verbreiterung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Anteil rührt vom Dopplereffekt der sich thermisch bewegenden Teilchen her. Der andere Anteil wird durch die das leuchtende Teilchen störenden benachbarten Teilchen verursacht. Der zweite Anteil ist stark druckabhängig und wird deshalb Druckverbreiterung genannt. Da die Druckverbreiterung vor allem von den fluktuierenden elektrischen Feldern der Nachbarteilchen herrührt, könnte man auch von einem *stochastischen Starkeffekt* reden.

* Diese Arbeit wurde fast ganz im Institut für Plasmaphysik der Kernforschungsanlage Jülich des Landes Nordrhein-Westfalen im Rahmen der Assiziation Euratom-KFA durchgeführt. Mein besonderer Dank gebührt dem Leiter dieses Instituts, Herrn Dr. H. L. JORDAN, der mich zuerst auf die Theorie der Linienverbreiterung hinwies. Meinen dortigen Kollegen, vor allem den Spektroskopikern, sei für viele anregende Gespräche herzlicher Dank gesagt.

Der Starkeffekt wurde 1913 von STARK entdeckt. Er betrifft die Aufspaltung und Verschiebung von Spektrallinien durch außen angelegte statische elektrische Felder. Man unterscheidet linearen und quadratischen Starkeffekt.

Der lineare Starkeffekt tritt in erster Linie bei Wasserstoff und wasserstoffähnlichen Ionen auf. Die Linien spalten auf und die Aufspaltung ist zur elektrischen Feldstärke linear. Den quadratischen Starkeffekt findet man bei den übrigen Spektren und bei nicht zu großen Feldstärken. Hier werden die Linien verschoben und — in viel geringerem Maße — aufgespalten. Die Verschiebung ist proportional zum Quadrat der Feldstärke. Die Aufspaltung kann man oft vernachlässigen.

Die von uns behandelte Theorie beschäftigt sich mit dem quadratischen Starkeffekt, der durch die fluktuierenden äußeren Felder hervorgerufen wird. Wir betrachten ein Atom mit nur zwei Energiezuständen a und b, die durch außen angelegte elektrische Felder nicht aufgespalten, sondern nur verschoben werden. Die ungestörten Energien seien E_a und E_b, $E_a > E_b$. Durch den Übergang $a \to b$ entsteht eine Spektrallinie mit der ungestörten Kreisfrequenz

$$\nu_0 = \frac{1}{\hbar}(E_a - E_b).$$

Durch die äußeren fluktuierenden Felder werden die Niveaus um $\Delta E_a(t)$ und $\Delta E_b(t)$ verschoben und die momentan ausgestrahlte Frequenz ist gleich

$$\frac{1}{\hbar}(E_a + \Delta E_a(t) - E_b - \Delta E_b(t)) = \nu_0 + X(t).$$

Dabei ist

$$X(t) = \frac{1}{\hbar}(\Delta E_a(t) - \Delta E_b(t))$$

die momentane Störfrequenz.

Unter Vernachlässigung der Strahlungsdämpfung, die eine viel größere Zeitkonstante hat, wird ein Spektrograph, der zur Zeit 0 zu registrieren beginnt, bis zur Zeit T im Frequenzintervall ν, $\nu + d\nu$ eine Energie registrieren, die proportional ist zu

$$\varepsilon_T(\nu - \nu_0)\,d\nu = \frac{d\nu}{2\pi}\left|\int_0^T e^{-i\nu t + i\nu_0 t + i\int_0^t X(\tau)\,d\tau}\,dt\right|^2.$$

Der Faktor $1/2\pi$ wurde gewählt, damit

$$\int \varepsilon_T(\nu)\,d\nu = T$$

ist. Wir beobachten lange und gleichzeitig sehr viele Teilchen. Zur Normalisierung dividieren wir durch T und mitteln über die verschiedenen Teilchen, d. h. wir bilden den Erwartungswert.

Nach der Zeit T wird also der Spektrograph eine Intensität messen, die proportional ist zu

$$I_T(\nu) = \frac{1}{2\pi T} E\left|\int_0^T e^{-i\nu t + i\int_0^t X(\tau)\,d\tau}\,dt\right|^2$$

falls wir den Frequenznullpunkt auf ν_0 legen. Der Buchstabe E bedeutet den Erwartungswert, d. h. das statistische Mittel.

Es gilt

$$\int I_T(\nu)\,d\nu = 1\,.$$

Wir multiplizieren aus

$$I_T(\nu) = \frac{1}{2\pi T}\int_0^T\int_0^T e^{-i\nu(t-t')}\,E\,e^{i\int_{t'}^{t} X(\tau)\,d\tau}\,dt\,dt'.$$

Wenn die Umgebung des leuchtenden Atoms stationär ist, ist

$$E\,e^{i\int_{t'}^{t} X(\tau)\,d\tau} = R(t-t')$$

eine Funktion von $t - t'$. Wir nehmen außerdem an, daß

$$t \to R(t)$$

stetig ist.

Wir formen um

$$I_T(\nu) = \frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{+T}(T - |t|)\,e^{-i\nu t}\,R(t)\,dt$$

und bilden die Fouriertransformierte

$$\int I_T(\nu)\,e^{i\nu t}\,d\nu = f_T(t)\,R(t)$$

mit

$$f_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}\ \text{für} & |t| \leqq T \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Mit $T \to \infty$ geht $f_T(t) \to 1$. Die $I_T(\nu)$ bilden Wahrscheinlichkeitsmaße, die für $T \to \infty$ schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $I(\nu)$ konvergieren (siehe [*6*] S. 51) und es gilt

$$\int I(\nu)\,e^{i\nu t}\,d\nu = R(t).$$

Diese Schreibweise ist im klassischen Sinn nur gültig, falls $I(\nu)$ eine integrierbare, positive Funktion ist. Wir übertragen sie auf beschränkte positive Maße und identifizieren oft Maße, die bezüglich des Lebesgue-Maßes eine Dichte besitzen, mit dieser Dichte.

Diese Formel birgt die beiden klassischen explizit durchgerechneten Spezialfälle in sich, die die Namen Stoßtheorie und statistische oder besser quasistatische Theorie tragen.

Die quasistatische Theorie geht auf Holtsmark zurück und stützt sich auf den damals bekannt gewordenen Starkeffekt. Man nimmt an, daß die Störteilchen im Raume ruhen. Die Verbreiterung kommt allein durch die statistische Mittelung zustande. Es ist also $X(t) = X$ eine zeitliche Konstante,

$$R(t) = E\,e^{iXt}$$

ist die charakteristische Funktion der stochastischen Variablen X und I ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, d. h. $\int_{[a,b]} I(\nu)\,d\nu$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Störfrequenz X im Frequenzintervall $[a, b]$ liegt.

Die Stoßtheorie ist älter und wurde zuerst von H. A. Lorentz aufgestellt, mittlerweile aber stark ausgebaut. Man nimmt an, daß die ausgestrahlte Lichtwelle durch plötzliche Stöße unterbrochen wird, die voneinander unabhängig sind. Die Störung ist also von der Form

$$X(t) = \sum \delta(t - t_i)$$

wo t_i die Störzeitpunkte sind. Weil die Zeitintervalle unabhängig sind, ist für $t_1, t_2 \geqq 0$

$$\begin{aligned} R(t_1 + t_2) &= E \exp i \int_0^{t_1+t_2} X(\tau)\, d\tau \\ &= E \exp i \int_0^{t_1} X(\tau)\, d\tau \cdot \exp i \int_{t_1}^{t_1+t_2} X(\tau)\, d\tau \\ &= E \exp i \int_0^{t_1} X(\tau)\, d\tau\, E \exp i \int_{t_1}^{t_1+t_2} X(\tau)\, d\tau \\ &= R(t_1)\, R(t_2)\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$R(t) = e^{-\gamma t + i\sigma t}$$

für $t \geqq 0$, wo $\gamma \geqq 0$ sein muß, da $|R(t)| \leqq 1$ ist. Für $t \geqq 0$ gilt

$$\begin{aligned} R(-t) &= E \exp i \int_0^{-t} X(\tau)\, d\tau \\ &= E \exp i \int_t^{0} X(\tau)\, d\tau \\ &= E \exp - i \int_0^{t} X(\tau)\, d\tau = R(t)^* \end{aligned}$$

wo der * die konjugiert komplexe Zahl bedeutet. Somit ist

$$R(t) = e^{-\gamma |t| + i\sigma t}$$

für alle t und

$$I(\nu) = \begin{cases} \delta(\nu - \sigma) & \text{für} \quad \gamma = 0 \\ \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\gamma}{\gamma^2 + (\nu - \sigma)^2} & \text{für} \quad \gamma > 0\,. \end{cases}$$

Ist $\gamma > 0$, so wirken die Stöße wie eine Dämpfung. Man spricht darum auch von Stoßdämpfung.

Die allgemeine Ansicht der Spektroskopiker ([*13*], [*14*]) ist nun, daß sich jedes Linienprofil in der Mitte durch das Stoßprofil (Stoßapproximation) und auf den Linienflügeln durch das quasistatische Profil (quasistatische Approximation annähern läßt. Das Stoßprofil erhält man, indem man die gesamte Phasenstörung eines Teilchens auf den Zeitpunkt des nächsten Abstandes zusammenpreßt. Das quasistatische Profil entsteht, indem man die Teilchen festhält.

In unseren Untersuchungen hat sich wohl die Vermutung der quasistatischen Approximation auf den Linienflügeln bestätigt.

Daß das Stoßprofil in der Linienmitte eine gute Näherung bildet, scheint nur zu gelten, falls die Teilchenanzahl im Weißkopf-Radius (s. u.) sehr klein ist.

B

Überlegen wir uns diese Ausführungen nochmals im Lichte der Theorie der stochastischen Prozesse (siehe [5]). Um den Fall, daß die momentane Frequenzstörung $X(t)$ den Charakter einer Summe von δ-Funktionen hat, besser mathematisch behandeln zu können, geht man zur Störphase

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} X(\tau)\, d\tau$$

mit willkürlichem Anfangspunkt t_0 über.

Es ist

$$\int_{t'}^{t} X(\tau)\, d\tau = Y(t) - Y(t')\,.$$

Unsere beiden Annahmen über

$$E\, e^{i \int_{t'}^{t} X(\tau) d\tau}$$

besagen also, daß

$$E\, e^{i(Y(t) - Y(t'))}$$

nur von $t - t'$ abhängig und daß

$$R(t) = E\, e^{i(Y(t) - Y(0))}$$

in t stetig ist.

Dies besagt aber nichts anderes, als daß

$$e^{iY(t)}$$

ein im Doobschen Sinne schwach stationärer stochastischer Prozeß mit der stetigen Korrelationsfunktion $R(t)$ ist.

Man weiß, daß eine solche Korrelationsfunktion positiv definit und die Fouriertransformierte eines positiven Maßes auf der Geraden der Gesamtmasse $R(0)$ ist. In unserem Falle ist $R(0) = 1$ und $R(t)$ die Fouriertransformierte des Wahrscheinlichkeitsmaßes I.

In diesem Zusammenhang bedeutet quasistatische Theorie, daß $Y(t) = Xt$ und X eine stochastische Variable ist, und Stoßtheorie, daß $Y(t)$ ein Prozeß mit stationären, unabhängigen Zuwächsen ist.

C

Es gibt eine, wenn auch komplizierte, so doch geschlossene Formel von P. W. Anderson, die den Anspruch erhebt, für Verbreiterung durch quadratischen Starkeffekt im ganzen Spektralbereich gültig zu sein. Ihre Ableitung und Diskussion ist das eigentliche Thema dieser Arbeit. Wir beschäftigen uns mit ihrer ursprünglichen, von P. W. Anderson gegebenen Ableitung ([1], [2], [7]).

Man betrachtet ein Gas, das aus n $(n \gg 1)$ Teilchen besteht und das Volumen V einnimmt. Diese Teilchen stören vermittels ihrer elektrischen Felder ein ruhendes leuchtendes Teilchen. Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems auf den Ort des leuchtenden Teilchens. Nehmen wir zunächst an, daß die Störteilchen geladen sind und die Terme des Leuchtatoms vermöge des quadratischen Starkeffekts verschoben werden. Sei $\mathfrak{x}$ der Ort eines Störteilchens, dann wird durch das Teilchen eine Feldstärke dem Betrag nach proportional zu $|\mathfrak{x}|^{-2}$ im Nullpunkt verursacht und diese ruft wieder eine momentane Frequenzverschiebung $2\pi C\cdot|\mathfrak{x}|^{-4}$ hervor. Sei $\mathfrak{x}_\iota(t)$ die Position des ι-ten Teilchens zur Zeit t, dann nimmt ANDERSON die momentane Frequenzstörung an zu

$$X(t)=\sum_\iota 2\pi C\,|\mathfrak{x}_\iota|^{-4}.$$

Diese Annahme ist in Strenge falsch. Denn wohl addieren sich die elektrischen Feldstärken, aber nicht die Verschiebungen. Es müßte heißen

$$X(t)=2\pi C\left|\sum_\iota \mathfrak{x}_\iota\,|\mathfrak{x}_\iota|^{-3}\right|^2.$$

Die gemischten Terme der Form

$$2\pi C\frac{\langle\mathfrak{x}_\iota,\mathfrak{x}_\varkappa\rangle}{|\mathfrak{x}_\iota|^3\,|\mathfrak{x}_\varkappa|^3}\qquad(\iota\neq\varkappa)$$

sind vernachlässigt.

Die charakteristische Länge des Problems ist der Weißkopf-Radius, das ist der Abstand, in dem ein geradlinig vorbeifliegendes Teilchen über die ganze Zeit integriert eine Phasenstörung 1 hervorruft. Der Weißkopf-Radius ist bis auf einen Faktor der Größenordnung 1 gleich

$$l_c=\left(\frac{2\pi|C|}{v}\right)^{1/(n-1)},$$

wo v die mittlere Teilchengeschwindigkeit bedeutet und $n=4$ zu setzen ist. Es wird sich zeigen, daß man nur dann mit einer Approximation durch ein geeignetes Stoßprofil in der Linienmitte zu rechnen hat, falls

$$h=N l_c^3\ll 1$$

ist, wo N die Teilchendichte bedeutet. In diesem Fall ist das Gas in charakteristischen Einheiten gemessen sehr dünn und man kann annehmen, daß die gemischten Terme klein sind.

Die Linienflügel werden durch schnelle Störungen verursacht, d. h. durch nahe vorbeifliegende Teilchen. Daß zwei Teilchen gleichzeitig nahe vorbeifliegen, ist sehr unwahrscheinlich. Man kann also mit einigem Grund sagen, daß der Andersonsche Ansatz auf den Linienflügeln stets, im übrigen nur, wenn $Nl_c^3\ll 1$ ist, eine gute Approximation darstellt.

Sind die Störteilchen nicht geladen, sondern Dipole, dann hat man den Exponenten 4 durch 6 zu ersetzen. Es ist

$$X(t)=2\pi C\sum|\mathfrak{x}_\iota(t)|^{-6}.$$

Etwas allgemeiner setzen wir

$$X(t)=\sum_\iota\psi(|\mathfrak{x}_\iota(t)|)$$

mit

$$\psi(r)=2\pi C\cdot r^{-n}\qquad(n>3).$$

Obwohl nur $n=4$ und $n=6$ physikalisch interessant sind, werden unsere Überlegungen ohne Mehraufwand für alle $n>3$ gleichzeitig durchgeführt.

Man macht nun die Annahme, daß die Teilchen geradlinig für alle Zeiten durch den Raum fliegen, ohne sich gegenseitig zu stören. Es ist also

$$\mathfrak{x}_\iota(t) = \mathfrak{x}_\iota + \mathfrak{v}_\iota t .$$

Dabei ist $\mathfrak{x}_\iota$ die Position und $\mathfrak{v}_\iota$ die Geschwindigkeit zur Zeit 0.

Man macht die folgenden statistischen Voraussetzungen: Die Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen sind unabhängig und gleichverteilt. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Position $\mathfrak{x}_\iota$ des ι-ten Teilchens im Volumenelement dV liegt, ist dV/V. Die Geschwindigkeit eines Teilchens hat den festen Betrag v, die Richtung der Geschwindigkeit ist gleichverteilt auf der Einheitskugel.

Es ist

$$\begin{aligned} R(t) &= E \exp i \int_0^t X(\tau)\, d\tau \\ &= E \exp i \int_0^t \sum_\iota \psi(|\mathfrak{x}_\iota + \mathfrak{v}_\iota \tau|)\, d\tau \\ &= \prod_\iota E \exp i \int_0^t \psi(|\mathfrak{x}_\iota + \mathfrak{v}_\iota \tau|)\, d\tau \\ &= \left[\frac{1}{4\pi v^2 V} \int_{S_v} d\omega(\mathfrak{v}) \int_V d\mathfrak{x} \exp i \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau\right]^n . \end{aligned}$$

Dabei ist S_v die Kugel vom Radius v und $d\omega$ das Oberflächenelement auf S_v. Man geht mit V und n gegen Unendlich, jedoch so, daß

$$n/V \to N$$

die Teilchendichte konvergiert.

Dann geht

$$\begin{aligned} R(t) &= \left\{1 + \frac{1}{4\pi v^2 V} \int_{S_v} d\omega(\mathfrak{v}) \int_V d\mathfrak{x} \left[\exp i \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau - 1\right]\right\}^n \\ &\to \exp \frac{N}{4\pi v^2} \int_{S_v} d\omega(\mathfrak{v}) \int_{R^3} d\mathfrak{x} \left[\exp i \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau - 1\right] . \end{aligned}$$

Man führt Zylinderkoordinaten mit $\mathfrak{v}$ als Achsenrichtung ein und erhält die Andersonsche Formel

$$R(t) = \exp N \int_0^\infty 2\pi \varrho\, d\varrho \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\exp i \int_0^t \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + (z + v\tau)^2}\right) d\tau - 1\right] .$$

Die $\mathfrak{v}$-Integration ist weggefallen, weil der Integrand nicht mehr von der Richtung von $\mathfrak{v}$ abhängt.

Zur Existenz des Grenzwertes und des Integrals möchten wir bemerken, daß sich

$$\exp i \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau - 1$$

für kleine $|\mathfrak{x}|$ durch 2 und für große $|\mathfrak{x}|$ durch

$$\int_0^{|t|} |\psi| (|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau$$

abschätzen läßt.

D

Die Kritik an dieser Ableitung der Anderson-Formel richtet sich dagegen, daß die Position eines Teilchens zu allen Zeiten durch $\mathfrak{x}_\iota + \mathfrak{v}_\iota t$ gegeben wird. Dies ist aber bei endlichen Volumina höchstens für endliche Zeiten möglich. Denn einmal muß das Teilchen zum Rand kommen. Wir vollziehen darum den Übergang $V \to \infty$ zuerst und können dann $\mathfrak{x}_\iota(t) = \mathfrak{x}_\iota + \mathfrak{v}_\iota t$ für alle Zeiten setzen. Dazu benötigen wir das statistische Modell eines unendlich ausgedehnten Gases als Grenzwert statistischer Modelle endlicher Gase.

Ein statistisches Modell ist gegeben durch einen Zustandsraum Ω und ein auf geeigneten Teilmengen von Ω oder Funktionen auf Ω erklärtes positives Maß der Gesamtmasse 1. Beim statistischen Modell eines endlich ausgedehnten Gases, das wir gerade implizite verwandten, ist Ω das kartesische Produkt $(K \times S_v)^n$, wenn K die vom Gas ausgefüllt kompakte Teilmenge des R^3 ist. Der Zustand des Gases ist durch ein n-Tupel $(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)_{\iota=1}^n$ gegeben mit $\mathfrak{x}_\iota \in K$ und $\mathfrak{v}_\iota \in S_v$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist das Produktmaß

$$\left(\frac{\lambda_0}{V} \otimes \lambda_v\right)^{\otimes n}.$$

Dabei bedeutet λ_0 das Lebesgue-Maß, eingeschränkt auf K, und λ_v die gleichmäßige Verteilung auf der Kugeloberfläche.

Wir wollen das statistische Modell etwas ändern. Eine Analyse der Ableitung in C zeigt, daß nur symmetrische Funktionen der $(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)$ $(\iota = 1, \ldots, n)$ interessieren. Die Reihenfolge der $(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)$ ist gleichgültig, es kommt nur auf die Zusammensetzung an. Wir verwenden nun als Zustandsraum den Raum $\mathfrak{M}$ aller positiven, Radonschen Maße auf dem kartesischen Produkt $R^3 \times S_v$, versehen mit der Topologie der Konvergenz für alle stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Jeder Folge $(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)$ ordnen wir das Radonsche Maß

$$\sum_{\iota=1}^{n} \delta_{(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)}$$

zu. Dabei ist $\delta_{(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})}$ eine Einheitsmasse im Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})$. Diese Abbildung ist stetig und bis auf die Reihenfolge umkehrbar eindeutig. Wir übertragen das Wahrscheinlichkeitsmaß von $(K \times S_v)^n$ auf $\mathfrak{M}$ und erhalten für eine stetige beschränkte Funktion f auf $\mathfrak{M}$

$$P_K(f) = \frac{1}{(4\pi V)^n} \int_K \int_{S_v} \cdots \int_K \int_{S_v} f\left(\sum_{\iota=1}^{n} \delta_{(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)}\right) \cdot d\mathfrak{x}_1\, d\omega(\mathfrak{v}_1) \ldots d\mathfrak{x}_n\, d\omega(\mathfrak{v}_n).$$

Das Funktional P_K ist ein sogenanntes straffes Wahrscheinlichkeitsmaß (s. Kap I). Bläht man K zum ganzen R^3 auf, dann konvergiert P_K gegen ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathfrak{M}$ (s. Kap. IV). $\mathfrak{M}$ zusammen mit P ist das unseren Überlegungen zugrunde liegende statistische Modell. P-fast alle $\mu \in \mathfrak{M}$ sind von der Form $\sum_\iota \delta_{(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)}$.

Im Falle eines endlichen Gases war

$$\begin{aligned}\int_0^t X(\tau)\, d\tau &= \sum_{\iota=1}^{n} \int_0^t \psi(|\mathfrak{x}_\iota + \mathfrak{v}_\iota \tau|)\, d\tau \\ &= \left\langle \sum_{\iota=1}^{n} \delta_{(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)}, \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau \right\rangle\end{aligned}$$

und

$$R(t) = P_K\left(\exp i \langle \mu, \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\,\tau|)\, d\tau \rangle\right)$$

wo $\mu \in \mathfrak{M}$ die Integrationsvariable bezeichnet. Im Falle eines unendlich ausgedehnten Gases ist dann

$$R(t) = P\left(\exp i \langle \mu, \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\,\tau|)\, d\tau \rangle\right)$$

zu setzen. Man kann diesen Ausdruck genauer ausrechnen und erhält wieder die schon bekannte Andersonsche Formel (s. Kap. VI).

Der eben angedeutete Grenzübergang wird in Kapitel IV durchgeführt. An die Stelle von $R^3 \times S_v$ tritt, ohne die Darstellung wesentlich zu komplizieren, ein beliebiger lokal kompakter, nicht kompakter Raum $\mathfrak{X}$, der im Unendlichen abzählbar ist, an die Stelle des Produktmaßes von Lebesgue-Maß auf dem Ortsraum und der Geschwindigkeitsverteilung tritt ein positives, nicht beschränktes Radonsches Maß.

Die Anderson-Formel wird in Kapitel VII und VIII eingehend diskutiert. Das Endergebnis von Kapitel VII ist, daß sich das Linienprofil für $N l_c^3 \ll 1$ wie das entsprechende Stoßprofil verhält. Dieses Resultat ist schon aus der Arbeit von Anderson und Talman [*2*] bekannt. Aus dem Kapitel VIII ergibt sich, daß die quasistatische Approximation auf den Linienflügeln asymptotisch richtig ist. Im Fall $n = 6$, der mit der Sattelpunktmethode behandelt wird, erhalten Anderson und Talman ein schärferes Ergebnis. Der Unterschied zwischen dieser Arbeit und der Arbeit von Anderson und Talman liegt nicht zu sehr in den erreichten Endergebnissen, sondern in der Methode. Das Ziel dieser Arbeit war eine mathematische Durchdringung des Gegenstandes. Obwohl die Endresultate bekannt sind, sind viele Zwischenergebnisse vor allem im Kapitel VIII neu. Kapitel VIII verwendet eine Beweismethode, die von der Andersons und Talmans vollkommen verschieden und im Prinzip sehr einfach ist.

Kapitel II, IV und V sind meines Wissens neu. Satz 4 in Kapitel III findet sich in etwa bei Anderson und Talman mit anderem Beweis.

I. Positive straffe Maße

Die Theorie der straffen positiven Maße auf vollständig regulären Räumen (s. [*8*]) bildet eine Verallgemeinerung der Theorie der beschränkten positiven Radonschen Maße auf lokal kompakten Räumen (s. [*4*], [*10*]).

Sei E ein vollständig regulärer topologischer Raum, d. h. ein uniformisierbarer Hausdorff-Raum. Sei $\mathfrak{C}$ der Banach-Raum aller komplexwertigen, stetigen und beschränkten Funktionen auf E, versehen mit der gleichmäßigen Norm. Sei $\mathfrak{C}'$ der Dualraum von $\mathfrak{C}$, versehen mit der üblichen Norm. Ein Funktional $Q \in \mathfrak{C}'$ heißt ein straffes Maß, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset E$ und ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|\langle Q, f\rangle| \leqq \varepsilon$ ist für alle $f \in \mathfrak{C}$ mit $\|f\| \leqq 1$ und $|f(x)| \leqq \delta$ für $x \in K$. Eine Menge $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{C}'$ heißt gleichmäßig straff, wenn sie normbeschränkt ist und wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum K und ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|\langle Q, f\rangle| \leqq \varepsilon$ ist für alle $Q \in \mathfrak{Q}$ und $f \in \mathfrak{C}$ mit $\|f\| \leqq 1$, $|f| \leqq \delta$ auf K.

Ist $\mathfrak{Q}$ eine gleichmäßig straffe Menge, so ist der Abschluß von $\mathfrak{Q}$ in der Schwach*-Topologie von $\mathfrak{C}'$ gleichmäßig straff. Sei Q_k, $k = 1, 2, \ldots$ eine Folge gleichmäßig straffer Maße, so ist die Menge aller Häufungspunkte der Folge in der Schwach*-Topologie gleichmäßig straff. Eine gleichmäßig straffe Menge ist relativ kompakt in der Schwach*-Topologie.

Ein Funktional $Q \in \mathfrak{C}'$ heißt positiv, falls $\langle Q, f\rangle \geqq 0$ ist für alle $f \geqq 0$. Ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß P ist ein positives straffes Maß mit $\langle P, 1\rangle = 1$.

Auf positive straffe Maße auf vollständig regulären Räumen kann der Ausdehnungsmechanismus für positive Radonsche Maße übertragen werden. Wir schließen uns an die Darstellung der Ausdehnung Radonscher Maße im Buche von NEUMARK § 6 [*10*] an.

Wir gehen die einzelnen Abschnitte des § 6 durch und erörtern, was sich übertragen läßt.

Abschnitt 1. An die Stelle von T tritt bei uns E, an die Stelle von L tritt $\mathfrak{C}$. Die Definition des Integrals ist in die des straffen Maßes P, oder, wie wir auch sagen wollen, straffen Integrals abzuändern. $\mathfrak{C}$ besitzt alle aufgeführten Eigenschaften von L.

Abschnitt 2. Der Begriff des Trägers wird überflüssig. Lemma I und das fundamentale Lemma III übertragen sich. Lemma III folgt aus dem Satz von Dini.

Abschnitt 3. Anstelle von M^+ schreiben wir $\mathfrak{U}$, Lemma I überträgt sich. Lemma II kann ebenso bewiesen werden, wenn man den für vollständig reguläre Räume gültigen Satz benützt, daß es zu jedem Punkt $x \in E$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset E$ eine Funktion $f \in \mathfrak{C}$, $0 \leqq f \leqq 1$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f = 0$ auf A (s. [*8*], [*3*], S. 17).

Lemma III, IV und V übertragen sich.

Abschnitt 4, 5 und 6. Außer Lemma 5.III kann alles sinngemäß übertragen werden. Da $\langle P, 1\rangle$ endlich ist, ist das äußere Maß jeder Menge endlich.

Abschnitt 7. Man hat in X und XI anstelle von „eine Funktion $\in N^+$ mit bikompaktem Träger" zu setzen „eine beschränkte, von oben halbstetige Funktion". Der Rest gilt sinngemäß. Anstelle von „summierbar" sagen wir „integrierbar".

Abschnitt 8 und 9. Alle Lemmata 8.I bis 8.VI übertragen sich. Im Abschnitt 9 hat man zu beachten, daß bei Mengen der Begriff meßbar und summierbar (integrierbar) zusammenfällt, da das Maß des Gesamtraumes endlich ist. Lemma 9.I bis 9.VIII gelten sinngemäß. Bei Lemma 9.III hat man zu beachten, daß die charakteristische Funktion einer offenen (abgeschlossenen) Menge von unten (oben) halbstetig und beschränkt ist.

Abschnitt 10. Lemma I bis IX und XII gelten sinngemäß.

Die übrigen Abschnitte des § 6 werden wir nicht benötigen.

II. Straffe, fast positive Funktionale

Ein auf einem Raum von Funktionen über einer Grundmenge definiertes Funktional A heißt fast positiv bezüglich des Punktes x der Grundmenge, falls aus $f \geqq 0$ und $f(x) = 0$ folgt $\langle A, f\rangle \geqq 0$. Im folgenden ist die Grundmenge die Gerade, der Punkt x der Nullpunkt. Fast positive Funktionale wurden schon in einer anderen Arbeit behandelt ([*15*]). Hier interessiert vor allem die Fouriertransformation straffer, fast positiver Funktionale. Die fast positiven straffen Funktionale auf der Geraden haben viele Ähnlichkeiten mit den positiven beschränkten Radonschen Maßen.

Sei $\mathfrak{C}$ der Banach-Raum aller komplexwertigen stetigen und beschränkten Funktionen auf der Geraden, versehen mit der gleichmäßigen Norm, sei $\mathfrak{C}_0$ der Teilraum der im Unendlichen verschwindenden Funktionen. $\mathfrak{C}_0$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{C}$. Den Raum aller beschränkten, stetigen und n-mal stetig differenzierbaren Funktionen, bei denen die ersten n-Ableitungen beschränkt sind, nennen wir $\mathfrak{C}_n$.

Versehen mit der Norm

$$\|f\|_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \|f^{(k)}\|$$

bildet er einen Banach-Raum.

Eine Funktion f auf der Geraden heißt zweimal Taylorsch differenzierbar im Punkte 0, wenn f von der Form

$$f(x) = a + b\,x + \tfrac{1}{2} c\,x^2 + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

ist. Falls f in einer Umgebung des Nullpunktes zweimal stetig differenzierbar ist, ist f zweimal Taylorsch differenzierbar und $a = f(0)$, $b = f'(0)$, $c = f''(0)$. Wir übertragen diese Bezeichnungen auf beliebige zweimal Taylorsch differenzierbare Funktionen.

Die Menge aller stetigen, beschränkten, im Punkte 0 zweimal Taylorsch differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}$. Den Teilraum aller im Unendlichen verschwindenden Funktionen nennen wir $\mathfrak{T}_0$.

Wir setzen

$$\zeta(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\mathfrak{D} f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0) - f'(0)\,\zeta(x)}{\psi(x)} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} f''(0) & \text{für} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Sei $f \in \mathfrak{T}$, dann ist $\mathfrak{D} f \in \mathfrak{C}$, sei $f \in \mathfrak{T}_0$, dann ist $\mathfrak{D} f \in \mathfrak{C}_0$. Eine Funktion f liegt genau dann in $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{T}_0$, wenn sie von der Form

$$f = a + b\,\zeta + g\,\psi$$

mit komplexem a und b und mit $g \in \mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}_0$ ist.

Versehen mit der Norm

$$\|f\|_{\mathfrak{T}} = \max(|f(0)|, |f'(0)|, \|\mathfrak{D} f\|)$$

ist $\mathfrak{T}$ ein Banach-Raum.

Sei $f \in \mathfrak{C}_2$, dann ist

$$\mathfrak{D} f(x) = f(x) - f(0) + \frac{1}{x^2}\,(f(x) - f(0) - x\,f'(0))$$

$$= f(x) - f(0) + \frac{1}{x^2} \int_0^x \int_0^y f''(t)\,dt\,dy$$

und

$$\|\mathfrak{D} f\| \leqq 2\,\|f\| + \tfrac{1}{2}\,\|f''\|$$

und endlich

$$\|f\|_{\mathfrak{T}} \leqq 2\,\|f\|_2\,.$$

Sei A ein lineares Funktional auf $\mathfrak{T}$. Wir nennen A fast positiv (bezüglich des Nullpunktes), falls aus $f \in \mathfrak{T}$, $f \geqq 0$, $f(0) = 0$ folgt $\langle A, f\rangle \geqq 0$.

Ein fast positives Funktional heißt straff, wenn es stetig ist und wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ gibt, so daß $|\langle A, f\rangle| \leqq \varepsilon$ ist für alle $f \in \mathfrak{C}$, $\|f\| \leqq 1$ die in $[-\varrho, +\varrho]$ verschwinden (solche Funktionen gehören notwendigerweise zu $\mathfrak{T}$). Eine Menge $\mathfrak{A}$ fast positiver Funktionale heißt gleichmäßig straff, wenn sie normbeschränkt ist und die eben genannte Bedingung gleichmäßig befriedigt.

Die Abbildung

$$f \in \mathfrak{C} \to \langle Q, f \rangle = \langle A, \psi f \rangle$$

ist ein positives straffes Maß, m. a. W. ein positives beschränktes Radonsches Maß. Aus der Zerlegung

$$f = f(0) + f'(0)\zeta + \psi \mathfrak{D} f$$

folgt

$$\langle A, f \rangle = \langle A, 1 \rangle f(0) + \langle A, \zeta \rangle f'(0) + \langle Q, \mathfrak{D} f \rangle .$$

Satz 1. *Ein Funktional A auf $\mathfrak{T}$ ist genau dann fast positiv und straff, wenn es zwei komplexe Zahlen l und m und ein positives beschränktes Radonsches Maß Q gibt, so daß*

$$\langle A, f \rangle = l f(0) + m f'(0) + \langle Q, \mathfrak{D} f \rangle$$

ist.

Daß die Bedingung notwendig ist, haben wir eben gezeigt, daß sie hinreicht, ist leicht einzusehen.

Hilfssatz 1. *Sei $\mathscr{D}$ der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Dann ist $\mathscr{D}$ dicht in $\mathfrak{T}_0$ bezüglich der $\mathfrak{T}$-Norm.*

Beweis. Wir wählen eine Funktion $\alpha \in \mathscr{D}$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, die auf einer Umgebung des Nullpunktes gleich 1 ist und setzen $\beta(x) = x\alpha(x)$.

Sei $f \in \mathfrak{T}_0$, so zerlegen wir

$$f = f(0)\alpha + f'(0)\beta + \psi g$$

mit

$$g = \frac{1}{\psi}(f - f(0)\alpha - f'(0)\beta) \in \mathfrak{C}_0 ,$$

wobei der Quotient im Nullpunkt durch stetige Fortsetzung erklärt, also $= \frac{1}{2} f''(0)$ ist. Da $\mathscr{D}$ dicht in $\mathfrak{C}_0$ ist (vgl. [*11*], S. 22), gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h \in \mathscr{D}$ mit $\|g - h\| \leqq \varepsilon$. Wir setzen

$$f_1 = f(0)\alpha + f'(0)\beta + \psi h \in \mathscr{D}$$

und finden

$$\|f_1 - f\|_{\mathfrak{T}} \leqq \varepsilon .$$

Hilfssatz 2. *Sei A_0 ein fast positives Funktional auf $\mathscr{D}$, das bezüglich der von $\mathfrak{T}$ in $\mathscr{D}$ induzierten Topologie stetig ist. Dann gibt es genau ein stetiges fast positives Funktional A auf $\mathfrak{T}_0$, das A_0 fortsetzt.*

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit der Fortsetzung zu einem linearen, stetigen Funktional folgt daraus, daß $\mathscr{D}$ dicht in $\mathfrak{T}_0$ ist. Wir müssen noch zeigen, daß A fast positiv ist. Sei $f \in \mathfrak{T}_0$, $f \geqq 0$, $f(0) = 0$, dann ist $g = f/\psi \in \mathfrak{C}_0$, $g \geqq 0$. Wir wählen wie oben ein $h \in \mathscr{D}$ mit $\|h - g\| \leqq \varepsilon$. Dann ist

$$|\langle A, f \rangle - \langle A, \psi h \rangle| \leqq \varepsilon \|A\|_{\mathfrak{T}'} ,$$

und $\langle A, f \rangle \geqq -\varepsilon \|A\|_{\mathfrak{T}'}$.

Hilfssatz 3. *Sei A_0 ein fast positives, stetiges Funktional auf $\mathfrak{T}_0$. Dann gibt es genau ein straffes, fast positives Funktional A auf $\mathfrak{T}$, das A_0 fortsetzt.*

Beweis. Das Funktional

$$f \in \mathfrak{C}_0 \to \langle Q_0, f\rangle = \langle A_0, \psi f\rangle$$

ist ein positives, beschränktes Radonsches Maß und kann zu einem positiven straffen Maß Q auf $\mathfrak{C}$ ausgedehnt werden. Mit den Bezeichnungen des Beweises von Hilfssatz 1 setzen wir für $f \in \mathfrak{T}$

$$\langle A, f\rangle = f(0)\langle A_0, \alpha\rangle + f'(0)\langle A_0, \beta\rangle + \langle Q, g\rangle$$

wo

$$g = \frac{1}{\psi}(f - f(0)\alpha - f'(0)\beta)$$

ist.

A ist fast positiv. Daß A stetig ist, folgt aus

$$\| f - f(0)\alpha - f'(0)\beta\|_{\mathfrak{T}} \leqq k\| f\|_{\mathfrak{T}}.$$

Somit

$$\|\mathfrak{D}(g\psi)\| = \|g\| \leqq k\|f\|_{\mathfrak{T}},$$

$$|\langle Q, g\rangle| \leqq k\|f\|_{\mathfrak{T}}\langle Q, 1\rangle.$$

Daß A straff ist, ergibt sich aus der Straffheit von Q. Die Straffheit von A garantiert die Eindeutigkeit der Fortsetzung.

Wir bezeichnen mit E_ξ die Funktion $x \to e^{ix\xi}$.

Die Funktion

$$\xi \to \hat{A}(\xi) = \langle A, E_\xi\rangle$$

heißt die Fouriertransformierte des straffen, fast positiven Funktionals A.

Satz 2. *Sei A ein straffes, fast positives Funktional, dann ist die Fouriertransformierte A stetig und es gilt*

$$|\hat{A}(\xi)| \leqq 2(1 + |\xi| + \tfrac{1}{2}\xi^2)\|A\|_{\mathfrak{T}'}.$$

Beweis. Die Ungleichung folgt aus der Gleichung

$$\|E_\xi\|_2 = 1 + |\xi| + \tfrac{1}{2}\xi^2$$

sowie aus der Abschätzung $\|f\|_{\mathfrak{T}} \leqq 2\|f\|_2$ (s. o.).

Sei ξ_k eine gegen ξ konvergierende Folge. Da die Normen $\|E_{\xi_k}\|_{\mathfrak{T}} \leqq 2\|E_{\xi_k}\|_2$ beschränkt bleiben, bleibt $\|\mathfrak{D}E_{\xi_k}\|$ beschränkt. Die $\mathfrak{D}E_{\xi_k}$ konvergieren punktweise nach $\mathfrak{D}E_\xi$. Aus der Darstellung von A in Satz 1 und dem Satz von Lebesgue folgt $\hat{A}(\xi_k) \to \hat{A}(\xi)$.

Satz 3. *Sei A ein fast positives und straffes Funktional. Dann ist A genau dann reell, wenn $\hat{A}(\xi)^* = \hat{A}(-\xi)$ ist, wo der * die konjugiert komplexe Zahl bedeutet. Ist A reell, so gilt*

$$\mathrm{Re}\,\hat{A} \leqq \langle A, 1\rangle.$$

Beweis. Daß A reell ist, bedeutet, daß $\langle A, f\rangle$ reell ist, falls f reell ist. Ist A reell, so folgt unmittelbar $\hat{A}(\xi)^* = \hat{A}(-\xi)$. Gilt umgekehrt diese Gleichung, so ist nach Satz 1

$$\langle A, E_\xi\rangle = l + i\xi m + \langle Q, \mathfrak{D}E_\xi\rangle$$

und

$$\langle A, E_\xi\rangle^* = \langle A, E_{-\xi}\rangle = l - i\xi m + \langle Q, \mathfrak{D} E_{-\xi}\rangle = l - i\xi m + \langle Q, \mathfrak{D} E_\xi\rangle^*,$$

weil $\mathfrak{D} E_{-\xi} = (\mathfrak{D} E_\xi)^*$ und Q positiv, also reell ist.

Vergleicht man die letzten beiden Ausdrücke, so erhält man, daß l und m und somit A reell sind. Die behauptete Ungleichung folgt aus

$$0 \leqq \langle A, 1 - \cos x\xi\rangle = \langle A, 1\rangle - \operatorname{Re} \hat{A}(\xi).$$

Hilfssatz 4. *Sei φ eine Funktion auf der Geraden, sei $(1 + |\xi| + \xi^2/2)\varphi(\xi)$ integrierbar und sei*

$$\hat{\varphi}(x) = \int e^{ix\xi} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Dann ist $\hat{\varphi} \in \mathfrak{C}_2$ und

$$\langle A, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{A}, \varphi\rangle = \int \hat{A}(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi.$$

Beweis. Man führt den Beweis zunächst für Funktionen φ, die stetig mit kompaktem Träger sind. Man approximiert $\hat{\varphi}$ durch Riemann-Summen der Form

$$\sum \varphi(\xi_k) e^{ix\xi_k} \Delta_k,$$

nützt die Linearität von A aus und geht dann zur Grenze.

Sei φ eine Funktion und sei $(1 + |\xi| + \xi^2/2)\varphi(\xi)$ integrierbar, dann gibt es eine Folge φ_k von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, so daß

$$\int (1 + |\xi| + \xi^2/2) \,|\varphi_k(\xi) - \varphi(\xi)|\, d\xi \to 0$$

geht. Dann geht auch

$$\langle \hat{A}, \varphi_k\rangle \to \langle \hat{A}, \varphi\rangle,$$
$$\|\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}\|_2 \to 0,$$
$$\langle A, \hat{\varphi}_k\rangle \to \langle A, \hat{\varphi}\rangle.$$

Wir verwenden im folgenden öfters den Raum $\mathscr{S}$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die samt allen ihren Ableitungen schneller als jede Potenz von $\frac{1}{1+x^2}$ im Unendlichen abfallen (s. [*12*], S. 89). Der Raum $\mathscr{S}$ hat die schöne Eigenschaft, daß die Fouriertransformation

$$f \in \mathscr{S} \to \hat{f} : \hat{f}(x) = \int e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi$$

eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung von $\mathscr{S}$ auf $\mathscr{S}$ ist.

Satz 4. *Die Fouriertransformation ist für straffe, fast positive Funktionale umkehrbar eindeutig, d.h. aus $\hat{A} = 0$ folgt $A = 0$.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathscr{S}$, so gilt nach Hilfssatz 2

$$\langle A, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{A}, \varphi\rangle = 0.$$

Also verschwindet A auf $\mathscr{S}$ und somit auf $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$. Hieraus folgt nach Hilfssatz 2 und 3, daß $A = 0$ ist.

Satz 5. *Sei $F(\xi)$ eine stetige Funktion und es gebe ein Polynom $P(\xi)$ mit $|F| \leqq P$. Sei ferner $\langle F, f\rangle \geqq 0$ für alle $f \in \mathscr{S}$ mit $\hat{f} \geqq 0$, $\hat{f}(0) = 0$. Dann gibt es genau ein straffes, fast positives Funktional A, dessen Fouriertransformierte F ist.*

Beweis. Durch

$$\langle A_0, \hat{f}\rangle = \langle F, f\rangle$$

ist ein fast positives Funktional auf $\mathscr{S}$ und somit auf $\mathscr{D}$ erklärt. Wir zeigen, daß es in der durch $\mathfrak{T}$ in $\mathscr{D}$ induzierten Topologie stetig ist.

Sei

$$\gamma_\sigma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\xi^2/2\sigma^2},$$

$$\hat{\gamma}_\sigma(x) = e^{-x^2\sigma^2/2}.$$

Für $\sigma_1 \geqq \sigma_2$ ist $\hat{\gamma}_{\sigma_1} \leqq \hat{\gamma}_{\sigma_2}$ und $\hat{\gamma}_{\sigma_2} - \hat{\gamma}_{\sigma_1}$ eine Funktion $\geqq 0$, die im Nullpunkt verschwindet. Somit ist

$$\langle A_0, \hat{\gamma}_{\sigma_2} - \hat{\gamma}_{\sigma_1}\rangle \geqq 0.$$

Sei $f \in \mathscr{D}$, $f(0) = 0$ und $|f| \leqq 1 - e^{-x^2/2} = 1 - \hat{\gamma}_1$, und $g = f/\hat{\gamma}_1 \in \mathscr{D}$. Es ist $|g| \leqq 1$. Die Träger von f und g stimmen überein.

Sei $\sigma \geqq 0$ und $a_\sigma = \|g/\hat{\gamma}_\sigma\|$. Es ist

$$|g| \leqq a_\sigma \hat{\gamma}_\sigma$$

und

$$|f| \leqq a_\sigma \hat{\gamma}_\sigma(1 - \hat{\gamma}_1) = a_\sigma(\hat{\gamma}_\sigma - \hat{\gamma}_{1+\sigma}).$$

Weil A_0 fast positiv ist, gilt

$$|\langle A_0, f\rangle| \leqq a_\sigma \langle A_0, \hat{\gamma}_\sigma - \hat{\gamma}_{1+\sigma}\rangle = a_\sigma(\langle F, \gamma_\sigma\rangle - \langle F, \gamma_{1+\sigma}\rangle).$$

Man geht mit $\sigma \downarrow 0$. Dann geht $a_\sigma \to 1$ und man erhält

$$|\langle A_0, f\rangle| \leqq F(0) - \langle F, \gamma_1\rangle.$$

Sei nun $f \in \mathscr{D}$, $\|f\|_{\mathfrak{T}} \leqq 1$ und seien α und β die beim Beweis von Hilfssatz 1 verwandten Funktionen.

Wir zerlegen

$$f = f(0)\alpha + f'(0)\beta + g.$$

Es ist $\|g\|_{\mathfrak{T}} \leqq k\|f\|_{\mathfrak{T}}$ und somit $\|\mathfrak{D} g\| = \|g/\psi\| \leqq k\|f\|_{\mathfrak{T}}$. Also

$$|g| \leqq k\|f\|_{\mathfrak{T}}\psi \leqq k_1\|f\|_{\mathfrak{T}}\ (1 - \hat{\gamma}_1)$$

und

$$|\langle A_0, g\rangle| \leqq k_1\|f\|_{\mathfrak{T}}(F(0) - \langle F, \gamma_1\rangle).$$

Aus der Zerlegung und der letzten Abschätzung gewinnt man sofort die Stetigkeit von A_0. Nach Hilfssatz 1 und 2 gibt es genau eine stetige lineare Fortsetzung von A_0 von $\mathscr{S}$ auf $\mathfrak{T}_0$, die wir nach Hilfssatz 3 zu einem straffen, fast positiven Funktional A auf $\mathfrak{T}$ ausdehnen.

Wir müssen noch zeigen, daß $\hat{A} = F$ ist. Nach Hilfssatz 4 gilt

$$\langle \hat{A}(\xi), \gamma_\sigma(\xi - \xi_0)\rangle = \langle A, e^{ix\xi_0}\hat{\gamma}_\sigma(x)\rangle = \langle A_0, e^{ix\xi_0}\hat{\gamma}_\sigma(x)\rangle = \langle F, \gamma_\sigma(\xi - \xi_0)\rangle.$$

Man geht im ersten und letzten Ausdruck mit $\sigma \downarrow 0$ und erhält nach Satz 2, daß $\hat{A}(\xi_0) = F(\xi_0)$ ist.

Satz 6. *Sei A_i eine Folge fast positiver straffer Funktionale. Es gebe ein festes Polynom $P(\xi)$ mit $|\hat{A}_i| \leqq P$. Die $\hat{A}_i$ konvergieren punktweise gegen eine Funk-*

tion F, die in der Umgebung des Nullpunktes stetig ist. Dann sind die A_i gleichmäßig straff und konvergieren für alle $f \in \mathfrak{T}$ gegen ein straffes, fast positives Funktional A und $\hat{A} = F$.

Beweis. Für jedes $f \in \mathscr{S}$ konvergiert nach dem Satz von Lebesgue

$$\langle \hat{A}_i, f \rangle \to \langle F, f \rangle .$$

Nach Hilfssatz 4 konvergiert somit A_i auf $\mathscr{S}$.

Wir zeigen, daß die A_i gleichmäßig normbeschränkt sind. Sei $f \in \mathfrak{T}$ und seien α und β die Funktionen des Beweises von Hilfssatz 1.

Wir zerlegen

$$f = f(0)\alpha + f'(0)\beta + g .$$

Es gilt

$$\| g \|_{\mathfrak{T}} \leqq k \| f \|_{\mathfrak{T}} ,$$

$$\| \mathfrak{D} g \|_{\mathfrak{T}} = \| g/\psi \| \leqq k \| f \|_{\mathfrak{T}} ,$$

$$| g | \leqq k \| f \|_{\mathfrak{T}} \psi \leqq k_1 \| f \|_{\mathfrak{T}} (1 - e^{-x^2/2}) .$$

Weil die A_i fast positiv sind, ist

$$\begin{aligned} |\langle A_i, g \rangle| &\leqq k_1 \| f \|_{\mathfrak{T}} \langle A_i, 1 - e^{-x^2/2} \rangle \\ &= k_1 \| f \|_{\mathfrak{T}} (\hat{A}_i(0) - \langle A_i, e^{-x^2/2} \rangle) \leqq k_2 \| f \|_{\mathfrak{T}} , \end{aligned}$$

weil die $\hat{A}_i(0)$ und die $\langle A_i, f \rangle$ für $f \in \mathscr{S}$ konvergieren. Endlich ist

$$\begin{aligned} |\langle A_i, f \rangle| &\leqq |f(0)| \, |\langle A_i, \alpha \rangle| + |f'(0)| \, |\langle A_i, \beta \rangle| + |\langle A_i, g \rangle| \\ &\leqq k_3 \| f \|_{\mathfrak{T}} . \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, daß die A_i gleichmäßig straff sind.

Seien γ_σ die im Beweis von Satz 5 verwendeten Gauß-Funktionen und sei $\varepsilon > 0$. Wählen wir σ so klein, daß $|F(0) - \langle F, \gamma_{\sigma_1} \rangle| \leqq \varepsilon/2$ ist und i_0 so groß, daß

$$\begin{aligned} &|F(0) - \langle F, \gamma_{\sigma_1} \rangle - \hat{A}_i(0) - \langle \hat{A}_i, \gamma_{\sigma_1} \rangle| \\ &\qquad = |F(0) - \langle F, \gamma_{\sigma_1} \rangle - \langle A_i, 1 - \hat{\gamma}_{\sigma_1} \rangle| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

also

$$|\langle A_i, 1 - \hat{\gamma}_{\sigma_1} \rangle| \leqq \varepsilon$$

ist für alle $i \geqq i_0$. Für die endlich vielen $i \leqq i_0$ gibt es ein σ_2, so daß

$$\langle A_i, 1 - \hat{\gamma}_{\sigma_2} \rangle \leqq \varepsilon$$

ist. Setzen wir $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$, dann ist

$$\langle A_i, 1 - \hat{\gamma}_\sigma \rangle \leqq \varepsilon$$

für alle i. Da ε willkürlich war, folgt nach einer leichten Abschätzung die gleichmäßige Straffheit.

Weil $\mathscr{S}$ dicht in $\mathfrak{T}_0$ ist, folgt aus der Normbeschränktheit der A_i, daß die A_i für alle $f \in \mathfrak{T}_0$ konvergieren. Aus der gleichmäßigen Straffheit folgt die Konvergenz für alle $f \in \mathfrak{T}$. Durch $\langle A, f \rangle = \lim \langle A_i, f \rangle$ wird ein straffes fast positives Funktional A auf $\mathfrak{T}$ definiert. Es ist

$$\hat{A}(\xi) = \langle A, e^{ix\xi} \rangle = \lim \langle A_i, e^{ix\xi} \rangle = F(\xi) .$$

Satz 7. *Sei A_0 ein fast positives straffes Funktional und sei A_0 stetig bezüglich der von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{T}$ induzierten Normtopologie. Dann gibt es genau ein fast positives, straffes* Maß $A \in \mathfrak{C}'$, *das A_0 fortsetzt. A ist von der Form*

$$A = A' + a\,\delta .$$

Dabei ist A' ein positives straffes Maß, das dem Nullpunkt das Maß 0 zuordnet.

Beweis. Weil $\mathscr{D} \subset \mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{C}_0$ und $\mathscr{D}$ dicht in $\mathfrak{C}_0$ ist, ist $\mathfrak{T}_0$ dicht in $\mathfrak{C}_0$ und es gibt genau ein stetiges Funktional A_1 auf $\mathfrak{T}_0$, das A_0 fortsetzt. A_1 ist ein komplexwertiges beschränktes Maß und kann somit zu einem straffen Maß A auf $\mathfrak{C}$ ausgedehnt werden. Weil A_0 und A straff sind und auf $\mathfrak{T}_0$ übereinstimmen, stimmen sie auch auf $\mathfrak{T}$ überein.

Wir zeigen, daß A die angegebene Form hat. Daraus folgt die Fast-Positivität. Dazu dehnen wir A auf die borelmeßbaren, insbesondere also auf die von oben oder unten halbstetigen Funktionen aus. Sei $\chi(x) = 1$ für $x = 0$ und $\chi(x) = 0$ sonst. Sei $f \in \mathfrak{C}$, so zerlegen wir

$$\begin{aligned} f &= f(1-\chi) + f(x)\,\chi, \\ \langle A, f\rangle &= \langle A, f(1-\chi)\rangle + f(x)\,\langle A, \chi\rangle \\ &= \langle A', f\rangle + a\,\langle \delta, f\rangle . \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, daß A' positiv ist. Sei φ_k eine Folge von Funktionen aus $\mathfrak{C}_0$, $0 \leqq \varphi_k \leqq 1$, die auf einer (von k abhängigen) Umgebung von 0 gleich 1 sind, und konvergiere $\varphi_k \downarrow \chi$.

Sei $f \geqq 0$, so sind die $f(1-\varphi_k) \in \mathfrak{T}$, sind $\geqq 0$ und verschwinden im Nullpunkt. Es ist

$$\begin{aligned} 0 \leqq \langle A_0, f(1-\varphi_k)\rangle &= \langle A, f(1-\varphi_k)\rangle \\ &\uparrow \langle A, f(1-\chi)\rangle = \langle A', f\rangle . \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.

Seien A und B straffe Maße, m. a. W. beschränkte Radonsche Maße, so existiert die Faltung $A * B$ und es ist

$$\|A * B\| \leqq \|A\|\,\|B\|,$$

wo mit $\|A\|$ die $\mathfrak{C}'$-Norm gemeint ist.

Sei A ein straffes Maß, so existiert

$$\exp_* A = \delta + A + \frac{1}{2!}(A * A) + \frac{1}{3!}(A * A * A) + \cdots .$$

Sei $\hat{A}$ die Fouriertransformation von A, so gilt

$$(A * B)^\wedge = \hat{A}\,\hat{B} \quad \text{und} \quad (\exp_* A)^\wedge = \exp \hat{A} .$$

Satz 8. *Sei A ein fast positives reelles, straffes Maß, so ist* $\exp_* A$ *ein positives straffes Maß.*

Beweis. Es ist

$$A = A' + a\,\delta$$

und

$$\exp_* A = (\exp_* a\,\delta) * (\exp_* A') = e^{at} \exp_* A' .$$

Weil a reell ist, ist $e^{at} \geqq 0$. Weil A' positiv ist, ist es auch $\exp_* A'$.

Satz 9. *Sei A ein fast positives, straffes reelles Funktional auf $\mathfrak{T}$. Dann gibt es genau ein straffes positives Maß C auf R mit*

$$\hat{C} = \exp \hat{A}\,.$$

Wir definieren

$$C = \exp_* A$$

und bleiben damit im Rahmen der eben gegebenen Definition, falls A ein fast positives straffes Maß ist.

Beweis. Die Widerspruchsfreiheit der Definition ist klar. Sei $f \in \mathfrak{T}$, so hat A nach Satz 1 die Darstellung

$$\langle A, f\rangle = l f(0) + m f'(0) + \langle Q, \mathfrak{D} f\rangle\,.$$

Sei χ die im Beweis von Satz 7 verwandte Funktion.

Wir zerlegen

$$\langle Q, f\rangle = \langle Q, f\chi\rangle + \langle Q, f(1-\chi)\rangle = \sigma^2 f(0) + \langle Q_0, f\rangle\,.$$

Es ist

$$\langle A, f\rangle = l f(0) + m f'(0) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 f''(0) + \langle Q_0, \mathfrak{D} f\rangle\,.$$

Sei

$$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| \geqq \varepsilon \\ 0 & \text{für} \quad |x| < \varepsilon\,. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \langle A_\varepsilon, f\rangle &= l f(0) + m f'(0) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 f''(0) + \langle Q, \alpha_\varepsilon \mathfrak{D} f\rangle \\ &= l_\varepsilon f(0) + m_\varepsilon f'(0) + \frac{\sigma^2}{2} f''(0) + \langle P_\varepsilon, f\rangle \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} l_\varepsilon &= l - \left\langle Q_0, \frac{\alpha_\varepsilon}{\psi}\right\rangle, \\ m_\varepsilon &= m - \left\langle Q_0, \frac{\alpha_\varepsilon}{x}\right\rangle, \\ \langle P_\varepsilon, f\rangle &= \left\langle Q, \frac{\alpha_\varepsilon}{\psi} f\right\rangle. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \langle B_\varepsilon, f\rangle = f(0)\, l_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(f(\varepsilon^2 m_\varepsilon) - f(0)\right) + \\ + \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon^2}\left(f(\varepsilon) + f(-\varepsilon) - 2f(0)\right) + \langle P_\varepsilon, f\rangle\,. \end{aligned}$$

Die B_ε sind fast positive straffe, reelle Maße. Somit ist $\exp_* B_\varepsilon = C_\varepsilon$ ein positives Maß mit der Fouriertransformierten $\exp \hat{B}_\varepsilon = \hat{C}_\varepsilon$. Wir zeigen, daß die $\hat{B}_\varepsilon$ gegen $\hat{A}$ konvergieren für $\varepsilon \to 0$. Daraus folgt dann (s. [*6*], S. 51), daß die C_ε für jedes $f \in \mathfrak{C}$ gegen ein straffes positives Maß konvergieren, dessen Fouriertransformierte $\hat{C} = \lim \hat{C}_\varepsilon = \exp \hat{A}$ ist.

Wir beweisen, daß $\langle B_\varepsilon, f\rangle \to \langle A, f\rangle$ konvergiert für $f \in \mathfrak{T}$. Man zerlegt

$$f(x) = a + b\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2}\, g(x) \quad \text{mit} \quad g \in \mathfrak{C}$$

und rechnet die Konvergenz aus unter Berücksichtigung der Tatsache, daß

$$\varepsilon\left\langle Q, \frac{\alpha_\varepsilon}{x}\right\rangle \to 0$$

geht, weil $|\varepsilon\alpha_\varepsilon/x| \leqq 1$ ist und punktweise gegen Null konvergiert.

III. Eine gewisse Funktionenklasse

Die folgenden Überlegungen bilden eine Entlastung des Kapitels VIII, das der Diskussion der Andersonschen Formel gewidmet ist. Es erscheint zweckmäßig, einen Teil der Überlegungen vorweg in einem leicht allgemeineren Rahmen zu erörtern.

Sei φ eine integrierbare Funktion auf der Geraden. Die Funktion

$$s \to \exp i \int_0^t \varphi(u+s)\,du - 1$$

ist dem Betrage nach kleiner als

$$\int_0^{|t|} |\varphi(u+s)|\,du$$

und somit integrierbar. Wir setzen

$$G(t) = \int \left(\exp i \int_0^t \varphi(u+s)\,du - 1\right) ds$$

und diskutieren G.

Satz 1. *Die Funktion $t \to G(t)$ ist stetig. Es gilt*

$$G(t) = G(-t)^*$$

und

$$|G(t)| \leqq |t| \int |\varphi|\,.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}|G(t)| &\leqq \int \int_0^{|t|} |\varphi(u+s)|\,du\,ds \\ &= \int_0^{|t|} \int |\varphi(u+s)|\,ds\,du \\ &= |t| \int |\varphi|\,.\end{aligned}$$

Konvergiere $t_k \to t$, so gilt

$$\begin{aligned}|G(t_k) - G(t)| &= \left|\int \left(e^{i\int_0^{t_k}} - e^{i\int_0^{t}}\right) ds\right| \leqq \\ &\leqq \int \left|e^{i\int_t^{t_k}} - 1\right| ds \leqq \int \left|\int_t^{t_k} \varphi(u+s)\,du\right| ds \leqq \\ &\leqq |t_k - t| \int |\varphi| \to 0\,.\end{aligned}$$

Sei $t \geqq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}G(-t) &= \int \left[\exp\left(-i \int_{-t}^{0} \varphi(s+u)\,du\right) - 1\right] ds \\ &= \int \left[\exp\left(-i \int_0^t \varphi(s+u)\,du\right) - 1\right] ds \\ &= G(t)^*\end{aligned}$$

vermöge der Variablentransformation

$$u' = u + t\,, \quad s' = s - t\,.$$

Wir nennen eine Funktion f auf der Geraden differenzierbar, wenn es eine lokalintegrierbare Funktion g gibt, mit

$$f(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau + f(0)$$

und schreiben $g = \dot{f}$. Die Funktion f ist stetig und g ist durch f fast überall festgelegt. Falls $\dot{f}$ wieder differenzierbar ist, heißt f zweimal differenzierbar und es ist

$$f(t) = \int_0^t \int_0^\tau \ddot{f}(u)\, du\, d\tau + \dot{f}(0)\, t + f(0)\,.$$

Hilfssatz 1. *Die Funktion $G(t)$ ist zweimal differenzierbar und es ist*

$$\dot{G}(t) = i \int \varphi(s)\, e^{i \int_0^t \varphi(s-u)\, du}\, ds\,,$$

$$\ddot{G}(t) = -\,\alpha * \alpha^\dagger(t)$$

mit

$$\alpha(t) = \varphi(t)\, e^{i \int_0^t \varphi(u)\, du}$$

und

$$\alpha^\dagger(t) = \alpha(-t)^*\,.$$

Der $*$ in $\alpha * \alpha^\dagger$ bedeutet die Faltung. Sei $f \in \mathscr{S}$, so gilt

$$\langle G, \ddot{f} \rangle = -\,\langle \alpha * \alpha^\dagger, f \rangle\,.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß φ stetig mit kompaktem Träger ist. Dann ist $\int_0^t \varphi(s+u)\, du$ nach t stetig differenzierbar und nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$G(t) = \int \int_0^t i\, \varphi(s+\tau)\, e^{i \int_0^\tau \varphi(u+s)\, du}\, d\tau\, ds\,.$$

Nach Fubini vertauscht man die Integralzeichen. G ist differenzierbar und man erhält nach einer Variablentransformation

$$\dot{G} = i \int \varphi(s)\, e^{i \int_0^t \varphi(s-u)\, du}\, ds.$$

Man weist ebenso nach, daß $\dot{G}$ differenzierbar ist und findet

$$\begin{aligned}
\ddot{G}(t) &= -\int \varphi(s)\, \varphi(s-t)\, e^{i \int_0^t \varphi(s-u)\, du}\, ds \\
&= -\int \varphi(s)\, e^{i \int_0^s \varphi(u)\, du}\, \varphi(s-t)\, e^{-i \int_0^{s-t} \varphi(u)\, du}\, ds \\
&= -\,\alpha * \alpha^\dagger(t)\,.
\end{aligned}$$

Sei φ integrierbar, dann gibt es eine Folge φ_k stetiger Funktionen mit kompaktem Träger mit

$$\int |\varphi - \varphi_k| \to 0 .$$

Es ist

$$|G_k(t) - G(t)| \leqq |t| \int |\varphi_k - \varphi| \to 0$$

und

$$\begin{aligned}\int |\alpha_k - \alpha| &= \\ &= \int \left| \varphi_k e^{i\int_0^t \varphi_k} - \varphi e^{i\int_0^t \varphi_k} + \varphi e^{i\int_0^t \varphi_k} - \varphi e^{i\int_0^t \varphi} \right| dt \\ &\leqq \int |\varphi_k - \varphi| + \int |\varphi(t)| \left| e^{i\int_0^t \varphi_k} - e^{i\int_0^t \varphi} \right| dt .\end{aligned}$$

Da $\int_0^t \varphi_k \to \int_0^t \varphi$ geht, konvergiert der ganze Ausdruck nach dem Satz von Lebesgue gegen Null. Ebenso zeigt man, daß

$$\begin{aligned}\dot{G}_k(t) &= i \int \varphi_k(s)\, e^{i\int_0^t \varphi_k(s-u)\,du}\, ds \\ &\to i \int \varphi(s)\, e^{i\int_0^t \varphi(s-u)\,du}\, ds\end{aligned}$$

konvergiert.

Man betrachtet die Gleichungen

$$\begin{aligned}G_k(t) &= -\int_0^t\int_0^\tau \alpha_k * \alpha_k^\dagger(u)\,du\,d\tau + \dot{G}_k(0)\,t + G_k(0)\\ \dot{G}_k(t) &= -\int_0^t \alpha_k * \alpha_k^\dagger(\tau)\,d\tau + \dot{G}_k(0)\\ \int G_k(t)\,\ddot{f}(t)\,dt &= -\int \alpha_k * \alpha_k^\dagger(t)\,f(t)\,dt\end{aligned}$$

und geht mit k zur Grenze. Die linke Seite der letzten Gleichung konvergiert nach dem Satz von Lebesgue. Denn nach Satz 1 gilt $|G_k(t)| \leqq |t| \int |\varphi_k|$. Mit Hilfe dieser Überlegungen gewinnt man schnell die Behauptung des Satzes.

Satz 2. *Die Funktion G ist die Fouriertransformierte eines fast positiven straffen Funktionals A.*

Beweis. Weil G stetig und durch ein Polynom beschränkt ist (Satz 1), müssen wir nur zeigen, daß aus

$$\begin{aligned}&f \in \mathscr{S}\\ &\hat{f}(\nu) = \int e^{i\nu t} f(t)\,dt \geqq 0\\ &\hat{f}(0) = 0\end{aligned}$$

folgt $\langle G, \hat{f}\rangle \geqq 0$ (s. Satz II.5). Sei $\hat{f}$ eine solche Funktion. Dann ist $\hat{f}/\nu^2 = \hat{g}$ eine Funktion $\geqq 0$ aus $\mathscr{S}$.

Es ist $\hat{f} = \nu^2 \hat{g}$ oder $f = -\ddot{g}$.

Es gilt

$$\langle G, f\rangle = -\langle G, \ddot{g}\rangle = \langle \alpha * \alpha^\dagger, g\rangle = \langle a, \hat{g}\rangle$$

mit

$$a(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\nu t} (\alpha * \alpha^\dagger)(t)\, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int e^{-i\nu t} \alpha(t)\, dt \right|^2 \geqq 0 .$$

Also ist $\langle a, \hat{g} \rangle \geqq 0$.

Satz 3. *Für $t \to \infty$ konvergiert*

$$\frac{G(t)}{t} \to e^{i \int \varphi} - 1 .$$

Beweis. Da $G(0) = 0$ und $\dot{G}(0) = i \int \varphi$ ist, gilt

$$G(t) = -\int_0^t (t - \tau)(\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\, d\tau + i\, t \int \varphi$$

und

$$\frac{G(t)}{t} = -\int_0^\infty (\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\, d\tau + i \int \varphi +$$
$$+ \int_t^\infty (\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\, d\tau + \int_0^t \frac{\tau}{t} (\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\, d\tau .$$

Der dritte Term geht gegen Null, weil $\alpha * \alpha^\dagger$ integrierbar ist. Sei

$$f_t(\tau) = \begin{cases} \tau/t & \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq t. \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $0 \leqq f_t \leqq 1$ und $f_t \to 0$ für $t \to \infty$. Wegen des Satzes von Lebesgue geht

$$\int_0^t \frac{\tau}{t} (\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\, d\tau = \int f_t(\tau)(\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\, d\tau \to 0 .$$

Also konvergiert

$$\frac{G(t)}{t} \to -\int_0^\infty (\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\, d\tau + i \int \varphi .$$

Der letzte Ausdruck ist aber gleich

$$\lim_{t \to \infty} \dot{G}(t) = i \int \varphi(s)\, e^{i \int_0^\infty \varphi(s-u)\, du}\, ds$$
$$= i \int \varphi(s)\, e^{i \int_{-\infty}^s \varphi(u)\, du} = \left(e^{i \int_{-\infty}^s \varphi(u)\, du} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = e^{i \int \varphi} - 1 .$$

Satz 4. *Wir machen die zusätzliche Annahme, daß $\int |t|\, |\varphi(t)|\, dt < \infty$ ist. Dann ist für $t \to \infty$*

$$G(t) = t(e^{i \int \varphi} - 1) +$$
$$+ \int \left(e^{i \int_s^\infty \varphi(u)\, du} + e^{i \int_{-\infty}^s \varphi(u)\, du} - e^{i \int \varphi} - 1 \right) ds + \mathrm{o}(1) .$$

Ferner gilt für alle $t \geqq 0$

$$|G(t) - t(e^{i \int \varphi} - 1)| \leqq \int |\varphi| \int |t\, \varphi(t)|\, dt .$$

Beweis. Es ist

$$G(t) = -\int_0^t (t-\tau)\,(\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau + i\,t\int\varphi$$

(1) $$= -t\int_0^\infty (\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau + i\,t\int\varphi + \int_0^\infty \tau(\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau +$$

$$+\, t\int_t^\infty \alpha*\alpha^\dagger(\tau)\,d\tau - \int_t^\infty \tau(\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau\,.$$

Es gilt

$$|\alpha*\alpha^\dagger|(t) \leqq \int|\varphi(s)|\,|\varphi(s-t)|\,ds$$

und

$$\left|\int_0^\infty \tau\,(\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau\right| \leqq \int_0^\infty \tau\,|\alpha*\alpha^\dagger|\,(\tau)\,d\tau$$

$$\leqq \int_0^\infty\!\!\int (|s| + |\tau - s|)\,|\varphi(s)|\,|\varphi(s-\tau)|\,ds\,d\tau\,.$$

Vermöge der Transformation $s' = s - \tau$, $\tau' = -\tau$ gilt

$$\int_0^\infty\!\!\int |\tau - s|\,|\varphi(s)|\,|\varphi(s-\tau)|\,ds\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^0\!\!\int |s|\,|\varphi(s)|\,|\varphi(s-\tau)|\,ds\,d\tau\,.$$

Somit ist

$$\int_0^\infty \tau\,|\alpha*\alpha^\dagger|\,(\tau)\,d\tau \leqq \int\!\!\int |s|\,|\varphi(s)|\,|\varphi(s-\tau)|\,ds\,d\tau$$

(2) $$= \int|\varphi|\int|s|\,|\varphi(s)|\,ds\,.$$

Aus der Abschätzung (2) folgt, daß der letzte Term von Gleichung (1) gegen Null geht. Man schätzt den vorletzten ab und erhält

(3) $$\left|t\int_t^\infty (\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau\right| \leqq \int_t^\infty \tau\,|\alpha*\alpha^\dagger|\,(\tau)\,d\tau\,.$$

Somit geht

(4) $$G(t) - t(e^{i\int\varphi} - 1) \to \int_0^\infty \tau(\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau\,.$$

Nach (1), (3) und (2) ist

$$|G(t) - t(e^{i\int\varphi} - 1)|$$

$$\leqq \left|\int_0^t \tau(\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau\right| + \left|t\int_t^\infty \alpha*\alpha^\dagger(\tau)\,d\tau\right| \leqq$$

$$\leqq \int_0^\infty \tau\,|(\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)|\,d\tau \leqq$$

$$\leqq \int|\varphi|\int|t\,\varphi(t)|\,dt\,.$$

Wir berechnen

$$\int_0^\infty \tau(\alpha*\alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \int s\,\alpha(s)\,\alpha^\dagger(\tau - s)\,ds\,d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty \int (\tau - s)\,\alpha(s)\,\alpha^\dagger(\tau - s)\,ds\,d\tau$$

$$= \int s\,\alpha(s) \int_0^\infty \alpha^\dagger(\tau - s)\,d\tau\,ds +$$

$$+ \int s\,\alpha^\dagger(s) \int_0^\infty \alpha(\tau - s)\,d\tau\,ds\,.$$

Es ist

$$\int_0^\infty \alpha^\dagger(\tau - s)\,ds = i\,e^{-i\int_0^s \varphi} - i\,e^{i\int_0^\infty \varphi}$$

$$\int_0^\infty \alpha(\tau - s)\,ds = -\,i\,e^{i\int_0^\infty} + i\,e^{-i\int_{-s}^0}$$

und

$$\int_0^\infty \tau(\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau =$$

$$= i \int s\,\varphi(s)\,ds - i \int s\,\varphi(s)\,e^{i\int_{-\infty}^s}\,ds -$$

$$-\,i \int s\,\varphi(-s)\,e^{i\int_{-s}^\infty}\,ds + i \int s\,\varphi(-s)\,ds$$

$$= \int s \left(-\,i\,\varphi(s)\,e^{i\int_{-\infty}^s} + i\,\varphi(s)\,e^{i\int_s^\infty}\right) ds\,.$$

Wir betrachten die Funktion

$$f(s) = e^{i\int_{-\infty}^s} + e^{i\int_s^\infty} - e^{i\int_{-\infty}^{+\infty}} - 1$$

und zeigen, daß $f(s)$ integrierbar ist und daß $s f(s) \to 0$ für $s \to \infty$ und $s \to -\infty$. Für $s > 0$ formen wir um

$$f(s) = e^{i\int_{-\infty}^{+\infty}} \left(e^{-i\int_s^\infty} - 1\right) + \left(e^{i\int_s^\infty} - 1\right)$$

und schätzen ab

$$|f(s)| \leqq 2 \int_s^\infty |\varphi(u)|\,du\,.$$

Daraus folgt die Existenz des Integrals $\int_0^\infty |f(s)|\,ds$ sowie $s f(s) \to 0$ für $s \to \infty$. Man macht dasselbe noch für $s < 0$.

Mit Hilfe einer partiellen Integration erhält man endlich

$$\int_0^\infty \tau(\alpha * \alpha^\dagger)(\tau)\,d\tau = -\int s\,f'(s)\,ds = \int f(s)\,ds\,.$$

Die im Satz genannte Entwicklung von $G(t)$ findet man schon bei ANDERSON und TALMAN [2], doch ist sie etwas anders und nur im Spezialfall bewiesen.

IV. Existenz des statistischen Modells eines unendlich ausgedehnten Gases

Sei $\mathfrak{X}$ ein lokal kompakter Raum. $\mathfrak{X}$ sei nicht kompakt, aber abzählbar im Unendlichen. Sei λ ein nicht beschränktes positives Radonsches Maß auf $\mathfrak{X}$. Sei $\mathfrak{L}$ die Menge der stetigen, reellwertigen Funktionen mit kompaktem Träger in $\mathfrak{X}$. Ein positives Radonsches Maß auf $\mathfrak{X}$ ist ein positives lineares Funktional auf $\mathfrak{L}$. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge der positiven Radonschen Maße auf $\mathfrak{X}$, versehen mit der Topologie der Konvergenz für alle $\varphi \in \mathfrak{L}$. Der Raum $\mathfrak{M}$ ist separiert und besitzt eine uniforme Struktur, ist also vollständig regulär.

Sei $\mathfrak{X}_k$ eine Folge aufsteigender Kompakta

$$\mathfrak{X}_1 \subset \mathring{\mathfrak{X}}_2 \subset \mathfrak{X}_2 \subset \mathring{\mathfrak{X}}_3 \subset \mathfrak{X}_3 \subset \cdots$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{X}_k = \mathfrak{X}$$

$$\lambda(\mathfrak{X}_1) > 0\,.$$

Eine solche Folge existiert, weil $\mathfrak{X}$ im Unendlichen abzählbar ist. Es gebe ferner eine Folge positiver ganzer Zahlen n_k mit

$$\frac{n_k}{\lambda(\mathfrak{X}_k)} \to N\,,$$

wo N eine endliche Zahl ist.

Wir übernehmen die Bezeichnungen von Kapitel I mit $E = \mathfrak{M}$.

Die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_{n_k}) \in (\mathfrak{X}_k)^{n_k} \to \sum_{l=1}^{n_k} \delta_{x_l} \in \mathfrak{M}$$

ist stetig und das Bild $K_k \subset \mathfrak{M}$ von $(\mathfrak{X}_k)^{n_k}$ vermöge dieser Abbildung kompakt. Sei $f \in \mathfrak{C}$, so ist die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_{n_k}) \to f\left(\sum_{l=1}^{n_k} \delta_{x_l}\right)$$

stetig und beschränkt. Wir setzen

$$\langle P_k, f\rangle = \frac{1}{\lambda(\mathfrak{X}_k)^{n_k}} \int\limits_{\mathfrak{X}_k} \cdots \int\limits_{\mathfrak{X}_k} f\left(\sum_{l=1}^{n_k} \delta_{x_l}\right) \lambda(dx_1) \ldots \lambda(dx_{n_k})\,.$$

Das Funktional P_k ist positiv und $\langle P_k, 1\rangle = 1$. Aus $\|f\| \leqq 1$ folgt $\langle P_k, f\rangle \leqq 1$. Ist $|f(\mu)| \leqq \varepsilon$ für $\mu \in K_k$, so gilt $\langle P_k, f\rangle \leqq \varepsilon$. Somit ist P_k ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{M}$.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz. *Die Folge P_k ist gleichmäßig straff und konvergiert für jedes $f \in \mathfrak{C}$ gegen ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathfrak{M}$.*

Das Maß P zusammen mit $\mathfrak{M}$ bildet bei Spezifikation von $\mathfrak{X}$ und λ das statistische Modell, das unseren Überlegungen zugrunde liegt.

Wir führen den Beweis in drei Schritten.

Hilfsbehauptung 1. *Die P_k sind gleichmäßig straff.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und sei

$$C = \sup_{k=1,2,\ldots} \frac{n_k}{\lambda(\mathfrak{X}_k)}\,, \quad C < \infty\,.$$

Zu jedem $k = 1, 2, \ldots$ gibt es eine ganze Zahl m_k, so daß

$$m_k \geqq \max_{1 \leqq p \leqq k} n_p$$

und

$$\sum_{l=m_k+1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\lambda(\mathfrak{X}_k)\, C)^l \leqq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-k}$$

ist. Wir betrachten die Menge

$$K = \{\mu \in \mathfrak{M} : \mu(\mathfrak{X}_k) \leqq m_k \quad \text{für} \quad k = 1, 2 \ldots\}$$

und zeigen, daß sie kompakt ist.

Sei $\varphi \in \mathfrak{L}$, dann bilden die $\mathring{\mathfrak{X}}_k$ eine offene Überdeckung des Trägers von φ. Es gibt also ein k, so daß $\mathfrak{X}_k \supset \mathring{\mathfrak{X}}_k \supset \operatorname{Tr} \varphi$. Also ist

$$a_\varphi = \sup_{\mu \in K} |\langle \mu, \varphi \rangle| \leqq m_k \|\varphi\| < \infty .$$

Nach dem Vorbild von LOOMIS ([9], S. 22) fassen wir das Funktional μ als Element des Produktraumes $\prod\limits_{\varphi \in \mathfrak{L}} R_\varphi$ auf, wo R_φ jeweils die reelle Gerade bedeutet.

Sei $A_\varphi = [-a_\varphi, +a_\varphi]$, so liegt K im kompakten Teilraum $\prod A_\varphi$ von $\prod R_\varphi$. Wie bei LOOMIS ausgeführt wird, zeigt man, daß K in $\prod R_\varphi$ abgeschlossen ist. Daraus folgt die Kompaktheit.

Wir zeigen jetzt, daß $|\langle P_k, f \rangle| \leqq \varepsilon$ ist für alle k und für $f \in \mathfrak{C}$, $\|f\| \leqq 1$ und $|f| \leqq \varepsilon/2$ auf K. Wir definieren die Funktion f_k auf $(\mathfrak{X}_k)^{n_k}$ durch

$$f_k(x_1, \ldots, x_{n_k}) = f\left(\sum_{l=1}^{n_k} \delta_{x_l}\right).$$

Sei λ_k das Produktmaß

$$\lambda_k = \left(\frac{\lambda}{\lambda(\mathfrak{X}_k)}\right)^{\otimes n_k}.$$

Dann ist laut Definition

$$\langle P_k, f \rangle = \langle \lambda_k, f_k \rangle .$$

Sei $\mathfrak{K}_k$ die Menge aller Punkte $(x_1, \ldots, x_{n_k})$ aus $(\mathfrak{X}_k)^{n_k}$ mit $\sum\limits_{l=1}^{n_k} \delta_{x_l} \in K$. Als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist $\mathfrak{K}_k$ kompakt.

Es ist

$$\begin{aligned} |\langle \lambda_k, f_k \rangle| &= \left| \int f_k \, d\lambda_k \right| \leqq \int |f_k| \, d\lambda_k = \\ &= \int_{\mathfrak{K}_k} |f_k| \, d\lambda_k + \int_{(\mathfrak{X}_k)^{n_k} - \mathfrak{K}_k} |f| \, d\lambda_k \leqq \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda_k((\mathfrak{X}_k)^{n_k} - \mathfrak{K}_k) . \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\lambda_k(\mathfrak{X}_k^{n_k} - \mathfrak{K}_k) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle k ist. Nun bedeutet $\sum \delta_{x_l} \in K$, daß in $\mathfrak{X}_p$ höchstens m_p der x_l enthalten sind für alle $p = 1, 2, \ldots$ Die Menge $\mathfrak{X}_k^{n_k} - \mathfrak{K}_k$ besteht aus den Folgen $x_1, \ldots, x_{n_k}$ $(x_i \in \mathfrak{X}_k)$, bei denen es ein p gibt, so daß in $\mathfrak{X}_p$ mehr als m_p der x_i enthalten sind.

Sei $\mathfrak{A}_p$ die Menge aller Folgen $(x_1, \ldots, x_{n_k}) \in \mathfrak{X}_k^{n_k}$, bei denen mehr als m_p Punkte in $\mathfrak{X}_p$ enthalten sind. Dann ist

$$\mathfrak{X}_k^{n_k} - \mathfrak{K}_k \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathfrak{A}_p$$

und

$$\lambda_k(\mathfrak{X}_k^{n_k} - \mathfrak{K}_k) \leqq \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_k(\mathfrak{A}_p).$$

Sei $p \geqq k$. Dann ist $\mathfrak{X}_p \supset \mathfrak{X}_k$ und die Anzahl der Punkte der Folge $(x_1, \ldots, x_{n_k})$, $x_i \in \mathfrak{X}_k$, die in $\mathfrak{X}_p$ liegen, ist n_k für alle solche Folgen. Nach Voraussetzung ist $m_p \geqq n_k$. Somit ist $\mathfrak{A}_p = \emptyset$ für $p \geqq k$.

Sei $p < k$. Dann liegt $\mathfrak{X}_p \subset \mathfrak{X}_k$. Das λ_k-Maß der Folgen $(x_1, \ldots, x_{n_k})$, $x_i \in \mathfrak{X}_k$, bei denen genau j der x_i in $\mathfrak{X}_p$ liegen, ist, wie eine einfache Überlegung zeigt,

$$\binom{n_k}{j}\left(\frac{\lambda(\mathfrak{X}_p)}{\lambda(\mathfrak{X}_k)}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda(\mathfrak{X}_p)}{\lambda(\mathfrak{X}_k)}\right)^{n_k - j} \leqq \frac{n_k^j}{j!} \frac{\lambda(\mathfrak{X}_p)^j}{\lambda(\mathfrak{X}_k)^j} \leqq \frac{1}{j!}\,[C\,\lambda(\mathfrak{X}_p)]^j.$$

Also ist

$$\lambda_k(\mathfrak{A}_p) = \sum_{j=m_p+1}^{\infty} \frac{1}{j!}\,(C\,\lambda(\mathfrak{X}_p))^j \leqq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-p}.$$

Endlich gilt

$$\lambda_k(\mathfrak{X}_k^{n_k} - \mathfrak{K}_k) \leqq \sum_{p=1}^{k-1} \lambda_k(\mathfrak{A}_p) + \sum_{p=k}^{\infty} \lambda_k(\mathfrak{A}_p) \leqq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-p} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit ist die erste Hilfsbehauptung bewiesen.

Wir kommen nun zum zweiten Schritt.

Sei $\psi \in \mathfrak{L}$, $\psi \geqq 0$. Wir bezeichnen mit $\mu\psi$ das Maß

$$\varphi \in \mathfrak{L} \to \langle \mu, \psi\varphi \rangle$$

wo $\psi\varphi$ das gewöhnliche Produkt der Funktionen ψ und φ ist. Die Abbildung $\mu \to \mu\psi$ ist eine stetige Abbildung von $\mathfrak{M}$ in sich. Sei $f \in \mathfrak{C}$, so bezeichnen wir mit f_ψ die Funktion $\mu \to f(\mu\psi)$.

Hilfsbehauptung 2. *Sei $\psi \in \mathfrak{L}$, $\psi \geqq 0$ und $f \in \mathfrak{C}$. Dann konvergiert für $k \to \infty$*

$$\langle P_k, f_\psi \rangle \to f(0) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{N^l}{l!} e^{-N\lambda(\mathfrak{A})} \int_{\mathfrak{A}} \cdots \int_{\mathfrak{A}} f\left(\sum_{j=1}^{l} \psi(x_j)\,\delta_{x_j}\right) \lambda(dx_1) \ldots \lambda(dx_l),$$

wo $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{X}$ ein Kompaktum ist, das den Träger von ψ enthält.

Beweis. Da

$$\left(\sum \delta_{x_j}\right) \psi = \sum \psi(x_j)\,\delta_{x_j}$$

ist, ist

$$\langle P_k, f_\psi \rangle = \frac{1}{\lambda(\mathfrak{X}_k)^{n_k}} \int_{\mathfrak{X}_k} \cdots \int_{\mathfrak{X}_k} f\left(\sum_{j=1}^{n_k} \psi(x_j)\,\delta_{x_j}\right) \lambda(dx_1) \ldots \lambda(dx_{n_k}).$$

Wir wählen k_0 so groß, daß $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{X}_{k_0}$ ist, und zerlegen für $k \geqq k_0$ die Menge $\mathfrak{X}_k$ in $\mathfrak{X}_k - \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$. Berücksichtigt man die Symmetrie des Integranden in $x_1, \ldots, x_{n_k}$, so gilt

$$\int_{\mathfrak{X}_k} \cdots \int_{\mathfrak{X}_k} = \sum_{l=0}^{n_k} \binom{n_k}{l} \int_{\mathfrak{A}} \cdots \int_{\mathfrak{A}} \int_{\mathfrak{X}_k - \mathfrak{A}} \cdots \int_{\mathfrak{X}_k - \mathfrak{A}},$$

wenn die ersten l Integrale über $\mathfrak{A}$ und die übrigen $n_k - l$ Integrale über $\mathfrak{X}_k - \mathfrak{A}$ gehen. Da $\psi(x_p)\,\delta_{x_p} = 0$ ist, falls $x_p \notin \mathfrak{A}$ ist, $f\left(\sum_{j=1}^{n_k} \psi(x_j)\,\delta_{x_j}\right)$ also von einem solchen x_p nicht abhängt, so ist

$$\langle P_k, f_\psi\rangle = \sum_{l=0}^{n_k} \frac{1}{\lambda(\mathfrak{X}_k)^l}\binom{n_k}{l}\left(1 - \frac{\lambda(\mathfrak{A})}{\lambda(\mathfrak{X}_k)}\right)^{n_k - l} \int_{\mathfrak{A}}\cdots\int_{\mathfrak{A}} f\left(\sum_{j=1}^{l}\psi(x_j)\,\delta_{x_j}\right)\lambda(dx_1)\ldots\lambda(dx_l).$$

Die einzelnen Summanden schätzt man durch

$$\frac{1}{\lambda(\mathfrak{X}_k)^l}\,\frac{n_k^l}{l!}\,\lambda(\mathfrak{A})^l\,\|f\| \leqq \frac{1}{l!}\,(C\,\lambda(\mathfrak{A}))^l\,\|f\|$$

ab. Weil der letzte Ausdruck von k unabhängig und bezüglich l summierbar ist, können wir unter der Summe mit k gegen Unendlich gehen und erhalten die Hilfsbehauptung 2.

Hilfsbehauptung 3. *Die Folge P_k hat genau einen Häufungspunkt.*

Beweis. Aus der gleichmäßigen Straffheit folgt, daß die Menge $\mathfrak{P}$ der Häufungspunkte gleichmäßig straff und nicht leer ist.

Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathfrak{C}$, $\|f\| \leqq \frac{1}{2}$. Wir erinnern an das Kompaktum K beim Beweis der Hilfsbehauptung 1. Für alle $Q \in \mathfrak{P}$ gilt, daß $|\langle Q, g\rangle| \leqq \varepsilon$ ist für $g \in \mathfrak{C}$, $\|g\| \leqq 1$, $|g| \leqq \varepsilon/2$ auf K. Die Funktion f ist gleichmäßig stetig auf K. Es existieren also endlich viele Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{L}$ und ein $\delta > 0$, so daß $|f(\mu) - f(\nu)| \leqq \varepsilon/2$ ist, falls $\mu, \nu \in K$ und $|\langle \mu - \nu, \varphi_i\rangle| \leqq \delta$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Sei $0 \leqq \psi \leqq 1$ eine Funktion aus $\mathfrak{L}$, die auf $\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Tr}\varphi_i$ gleich 1 ist. Da $\psi\varphi_i = \varphi_i$ ist, ist $\langle \mu - \mu\psi, \varphi_i\rangle = 0$. Weil mit μ auch $\mu\psi \in K$ ist, gilt $|f(\mu) - f(\mu\psi)| \leqq \varepsilon/2$ für $\mu \in K$ und

$$|\langle Q, f - f_\psi\rangle| \leqq \langle Q, |f - f_\psi|\rangle \leqq \varepsilon$$

für alle Häufungspunkte $Q \in \mathfrak{P}$. Seien Q und Q' zwei Häufungspunkte, so sind wegen Hilfsbehauptung 2 die Zahlen $\langle Q, f_\psi\rangle$ und $\langle Q', f_\psi\rangle$ gleich und

$$\begin{aligned}|\langle Q - Q', f\rangle| &\leqq |\langle Q, f - f_\psi\rangle| + |\langle Q', f - f_\psi\rangle| \\ &\quad + |\langle Q - Q', f_\psi\rangle| \\ &\leqq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Da ε willkürlich war, folgt Hilfsbehauptung 3.

Damit ist der Satz bewiesen.

V. Einige Eigenschaften des statistischen Modells eines unendlich ausgedehnten Gases

Im Anschluß an den Gebrauch der Wahrscheinlichkeitsrechnung schreiben wir anstelle von $\langle P, f\rangle$ oft Ef (Erwartungswert), oder, wenn wir die Variable ausdrücken wollen, $Ef(\mu)$. An die Stelle von $\langle \lambda, \varphi\rangle$ tritt $\int\varphi$ oder $\int\varphi(x)$.

Satz 1. *Sei φ eine λ-integrierbare Funktion auf $\mathfrak{X}$. Dann ist φ für P-fast-alle $\mu \in \mathfrak{M}$ integrierbar. Die Funktion $\mu \in \mathfrak{M} \to \langle \mu, \varphi\rangle$ ist P-integrierbar und*

$$E\langle \mu, \varphi\rangle = N\int\varphi.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathfrak{L}$, $\varphi \geqq 0$. Die Funktion $\mu \to \langle \mu, \varphi\rangle$ ist stetig, aber nicht beschränkt. Sei n eine ganze positive Zahl, $\psi \in \mathfrak{L}$, $0 \leqq \psi \leqq 1$, $\psi = 1$ auf $\operatorname{Tr}\varphi$. Wir setzen $f_n(\mu) = \min(n, \langle\mu, \varphi\rangle)$. Da $\psi\varphi = \varphi$ ist, ist $f_{n\psi} = f_n$ und es gilt die in IV, Hilfsbehauptung 2 aufgestellte Formel für $E f_n = E f_{n\psi}$. Man geht auf beiden Seiten mit n gegen Unendlich und erhält nach kurzer Rechnung

$$E\langle\mu, \varphi\rangle = N \int \varphi .$$

Sei $\varphi \geqq 0$ eine von unten halbstetige Funktion auf $\mathfrak{X}$ und sei $\mathfrak{L}_\varphi$ die Menge aller $\psi \in \mathfrak{L}$, $0 \leqq \psi \leqq \varphi$. Die Menge $\mathfrak{L}_\varphi$ ist nach oben gerichtet und konvergiert gegen φ. Die Familie $(\langle\mu, \psi\rangle)_{\psi \in \mathfrak{L}_\varphi}$ bildet ein Netz stetiger Funktionen $\geqq 0$ auf $\mathfrak{M}$, das gegen $\langle\mu, \varphi\rangle$ konvergiert. Somit konvergieren (s. Neumark [*10*] § 6, 3. III) die Erwartungswerte $E\langle\mu, \psi\rangle$ gegen $E\langle\mu, \varphi\rangle$. Die Funktion $\mu \to \langle\mu, \varphi\rangle$ ist von unten halbstetig und $\geqq 0$ und es ist

$$E\langle\mu, \varphi\rangle = N \int \varphi .$$

Sei $\varphi \geqq 0$ von oben halbstetig, von kompaktem Träger und damit beschränkt. Sei $\varphi_1 = \mathfrak{L}$, $\varphi_1 \geqq \varphi$ und $\mathfrak{L}_\varphi$ die Menge aller $\psi \in \mathfrak{L}$ mit $\varphi_1 \geqq \psi \geqq \varphi$. Die Menge $\mathfrak{L}_\varphi$ ist nach unten gerichtet und konvergiert gegen φ. Die Menge $\{\varphi_1 - \psi : \psi \in \mathfrak{L}_\varphi\}$ ist nach oben gerichtet und konvergiert gegen $\varphi_1 - \varphi$. Für jedes $\mu \in \mathfrak{M}$ konvergiert $\langle\mu, \varphi_1 - \psi\rangle \uparrow \langle\mu, \varphi_1 - \varphi\rangle$ und $E\langle\mu, \varphi_1 - \psi\rangle \uparrow E\langle\mu, \varphi_1 - \varphi\rangle$. Als unterer Grenzwert stetiger Funktionen sind φ und $\langle\mu, \varphi\rangle$ von oben halbstetig. Da $\langle\mu, \varphi\rangle \leqq \langle\mu, \varphi_1\rangle$ und $\mu \to \langle\mu, \varphi_1\rangle$ bezüglich P integrierbar ist, ist (s. [*10*] § 6.7.IX) auch $\langle\mu, \varphi\rangle$ integrierbar und es konvergiert $E\langle\mu, \psi\rangle \downarrow E\langle\mu, \varphi\rangle$.

Zusammenfassend ist $\langle\mu, \varphi\rangle$ eine von oben halbstetige Funktion $\geqq 0$ mit

$$E\langle\mu, \varphi\rangle = N \int \varphi .$$

Sei $\varphi \geqq 0$ eine bezüglich λ integrierbare Funktion. Dann gibt es (s. [*10*] § 6.7. XI) eine monoton wachsende Folge ψ_k von oben halbstetiger Funktionen mit kompaktem Träger und eine monoton fallende Folge χ_k von unten halbstetiger integrierbarer Funktionen, so daß

$$\psi_k \leqq \varphi \leqq \chi_k$$

und

$$\lambda(\chi_k - \psi_k) \downarrow 0$$

geht. Sei $\psi = \lim \psi_k$ und $\chi = \lim \chi_k$. Da $E\langle\mu, \chi_1\rangle = N \int \chi_1$ endlich ist, ist $\langle\mu, \chi_1\rangle$ für fast alle μ endlich und sind somit alle ψ_k und χ_k sowie ψ und χ für diese μ integrierbar. Der Satz von Beppo Levi ([*10*] § 6.7. VII) angewandt auf die μ, für $\langle\mu, \chi_1\rangle$ endlich ist, liefert

$$\langle\mu, \psi_k\rangle \uparrow \langle\mu, \psi\rangle$$
$$\langle\mu, \chi_k\rangle \downarrow \langle\mu, \chi\rangle .$$

Da $\langle\mu, \chi_1\rangle$ bezüglich P integrierbar sind, sind es auch $\langle\mu, \psi_k\rangle$, $\langle\mu, \chi_k\rangle$, $\langle\mu, \psi\rangle$ und $\langle\mu, \chi\rangle$ und

$$E\langle\mu, \psi_k\rangle = N \int \psi_k \uparrow E\langle\mu, \psi\rangle = N \int \psi$$
$$E\langle\mu, \chi_k\rangle = N \int \chi_k \downarrow E\langle\mu, \chi\rangle = N \int \chi$$
$$E\langle\mu, \chi_k - \psi_k\rangle = N \int (\chi_k - \psi_k) \downarrow E\langle\mu, \chi - \psi\rangle = N \int (\chi - \psi) = 0 .$$

Da

$$\psi \leqq \varphi \leqq \chi$$

und

$$E(\langle \mu, \chi \rangle - \langle \mu, \psi \rangle) = 0$$

ist, ist $\langle \mu, \chi \rangle - \langle \mu, \psi \rangle$ für fast alle μ Null und somit φ für fast alle μ integrierbar. Für diese μ ist $\langle \mu, \psi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \chi \rangle$ und somit

$$E \langle \mu, \varphi \rangle = N \int \varphi .$$

Sei φ eine komplexwertige, λ-integrierbare Funktion auf $\mathfrak{X}$, so zerlegt man

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + i \varphi_3 - i \varphi_4$$

mit $\varphi_i \geqq 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Man verwendet das bisherige Ergebnis und erhält die Behauptung des Satzes.

Satz 2. *Sei φ eine λ-meßbare, reelle Funktion auf $\mathfrak{X}$, sei φ fast überall endlich und sei* min $(|\varphi|, 1)$ *integrierbar. Dann ist φ für fast alle μ integrierbar, $\mu \to \langle \mu, \varphi \rangle$ bezüglich P meßbar und für reelles ξ*

$$E\, e^{i\xi\langle \mu, \varphi \rangle} = \exp N \int (e^{i\xi\varphi} - 1) .$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathfrak{L}$ und $\psi \in \mathfrak{L}$, $0 \leqq \psi \leqq 1$, $\psi = 1$ auf $\operatorname{Tr} \varphi$. Dann ist $\langle \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \psi\varphi \rangle$, $\mu \to \exp i \xi \langle \mu, \varphi \rangle$ eine stetige, beschränkte Funktion und die Hilfsbehauptung V.2 liefert

$$E\, e^{i\xi\langle \mu, \varphi \rangle} = \exp N \int (e^{i\xi\varphi} - 1) .$$

Sei $\varphi \in \mathfrak{L}$, $\varphi \geqq 0$ und $\alpha > 0$, dann gilt ebenso

$$E\, e^{-\alpha\langle \mu, \varphi \rangle} = \exp[-N \int (1 - e^{-\alpha\varphi})] .$$

Sei φ bezüglich λ integrierbar und reell, dann ist es für fast alle μ integrierbar und $\mu \to \langle \mu, \varphi \rangle$ integrierbar und damit meßbar. Man überlegt sich leicht, daß die stetige Funktion einer meßbaren Funktion wieder meßbar ist. Damit ist exp $i\xi \langle \mu, \varphi \rangle$ meßbar und weil es beschränkt ist, integrierbar ([*10*] § 6. 10. VIII).

Es gibt eine Folge von Funktionen $\varphi_k \in \mathfrak{L}$ mit $\int |\varphi_k - \varphi| \to 0$. Man schätzt ab

$$\begin{aligned} |E\, e^{i\xi\langle \mu, \varphi_k \rangle} - E\, e^{i\xi\langle \mu, \varphi \rangle}| &\leqq E\, |e^{i\xi\langle \mu, \varphi_k \rangle} - e^{i\xi\langle \mu, \varphi \rangle}| \\ &= E\, |e^{i\xi\langle \mu, \varphi_k - \varphi \rangle} - 1| \leqq |\xi|\, E \langle \mu, |\varphi_k - \varphi| \rangle \\ &= |\xi|\, N \int |\varphi_k - \varphi| \to 0 \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\left| \int (e^{i\xi\varphi_k} - 1) - \int (e^{i\xi\varphi} - 1) \right| \leqq |\xi| \int |\varphi_k - \varphi| \to 0 .$$

Damit gilt für integrierbares, reelles φ

$$E\, e^{i\xi\langle \mu, \varphi \rangle} = \exp N \int (e^{i\xi\varphi} - 1) .$$

Ebenso zeigt man, daß für integrierbares $\varphi \geqq 0$ und $\alpha > 0$

$$E\, e^{-\alpha\langle \mu, \varphi \rangle} = \exp[-N \int (1 - e^{-\alpha\varphi})]$$

ist.

Sei $\varphi \geqq 0$ eine λ-meßbare Funktion, sei $\mathfrak{X}_k$ die in IV betrachtete Folge und sei

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} k & \text{falls} \quad x \in \mathfrak{X}_k \quad \text{und} \quad \varphi(x) \geqq k \\ \varphi(x) & \text{falls} \quad x \in \mathfrak{X}_k \quad \text{und} \quad \varphi(x) < k \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Die Funktionen φ_k sind λ-integrierbar und konvergieren gegen φ. Die φ_k sind für fast alle μ integrierbar, für diese μ ist φ meßbar und

$$\langle \mu, \varphi_k \rangle \uparrow \langle \mu, \varphi \rangle .$$

Die Funktion $\exp(-\alpha \langle \mu, \varphi \rangle)$ ist als monoton absteigender Grenzwert P-integrierbarer Funktionen integrierbar.

Man setzt φ_k auf beide Seiten der letzten Gleichung ein und geht mit k gegen Unendlich. Dann erhält man

$$E\, e^{-\alpha\langle \mu, \varphi \rangle} = \exp[-N \textstyle\int (1 - e^{-\alpha\varphi})] .$$

Sei $\min(\varphi, 1)$ bezüglich λ integrierbar, dann gilt für $\alpha \leqq 1$

$$1 - e^{-\alpha\varphi} \leqq \min(1, \alpha\varphi) \leqq \min(1, \varphi) .$$

Für $\alpha \downarrow 0$ konvergiert

$$\exp(-\alpha \langle \mu, \varphi \rangle) \uparrow \begin{cases} 1 & \text{wo} \quad \langle \mu, \varphi \rangle < \infty \\ 0 & \text{wo} \quad \langle \mu, \varphi \rangle = \infty \end{cases}$$

und

$$1 - e^{-\alpha\varphi} \downarrow \begin{cases} 0 & \text{wo} \quad \varphi < \infty \\ 1 & \text{wo} \quad \varphi = \infty . \end{cases}$$

Der Satz von Beppo Levi erlaubt es in der letzten Gleichung mit $\alpha \downarrow 0$ zu gehen. Man erhält

$$P\{\mu : \langle \mu, \varphi \rangle < \infty\} = \exp[-N \lambda \{x : \varphi(x) = \infty\}] .$$

Ist φ fast überall bezüglich λ endlich, dann ist es auch $\langle \mu, \varphi \rangle$. Das heißt φ ist für fast alle μ integrierbar.

Sei φ eine meßbare Funktion, fast überall endlich und $\min(|\varphi|, 1)$ integrierbar. Sei

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} k & \text{für} \quad x \in \mathfrak{X}_k , \quad \varphi(x) \geqq k \\ \varphi(x) & \text{für} \quad x \in \mathfrak{X}_k , \quad -k < \varphi(x) < k \\ -k & \text{für} \quad x \in \mathfrak{X}_k , \quad \varphi(x) \leqq -k \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathfrak{X}_k . \end{cases}$$

Dann konvergiert φ_k punktweise gegen φ und bleibt durch $|\varphi|$ beschränkt. Da φ für fast alle μ integrierbar ist, konvergiert $\langle \mu, \varphi_k \rangle$ gegen $\langle \mu, \varphi \rangle$ für fast alle μ nach dem Satz von LEBESGUE. Nach dem gleichen Satz (einer einfachen Folgerung aus dem Satz von BEPPO LEVI [*10*] § 6. 7. VII) konvergiert $E \exp i\xi \langle \mu, \varphi_k \rangle$ gegen $E \exp i\xi \langle \mu, \varphi \rangle$. Weil $\min(|\varphi|, 1)$ integrierbar ist, konvergiert

$$\textstyle\int (\exp i\xi\varphi_k - 1) \quad \text{gegen} \quad \int (\exp i\xi\varphi - 1)$$

ebenfalls nach dem Satz von LEBESGUE. Damit ist der Satz bewiesen.

Seien $f_1, f_2, \ldots, f_n$ reelle P-meßbare Funktionen auf $\mathfrak{M}$ und sei φ eine stetige beschränkte Funktion auf dem R^n. Die Abbildung

$$\mu \to \varphi(f_1(\mu), \ldots, f_n(\mu))$$

ist meßbar und, weil sie beschränkt ist, integrierbar. Durch

$$\varphi \to E\,\varphi(f_1, \ldots, f_n)$$

wird auf den stetigen beschränkten Funktionen ein Funktional induziert, das man leicht als straffes Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem R^n (m. a. W. als beschränktes positives Radonsches Maß der Gesamtmasse 1) erkennt.

Wir setzen

$$E\,\varphi(f_1, \ldots, f_n) = \langle P_{f_1, \ldots, f_n}, \varphi \rangle$$

und nennen $P_{f_1, \ldots, f_n}$ die gemeinsame Verteilung von $f_1, \ldots, f_n$.

Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ heißen unabhängig, falls

$$P_{f_1, \ldots, f_n} = P_{f_1} \otimes P_{f_2} \otimes \cdots \otimes P_{f_n}$$

ist.

Die charakteristische Funktion einer reellen P-meßbaren Funktion f ist

$$E\,e^{i\xi f} = \langle P_f, e^{i\xi x} \rangle,$$

also die Fouriertransformierte von P_f. Aus dem Eindeutigkeitssatz der Fouriertransformation folgt, daß $f_1, \ldots, f_n$ unabhängig sind, falls

$$E \exp i \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k = \prod_{k=1}^{n} E \exp i\,\xi_k f_k$$

für alle Punkte $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des R^n ist.

Eine Poissonverteilung vom Mittelwert c ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Geraden der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} e^{-c} \delta_n .$$

Die Fouriertransformierte der Poissonverteilung ist

$$\exp c\,(e^{i\xi} - 1).$$

Satz 3. *Sei $A \subset \mathfrak{X}$ eine λ-integrierbare Menge. Dann ist A für fast alle μ integrierbar und $\mu \to \mu(A)$ ist P-integrierbar. Die Verteilung von $\mu \to \mu(A)$ ist eine Poissonverteilung zum Mittelwert $N\lambda(A)$. Seien $A_1, \ldots, A_n$ paarweise fremde integrierbare Mengen auf $\mathfrak{X}$, so sind die Funktionen $\mu(A_k)$, $k = 1, \ldots, n$ unabhängig.*

Beweis. Die erste Hälfte des Satzes ist eine direkte Folgerung der letzten beiden Sätze. Sei χ_k die charakteristische Funktion von A_k, so ist

$$\begin{aligned} E \exp i \sum \xi_k \mu(A_k) &= E \exp i \langle \mu, \sum \xi_k \chi_k \rangle = \exp N \int [\exp(i \sum \xi_k \chi_k) - 1] \\ &= \exp N \sum \int_{A_k} (\exp i\,\xi_k - 1) = \exp \sum N \lambda(A_k)\,(e^{i\xi_k} - 1) \\ &= \prod \exp N \lambda(A_k)\,(e^{i\xi_k} - 1) = \prod E \exp i\,\xi_k \mu(A_k). \end{aligned}$$

Die $\mu(A_k)$ sind also unabhängig.

Hilfssatz. *Die Menge $\mathfrak{S}$ aller Radonschen Maße auf $\mathfrak{X}$ der Form $\sum_{\iota \in I} \delta_{x_\iota}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{M}$.*

Wir bemerken noch, daß die Forderung, daß $\sum_{\iota \in I} \delta_{x_\iota}$ ein Radonsches Maß ist, nach sich zieht, daß I endlich oder abzählbar unendlich und die Familie $(x_\iota)_{\iota \in I}$ lokal endlich ist.

Beweis. Sei $\overline{\mathfrak{S}}$ der Abschluß von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{M}$ bezüglich der Topologie der punktweisen Topologie auf $\mathfrak{L}$ und sei $\mu \in \overline{\mathfrak{S}}$.

Wir müssen zeigen, daß $\mu \in \mathfrak{S}$ ist.

Sei $x \in \mathfrak{X}$ und χ die charakteristische Funktion von $\{x\}$. Sei $\langle \mu, \chi \rangle = a$ und n eine ganze Zahl $n \leqq a < n + 1$. Sei Φ die Menge aller Funktionen aus $\mathfrak{L}$, deren Werte zwischen Null und 1 liegen und die auf einer Umgebung von x gleich 1 sind. Die Menge Φ ist nach unten gerichtet und konvergiert nach χ. Es ist

$$\lim_{\varphi \in \Phi} \langle \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \chi \rangle = a .$$

Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $a + \varepsilon < n + 1$ ist. Dann gibt es ein $\varphi \in \Phi$, so daß $a \leqq \langle \mu, \varphi \rangle \leqq a + \varepsilon$ ist. Sei U eine offene Umgebung von x, auf der φ gleich 1 ist. Sei χ_U die charakteristische Funktion von U und sei $\psi \in \mathfrak{L}$, $0 \leqq \psi \leqq \chi_U$. Weil $\mu \in \overline{\mathfrak{S}}$ ist, gibt es ein Netz $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Maßen aus $\mathfrak{S}$, das gegen μ konvergiert. Es gilt

$$\langle \mu_\alpha, \varphi \rangle \geqq \mu_\alpha(U) \geqq \langle \mu_\alpha, \psi \rangle .$$

Wir gehen zur Grenze

$$\begin{aligned} n + 1 > a + \varepsilon \geqq \langle \mu, \varphi \rangle &\geqq \limsup \mu_\alpha(U) \geqq \liminf \mu_\alpha(U) \geqq \\ &\geqq \langle \mu, \psi \rangle \geqq \langle \mu, \chi \rangle = a \geqq n . \end{aligned}$$

Weil alle $\mu_\alpha(U)$ ganze Zahlen sind, sind $\limsup \mu_\alpha(U)$ und $\liminf \mu_\alpha(U)$ ganze Zahlen. Man schließt daraus, daß $\mu_\alpha(U)$ gegen n konvergiert. Weil $\mu(U)$ das Supremum aller $\langle \mu, \psi \rangle$ ist mit $\psi \in \mathfrak{L}$, $0 \leqq \psi \leqq \chi_U$, so gilt

$$n = \lim \mu_\alpha(U) \geqq \mu(U) \geqq a \geqq n .$$

Also ist

$$n = \mu(U) = \mu(\{x\}) .$$

Für alle $\psi \in \mathfrak{L}$, $\operatorname{Tr} \psi \subset U$ gilt

$$\langle \mu, \psi \rangle = \langle \mu, \psi \chi \rangle + \langle \mu, (1 - \chi) \psi \rangle = n \psi(x) = n \langle \delta_x, \psi \rangle .$$

Zu jedem $x \in \mathfrak{X}$ gibt es eine Umgebung $U(x)$ und eine ganze Zahl $n(x)$, so daß μ gleich $n(x) \delta_x$ in $U(x)$, d. h. für alle $\psi \in \mathfrak{L}$, $\operatorname{Tr} \psi \subset U$ ist.

Seien x und y in $\mathfrak{X}$, sei $x \neq y$ und sei $x \in U(y)$. Dann ist $\mu(\{x\}) = n(x) = 0$. Sei also $n(x) > 0$. Dann liegt x in keinem $U(y)$, $y \neq x$.

Sei $\varphi \in \mathfrak{L}$. Dann gibt es endlich viele x_i, so daß die $U_i = U(x_i)$ den Träger von φ überdecken.

Wir wählen Funktionen $\psi_i \in \mathfrak{L}$, $0 \leqq \psi_i \leqq 1$, $\operatorname{Tr} \psi_i \subset U_i$, $0 \leqq \sum \psi_i \leqq 1$, $\sum \psi_i = 1$ auf $\operatorname{Tr} \varphi$.

Dann ist $\varphi = \sum \psi_i \varphi$ und

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \sum \langle \mu, \psi_i \varphi \rangle = \sum n_i \psi_i(x_i) \varphi(x_i) = \sum' n_i \psi_i(x_i) \varphi(x_i) .$$

Der Strich an der Summe bedeutet, daß wir nur über die i summieren, für die $n_i > 0$ ist. Sei i ein solcher Index. Dann liegt x_i nicht in U_k für $i \neq k$ und

$$\psi_k(x_i) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k ,$$

und wir können schreiben

$$\begin{aligned} \langle \mu, \varphi \rangle &= \sum_i{}' \sum_k n_i \psi_k(x_i) \varphi(x_i) \\ &= \left\langle \sum{}' n_i \delta_{x_i}, \sum \psi_k \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \sum n_i \delta_{x_i}, \varphi \right\rangle . \end{aligned}$$

Also ist $\mu \in \mathfrak{S}$ und der Hilfssatz bewiesen.

Satz 4. *Bezüglich P sind fast alle Maße von der Form* $\sum_{\iota \in I} \delta_{x_\iota}$.

Beweis. Wir zeigen, daß $P(\mathfrak{M} - \mathfrak{S}) = 0$ ist. Die charakteristische Funktion g der offenen Menge $\mathfrak{M} - \mathfrak{S}$ ist die obere Hülle aller stetigen Funktionen f auf $\mathfrak{M}$, $0 \leqq f \leqq 1$, die auf $\mathfrak{S}$ verschwinden. Für alle solche Funktionen ist $\langle P_k, f\rangle = 0$ und damit $\langle P, f\rangle = 0$ und $\langle P, g\rangle = 0$.

Das Ziel von Satz 3 und 4 war es, zu zeigen, daß unser statistisches Modell die Eigenschaften hat, die DOOB für die statistische Beschreibung eines unendlich ausgedehnten Gases unabhängiger Teilchen fordert ([*5*], S. 404).

VI. Ableitung der Formel von Anderson

Wir wollen in diesem Kapitel, wie wir es im Abschnitt **C** und **D** der Einleitung andeuteten, die Andersonsche Formel aus dem statistischen Modell eines unendlich ausgedehnten Gases ableiten.

Sei λ_0 das Lebesgue-Maß auf dem R^3, sei S_v die Kugeloberfläche im R^3 vom Radius v und sei Λ_v die gleichmäßige Verteilung auf S_v.

Wir setzen $\mathfrak{X} = R^3 \times S_v$ und $\lambda = \lambda_0 \otimes \lambda_v$ und haben damit alle Voraussetzungen von Kapitel IV und V erfüllt und können deren Resultate anwenden. Wir nehmen an, daß die Teilchendichte $N > 0$ ist.

Unser Ziel ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz. *Sei*

$$\psi(r) = \frac{2\pi C}{r^n}, \quad C \neq 0$$

und n eine reelle Zahl > 3 *und sei t eine reelle Zahl. Dann ist für P-fast-alle* μ *die Funktion*

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) \in R^3 \times S_v \to \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau$$

integrierbar. Die Funktion

$$\mu \to Y(t, \mu) = \langle \mu, \int_0^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau\rangle$$

existiert für alle μ *und ist P-meßbar. Die Funktion*

$$t \to R_v(t) = E \exp i Y(t, \mu)$$

ist positiv definit und stetig. Sie ist Fouriertransformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf der Geraden, das wir mit I_v *bezeichnen.* $R_v(t)$ *hat die explizite Darstellung*

$$R_v(t) = \exp N F_v(t)$$

mit

$$F_v(t) = \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\exp i \int_0^t \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + (z + v\tau)^2}\right) d\tau - 1\right].$$

Beweis. Wir berechnen das λ-Maß der Punkte, für die

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) = \int_{t'}^t \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau$$

divergiert. Sei zunächst $v > 0$. Die Funktion f wird nur unendlich, falls $|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|$ Null wird für τ zwischen t und t'. Dazu ist notwendig, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{v}$ parallel sind. Es muß also $\mathfrak{x}$ auf der Geraden mit der Richtung $\mathfrak{v}$ durch den Nullpunkt liegen. Bei festem $\mathfrak{v}$ ist diese Gerade eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes. Integration über $\mathfrak{v}$ liefert eine λ-Nullmenge. Sei $v = 0$, so ist S_v der Nullpunkt, λ_v das Dirac-Maß im Nullpunkt und

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) = (t - t')\,\psi(|\mathfrak{x}|)\,.$$

Dieser Ausdruck divergiert nur für $\mathfrak{x} = 0$. Das ist eine λ-Nullmenge.

In den Punkten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})$, für die $|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau| > 0$ ist für τ zwischen t und t', ist f stetig. Somit ist f meßbar. Zeigen wir, daß $\min(|f|, 1)$ integrierbar ist. Dazu genügt es, zu beweisen, daß f für große $|\mathfrak{x}|$ integrierbar ist. Für τ zwischen t und t' gilt

$$|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau| \geqq |\mathfrak{x}| - v\max(|t|, |t'|) = |\mathfrak{x}| - a\,.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\mathfrak{x}| \geqq 2a+1} |f(\mathfrak{x}, \mathfrak{v})|\, d\lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) &\leqq \int\limits_{|\mathfrak{x}| \geqq 2a+1} |t - t'|\,\psi(|\mathfrak{x}| - a)\, d\lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) \\ &= |t - t'| \int\limits_{2a+1}^{\infty} \frac{2\pi |C|}{(r-a)^n}\, 4\pi r^2\, dr\,.\end{aligned}$$

Das letzte Integral ist aber endlich, weil $n > 3$ ist.

Wir können Satz V. 2 anwenden. Für fast alle μ ist f integrierbar und

$$\langle \mu, f \rangle = Y(t, \mu) - Y(t', \mu)$$

eine P-meßbare Funktion. Damit sind die ersten beiden Aussagen des Satzes bewiesen. Durch weitere Verwendung von Satz V.2 erhält man

$$\begin{aligned}&E \exp i\,(Y(t, \mu) - Y(t', \mu)) \\ &\qquad = \exp N \int \left[\exp\left(i \int\limits_{t'}^{t} \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau\right) - 1\right] d\lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) \\ &\qquad = \exp N \int d\lambda_v(\mathfrak{v}) \int d\mathfrak{x} \left[\exp\left(i \int\limits_{t'}^{t} \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau\right) - 1\right].\end{aligned}$$

Eine Variablentransformation $\tau' = \tau - t'$, $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + \mathfrak{v}t'$ liefert

$$\begin{aligned}&= \exp N \int d\lambda_v(\mathfrak{v}) \int d\mathfrak{x} \left[\exp i \int\limits_{0}^{t-t'} \psi(|\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\tau|)\, d\tau - 1\right] \\ &= E \exp i\,Y(t - t', \mu)\,.\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß R_v positiv definit ist. Seien $t_1, \ldots, t_k$ reelle Zahlen und $z_1, \ldots, z_k$ komplexe Zahlen, so ist

$$\begin{aligned}\sum_{l,m} R_v(t_l - t_m)\, z_l z_m^* &= \sum_{l,m} E\, e^{iY(t_l,\mu) - iY(t_m,\mu)}\, z_l z_m^* \\ &= E \left|\sum_{l} e^{iY(t_l,\mu)}\, z_l\right|^2 \geqq 0\,.\end{aligned}$$

Dies ist die Methode, mit der man bei beliebigen schwach stationären stochastischen Prozessen nachweist, daß die Korrelationsfunktion positiv definit ist.

Sei $v > 0$, so führen wir bei festem $\mathfrak{v}$ Zylinderkoordinaten mit $\mathfrak{v}$ als Achse ein und finden

$$R_v(t) = \exp N \int d\lambda(\mathfrak{v})\, F_v(t) = \exp N F_v(t)$$

mit

$$F_v(t) = \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\exp i \int_0^t \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + (z + v\tau)^2}\right) d\tau - 1\right].$$

Die $\mathfrak{v}$-Integration konnte weggelassen werden, da der Integrand nicht mehr von der Richtung von $\mathfrak{v}$ abhängt. Für $v = 0$ kommt man zum gleichen Ergebnis.

Wenn wir gezeigt haben, daß $t \to F_v(t)$ stetig ist, haben wir den Satz bewiesen. Nach dem Satz von BOCHNER ist dann $R_v(t)$ Fouriertransformierte eines positiven Maßes der Gesamtmasse $R(0) = 1$. Den Beweis, daß $F_v(t)$ stetig ist, zerlegen wir in zwei Hilfssätze, die wir später noch brauchen werden.

Wir zerlegen

$$F_v(t) = \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho\, G_v(\varrho, t)$$

mit

$$G_v(\varrho, t) = \int \left[\exp i \int_0^t \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + (v\tau + z)^2}\right) d\tau - 1\right] dz.$$

Hilfssatz 1. *Für festes ϱ, v ist $t \to G_v(\varrho, t)$ stetig. Es gilt $G_v(\varrho, t) = G_v(\varrho, -t)^*$ und*

$$|G_v(\varrho, t)| \leqq \min\left[4\zeta + 2|t|\left(v + \frac{2\pi|C|}{(n-1)\zeta^{n-1}}\right),\ \frac{2\pi|C|\,|t|\,c_n}{\varrho^{n-1}}\right].$$

Dabei ist ζ eine willkürliche Zahl > 0 und

$$c_n = \int \frac{ds}{(1 + s^2)^{n/2}}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz III.1. Sei $t > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} G_v(\varrho, -t) &= \int \left[\exp\left(-i \int_{-t}^0 \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + (z + v\tau)^2}\right) d\tau\right) - 1\right] dz \\ &= \int \left[\exp\left(-i \int_0^t \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + (z + v\tau)^2}\right) d\tau\right) - 1\right] dz \\ &= G_v(\varrho, t)^* \end{aligned}$$

vermöge der Variablentransformation $\tau' = \tau + t$, $z' = z - vt$.

$$\begin{aligned} |G_v(\varrho, t) - G_v(\varrho, t')| &\leqq \int \left| \int_{t'}^t \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + (v\tau + z)^2}\right) d\tau \right| dz \leqq \\ &\leqq |t - t'| \int |\psi| \left(\sqrt{\varrho^2 + z^2}\right) dz. \end{aligned}$$

Somit ist $G_v(\varrho, t)$ in t stetig. Es ist

$$\int \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + z^2}\right) dz = 2\pi C \int \frac{dz}{(\varrho^2 + z^2)^{n/2}} = \frac{2\pi C c_n}{\varrho^{n-1}}.$$

Da ψ das Vorzeichen von C hat, ist

$$\int |\psi| \left(\sqrt{\varrho^2 + z^2}\right) dz = \frac{2\pi |C| c_n}{\varrho^{n-1}} .$$

Man schätzt ab

$$|G_v(\varrho, t)| \leqq |t| \int |\psi| \left(\sqrt{\varrho^2 + z^2}\right) dz = |t| \frac{2\pi |C| c_n}{\varrho^{n-1}} .$$

Sei $\zeta > 0$ und $t \geqq 0$. Wir zerlegen

$$G_v(\varrho, t) = -\int\limits_{-\infty}^{-vt-\zeta} + \int\limits_{-vt-\zeta}^{+\zeta} + \int\limits_{\zeta}^{\infty} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} .$$

Die Variablentransformation $z' = -z - vt$, $\tau' = t - \tau$ führt I in III über.

Man schätzt ab

$$|\mathrm{II}| \leqq 2(vt + 2\zeta) = 2vt + 4\zeta ,$$

$$|\mathrm{III}| \leqq \int\limits_{\zeta}^{\infty}\int\limits_{0}^{t} |\psi| \left(\sqrt{\varrho^2 + (z + v\tau)^2}\right) d\tau\, dz \leqq$$

$$\leqq \int\limits_{\zeta}^{\infty}\int\limits_{0}^{t} \frac{2\pi |C|}{z^n} d\tau\, dz = t \frac{2\pi |C|}{(n-1)\zeta^{n-1}} .$$

Also

$$|G_v(\varrho, t)| = |G_v(\varrho, -t)| \leqq 2v|t| + 4\zeta + 2|t| \frac{2\pi |C|}{(n-1)\zeta^{n-1}} .$$

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Die Funktion $t \to F_v(t)$ ist stetig. Es gilt $F_v(-t) = F_v(t)^*$ und*

$$|F_v(t)| \leqq 4\pi\zeta + |t| \left(2\pi v + \frac{4\pi^2 |C|}{(n-1)\zeta^{n-1}} + \frac{4\pi^2 |C| c_n}{n-3}\right)$$

Beweis. Gehe $t_k \to t$, so konvergieren die Funktionen $G_v(\varrho, t_k) \to G_v(\varrho, t)$ punktweise und bleiben unter einer bezüglich $2\pi\varrho\, d\varrho$ integrierbaren Funktion. Nach dem Satz von Lebesgue geht $F_v(t_k) \to F_v(t)$. Daß $F_v(-t) = F_v(t)^*$ ist, überträgt sich direkt von $G_v(\varrho, t)$. Wir schätzen ab

$$|F_v(t)| \leqq \int\limits_0^1 2\pi\varrho\, d\varrho \left(4\zeta + 2|t| \left(v + \frac{2\pi |C|}{(n-1)\zeta^{n-1}}\right)\right) + \int\limits_1^{\infty} 2\pi\varrho\, d\varrho \frac{2\pi |C|\, |t|\, c_n}{\varrho^{n-1}}$$

und erhalten das Ergebnis.

VII. Diskussion der Anderson-Formel in der Linienmitte

Wir fixieren in diesem Kapitel ein $v > 0$.

Zunächst wenden wir uns der Stoßapproximation zu. Man nimmt an, daß die Störteilchen nur im Augenblick des nächsten Abstandes mit dem Leuchtteilchen wechselwirken und in diesem Augenblick einen Phasensprung bewirken, der so groß ist wie die Phasenstörung durch das Störteilchen, integriert über die ganze Zeit.

Die Phasenstörung ist, falls der nächste Abstand zum Ursprung gleich ϱ ist,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi C\, dt}{(\varrho^2 + v^2 t^2)^{n/2}} = \frac{2\pi C c_n}{v\, \varrho^{n-1}} .$$

Zur Bedeutung von c_n siehe Hilfssatz VI.1. Sei $\mathfrak{x}$ die Anfangslage und $\mathfrak{v}$ die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens. Zur Zeit t befindet sich das Teilchen in $\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x} + \mathfrak{v}\, t$. Die Zeit des nächsten Abstandes ist

$$t_s = -\frac{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{v}\rangle}{v^2},$$

der nächste Abstand selbst

$$\varrho_s = \sqrt{|\mathfrak{x}|^2 - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{v}/v\rangle^2}.$$

Die von dem Teilchen verursachte Störfrequenz ist

$$\frac{2\pi C c_n}{v}\, \varrho_s^{-(n-1)}\, \delta(t - t_s)$$

und die Störphase

$$\frac{2\pi C c_n}{v}\, \varrho_s^{-(n-1)}\, \chi_{0,t}(t_s) = \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, t),$$

wo für $a \geqq b$

$$\chi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad a < x < b \\ 0 & \text{falls} \quad x < a \quad \text{oder} \quad x > b \\ \text{nicht definiert, falls } x = a \text{ oder } x = b \end{cases}$$

und

$$\chi_{b,a} = -\chi_{a,b}$$

ist.

Die gesamte Phasenstörung ist

$$\sum \eta(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota, t) = \langle \sum \delta_{(\mathfrak{x}_\iota, \mathfrak{v}_\iota)}, \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, t)\rangle.$$

Man weiß aus der Einleitung, wie ein solcher Ausdruck in das statistische Modell zu übersetzen ist.

Satz 1. *Für fast alle $\mu \in \mathfrak{M}$ ist die Funktion*

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) \to \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, t)$$

integrierbar.

Die Funktion

$$\mu \to Y^s(t, \mu) = \langle \mu, \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, t)\rangle$$

existiert für fast alle μ und ist P-meßbar. Die Funktion

$$t \to R_v^s(t) = E \exp i Y^s(t, \mu)$$

ist stetig und positiv definit und hat die Form

$$R_v^s(t) = e^{-\gamma|t| + i\sigma t}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \gamma &= N v \int_0^\infty 2\pi \varrho\, d\varrho \left(1 - \cos \frac{2\pi C c_n}{v \varrho^{n-1}}\right) \\ &= \pi c_n^{2/(n-1)} \cos \frac{\pi}{n-1}\, \Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right) N v \left(\frac{2\pi |C|}{v}\right)^{2/(n-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= N v \int_0^\infty 2\pi \varrho\, d\varrho \sin \frac{2\pi C c_n}{v \varrho^{n-1}} \\ &= \pi c_n^{2/(n-1)} \sin \frac{\pi}{n-1}\, \Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right) N v \left(\frac{2\pi |C|}{v}\right)^{2/(n-1)} \operatorname{sgn} C \end{aligned}$$

und

$$c_n = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Es ist $\gamma > 0$ und R_v^s die Fouriertransformierte des Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$I_v^s(\nu) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\gamma}{\gamma^2 + (\nu - \sigma)^2}.$$

I_v^s heißt die Stoßapproximation des im letzten Kapitel definierten Linienprofils.

Beweis. Die Funktion $\eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, t)$ divergiert nur, wo $\varrho_s(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) = 0$ wird, d. h. wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{v}$ parallel sind. Diese Menge hat aber, wie bei Satz VI ausgeführt, das λ-Maß Null.

Wir führen bei festem $\mathfrak{v}$ Zylinderkoordinaten mit $\mathfrak{v}$ als Achsenrichtung ein. Dann wird $t_s = -z/v$, $\varrho_s = \varrho$ und

$$\eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, t) = \frac{2\pi C c_n}{v}\,\varrho^{-(n-1)}\,\chi_{0,t}\left(-\frac{z}{v}\right).$$

Der Ausdruck ist für große ϱ integrierbar. Folglich ist

$$\min(1, |\eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, t)|)$$

bezüglich λ integrierbar und nach Satz V.2 sind die beiden ersten Aussagen von Satz 1 bewiesen.

Es ist

$$\begin{aligned} R(t) &= E \exp i Y(t, \mu) \\ &= \exp N \int [\exp i\eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, t) - 1]\, d\lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) \\ &= \exp N \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\exp\left(\frac{2\pi i C c_n}{v\varrho^{n-1}}\,\chi_{0,t}\left(-\frac{v}{z}\right)\right) - 1\right] \end{aligned}$$

nach Einführung von Zylinderkoordinaten. Man rechnet weiter aus

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp N v |t| \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho \left[\exp\left(\frac{2\pi i C c_n}{v\varrho^{n-1}}\operatorname{sgn} t\right) - 1\right] \\ &= e^{-\gamma|t| + i\sigma t} \end{aligned}$$

mit

$$\gamma = N v \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho \left(1 - \cos\frac{2\pi C c_n}{v\varrho^{n-1}}\right),$$

$$\sigma = N v \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho \sin\frac{2\pi C c_n}{v\varrho^{n-1}}.$$

Da $\gamma \geqq 0$ ist, ist $R(t)$ positiv definit. Daß $R(t)$ stetig ist, ist offensichtlich.

Dem Buch von Traving ([*13*], S. 15) entnehmen wir für $C > 0$ die Formel

$$\gamma - i\sigma = \pi c_n^{2/(n-1)} e^{-\pi i/(n-1)}\, \Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right) N v \left(\frac{2\pi|C|}{v}\right)^{2/(n-1)}$$

mit (s. [*13*], S. 9)

$$c_n = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Für $C < 0$ hat man das Vorzeichen von σ umzudrehen. Man sieht leicht, daß $\gamma > 0$ ist und führt den Beweis zu Ende.

Wir führen jetzt charakteristische Maßeinheiten ein. Da $2\pi C/r^n$ die Bedeutung einer Frequenz hat, also von der Dimension $1/Zeit$ ist, ist C von der Dimension $Länge^n/Zeit$ und $2\pi C/v$ von der Dimension $Länge^{n-1}$. Die charakteristische Länge des Problems ist also

$$l_c = \left(\frac{2\pi\,|C|}{v}\right)^{1/(n-1)},$$

die charakteristische Zeit

$$t_c = \frac{l_c}{v} = \left(\frac{2\pi\,|C|}{v^n}\right)^{1/(n-1)}$$

und die charakteristische Frequenz gleich

$$\nu_c = \frac{1}{t_c} = \left(\frac{v^n}{2\pi\,|C|}\right)^{1/)n-1)}.$$

Man formt

$$F_v(t) = \int_0^\infty 2\pi\varrho\,d\varrho \int dz \left[\exp i \int_0^t \frac{2\pi C\,d\tau}{(\varrho^2 + (z + v\tau)^2)^{n/2}} - 1\right]$$

um, indem man

$$\varrho' = \varrho/l_c,$$
$$z' = z/l_c,$$
$$\tau' = \tau/t_c$$

als neue Integrationsvariable einführt und anschließend die Striche bei den Buchstaben wegläßt:

$$F_v(t) = l_c^3 \int_0^\infty 2\pi\varrho\,d\varrho \int dz \left[\exp i \int_0^{t/t_c} \frac{\operatorname{sgn} C\,d\tau}{(\varrho^2 + (z + \tau)^2)^{n/2}} - 1\right].$$

Unter Berücksichtigung der Relation $F_v(t)^* = F_v(-t)$ erhält man

$$F_v(t) = l_c^3\, F(t/t_c \operatorname{sgn} C)$$

mit

$$F(t) = \int_0^\infty 2\pi\varrho\,d\varrho \int dz \exp\left[i \int_0^t \frac{d\tau}{(\varrho^2 + (z + \tau)^2)^{n/2}} - 1\right].$$

Wir setzen

$$h = N\,l_c^3.$$

Dann ist

$$R_v(t) = R(t/t_c \operatorname{sgn} C)$$

mit

$$R(t) = \exp h\,F(t)$$

und

$$I_v(\nu) = \frac{1}{\nu_c}\, I\left(\frac{\nu}{\nu_c} \operatorname{sgn} C\right)$$

mit

$$R(t) = \int I(\nu)\, e^{i\nu t}\, d\nu.$$

Die Konstanten der Stoßapproximation ergeben sich zu

$$\gamma = \pi\, c_n^{2/(n-1)} \cos\frac{\pi}{n-1}\, \Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right) h/t_c,$$
$$\sigma = \pi\, c_n^{2/(n-1)} \sin\frac{\pi}{n-1}\, \Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right) h/t_c \operatorname{sgn} C.$$

Setzen wir

$$F^s(t) = |t| \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho \left[\exp\left(\frac{i c_n}{\varrho^{n-1}} \operatorname{sgn} t\right) - 1\right] = -\gamma_0 |t| + i\sigma_0 t$$

mit (s. o. Beweis von Satz 1)

$$\gamma_0 - i\sigma_0 = \pi c_n^{2/(n-1)} e^{-\pi i/(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-3}{n-1}\right).$$

Dann ist

$$R_v^s(t) = R^s\left(\frac{t}{t_c} \operatorname{sgn} C\right)$$

mit

$$R^s = e^{hF^s}$$

und

$$I_v^s(\nu) = \frac{1}{\nu_0} I^s\left(\frac{\nu}{\nu_0} \operatorname{sgn} C\right)$$

mit

$$I^s(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{h\gamma_0}{(h\gamma_0)^2 + (\nu - h\sigma_0)^2}.$$

Wir zerlegen

$$F(t) = \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho\, G(\varrho, t)$$

mit

$$G(\varrho, t) = \int \left[\exp i \int_0^t \frac{d\tau}{(\varrho^2 + (z+\tau)^2)^{n/2}} - 1\right] dz.$$

Hilfssatz 1. *Für $t \geqq 0$ gilt*

$$|G(\varrho, t) - t(e^{icn/\varrho n-1} - 1) \leqq \min\left(12\zeta + \frac{4}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{\zeta^{n-2}},\ \frac{2c_n}{n-2} \frac{1}{\varrho^{2n-3}}\right),$$

wo ζ eine willkürliche Zahl > 0 ist.

Beweis. Wir verwenden Satz III. 4. Es ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{(\varrho^2 + t^2)^{n/2}}.$$

Also

$$\int \varphi(t)\, dt = c_n/\varrho^{n-1}$$

und

$$\int |t|\, |\varphi(t)|\, dt = \int_0^\infty \frac{2t\, dt}{(\varrho^2 + t^2)^{n/2}} = \int_{\varrho^2}^\infty \frac{du}{u^{n/2}} = \frac{1}{n/2 - 1} \frac{1}{\varrho^{n-2}}.$$

Also ist

$$|G(t) - t(e^{ic_n/\varrho^{n-1}} - 1)| \leqq \frac{2c_n}{n-1} \varrho^{-(2n-3)}.$$

Diese Abschätzung wird für kleine ϱ unbrauchbar. Sei ζ eine willkürliche Zahl > 0. Wir zerlegen

$$\begin{aligned}
&\int \left(e^{i\int_0^t \varphi(z+\tau)\,d\tau} - 1\right) dz - t(e^{i\int\varphi} - 1) \\
&= \int_{-\infty}^{-t-\zeta} + \int_{-t-\zeta}^{-t+\zeta} + \left[\int_{-t+\zeta}^{-\zeta} - (t - 2\zeta)(e^{i\int\varphi} - 1)\right] + \int_{-\zeta}^{+\zeta} + \int_\zeta^\infty - 2\zeta(e^{i\int\varphi} - 1) \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI}.
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke II, IV und VI sind dem Betrage nach $\leqq 4\zeta$. Durch die Transformation $z' = -z - t$, $\tau' = t - \tau$ geht wegen der Symmetrie von φ der Ausdruck I in V über. Es ist

$$|\mathrm{V}| \leqq \int\limits_{\zeta}^{\infty} \int\limits_{0}^{t} \varphi(z+\tau)\,d\tau\,dz \leqq \int\limits_{\zeta}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(z+\tau)\,d\tau\,dz \leqq \int\limits_{\zeta}^{\infty} \int\limits_{z}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^n}\,dz$$
$$= \frac{1}{(n-1)(n-2)}\,\frac{1}{\zeta^{n-2}}.$$

Weiter ist

$$\mathrm{III} = \int\limits_{-t+\zeta}^{-\zeta} e^{i\int\varphi} \left(e^{-i\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(z+\tau)d\tau \,-\, i\int\limits_{t}^{\infty}\varphi(z+\tau)d\tau} - 1\right) dz$$

und

$$|\mathrm{III}| \leqq \int\limits_{-t+\zeta}^{-\zeta} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(z+\tau)\,d\tau\,dz + \int\limits_{-t+\zeta}^{-\zeta} \int\limits_{t}^{\infty} \varphi(z+\tau)\,d\tau\,dz = \mathrm{III\,a} + \mathrm{III\,b}.$$

Durch die Transformation $\tau' = -\tau + t$, $z' = -t - z$ führt man IIIb in IIIa über. In IIIa dreht man das Vorzeichen der Integrationsvariablen um und erhält den schon abgeschätzten Ausdruck

$$|\mathrm{III\,a}| \leqq \int\limits_{\zeta}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(z+\tau)\,d\tau\,dz.$$

Zusammenfassend erhält man

$$\left|G(\varrho,t) - t\left(e^{ic_n/\varrho^{n-1}} - 1\right)\right| \leqq 12\,\zeta + \frac{4}{(n-1)(n-2)}\,\frac{1}{\zeta^{n-2}}.$$

Hilfssatz 2. *Es ist*

$$F(t) = F^s(t) + F_0(t).$$

Dabei ist $F^0(t)$ eine stetige, beschränkte Funktion, $F^0(t)^* = F^0(-t)$. Für $t \to +\infty$ oder $t \to -\infty$ strebt $F^0(t)$ gegen einen Grenzwert, und zwar ist

$$\lim_{t\to+\infty} F^0(t) = k_n$$
$$= \int\limits_0^{\infty} 2\pi\varrho\,d\varrho \int dz \left(e^{i\int\limits_z^{\infty}\frac{d\tau}{(\varrho^2+\tau^2)^{n/2}}} + e^{+i\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{d\tau}{(\varrho^2+\tau^2)^{n/2}}} - e^{\frac{ic_n}{\varrho^{n-1}}} - 1\right).$$

Außerdem gilt

$$\|F^0\| = K_n \leqq \pi\left(12\,\zeta + \frac{4}{(n-1)(n-2)}\,\frac{1}{\zeta^{n-2}}\right) + \frac{4\pi c_n}{(n-2)(2n-5)},$$

wo $\zeta > 0$ eine willkürliche Zahl ist.

Beweis. Daß F^0 stetig ist und die angegebene Symmetrieeigenschaft besitzt, folgt aus den entsprechenden Aussagen für F und F^s.

Für $t \geqq 0$ ist

$$F(t) - F^s(t) = \int\limits_0^{\infty} 2\pi\varrho\,d\varrho\left(G(\varrho,t) - t\left(e^{ic_n/\varrho^{n-1}} - 1\right)\right).$$

Daß F^0 für $t \uparrow \infty$ gegen k_n strebt, folgt aus Satz III.4 und der Abschätzung von Hilfssatz 1, die es nach dem Satz von Lebesgue erlaubt, unter dem Integral zur Grenze zu gehen.

Wir zerlegen das Integral

$$|F(t) - F^s(t)| \leqq \int\limits_0^1 2\pi\varrho\, d\varrho \left(12\zeta + \frac{4}{(n-1)(n-2)}\frac{1}{\zeta^{n-2}}\right) + \int\limits_1^\infty \frac{4\pi c_n}{n-2}\varrho^{-(2n-4)}\, d\varrho$$

und erhalten wegen der Symmetrie von F^0 die angegebene Abschätzung.

Satz 2. *Sei $v > 0$, dann ist I_v eine stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet. Es gilt*

$$\frac{\|I_v - I_v^s\|}{\|I_v^s\|} \leqq e^{K_n N l_c^3} - 1,$$

wo

$$K_n \leqq 12\zeta\pi + \frac{4\pi}{(n-1)(n-2)\zeta^{n-2}} + \frac{4\pi c_n}{(n-2)(2n-5)}$$

und $\zeta > 0$ eine willkürliche Zahl ist. $\|\cdot\|$ bedeutet die gleichmäßige Norm.

Ist also $N l_c^3 \ll 1$, dann approximiert I_v^s die Funktion I_v sehr gut dort, wo I_v^s merklich von Null verschieden ist, d. h. in der Umgebung der Linienmitte σ der Stoßapproximation. Wir machen darauf aufmerksam, daß unsere Abschätzung sehr roh ist und die Stoßapproximation wahrscheinlich erheblich besser ist.

Beweis. Ohne an der Aussage etwas zu ändern, können wir I_v durch I und I_v^s durch I^s ersetzen.

Es ist

$$F(t) = F^s(t) + F^0(t)$$

und

$$R(t) = e^{hF^s(t)}\, e^{hF^0(t)}.$$

Da F^0 beschränkt ist und $e^{hF^s(t)}$ exponentiell abfällt, fällt $R(t)$ exponentiell ab und ist integrierbar.

Also gilt

$$I(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\nu t}\, R(t)\, dt$$

und $I(\nu)$ ist eine stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet.

$$|R(t) - R^s(t)| = |e^{hF^s(t)}(e^{hF_0(t)} - 1)| \leqq e^{-h\gamma_0|t|}(e^{hK_n} - 1)$$

und

$$\|I(\nu) - I^s(\nu)\| \leqq \frac{1}{2\pi}\int e^{-h\gamma_0|t|}(e^{hK_n} - 1)\, dt = \frac{1}{\pi h\gamma_0}(e^{hK_n} - 1).$$

Da

$$\|I^s(\nu)\| = \frac{1}{\pi h\gamma_0}$$

ist, erhält man die Behauptung des Satzes.

Wir bringen zum Abschluß dieses Kapitels noch einige numerische Angaben. Wir setzen $n = 4$.

Das Minimum von

$$f(\zeta) = 12\zeta + \frac{4}{(n-1)(n-2)}\frac{1}{\zeta^{n-2}}$$

liegt bei

$$\zeta = \left(\frac{1}{3(n-1)}\right)^{1/(n-1)} = \left(\frac{1}{9}\right)^{1/3} \approx \frac{1}{2}.$$

Es ist

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 8\,\frac{2}{3}.$$

Der Tabelle von UNSÖLD ([*14*], S. 301) entnimmt man $c_4 = \pi/2$. Also ist

$$K_4 \leqq 8{,}7\,\pi + \frac{\pi^2}{3} < 31.$$

Sei C_0 die Starkeffektkonstante gemessen in cm^{-1} pro (100 kilo-Volt/cm)^2. Die mittlere Geschwindigkeit v bestimmen wir aus der Temperatur T durch

$$\frac{m}{2}\,v^2 = \frac{3}{2}\,k\,T.$$

Die Störteilchen seien mit n Elementarladungen geladen und ihre Masse sei Zmal größer als die Protonenmasse. Dann ergibt sich (vgl. [*14*], S. 327)

$$\frac{2\pi C}{v} = l_c^3 = 2\cdot 10^{-17}\,\frac{C_0\,n^2\,\sqrt{Z}}{\sqrt{T}}\ \mathrm{cm}^3,$$

wenn T in Grad Kelvin gemessen wird. Sei also z. B. $T = 10^4\,{}^\circ\mathrm{K}$, $C_0 = 10$ (das ist schon eine empfindliche Linie), Z und $n = 1$. Dann wird

$$l_c^3 = 2\cdot 10^{-18}\ \mathrm{cm}^3.$$

Die Stoßapproximation ist also bei einem Wasserstoffplasma von $10^4\,{}^\circ$K bei der Störung durch Protonen sicher bis zu Dichten von 10^{16} Teilchen pro cm^3 gut. Bei der Störung durch Elektronen wird l_c^3 um einen Faktor 40 kleiner.

VIII. Diskussion der Anderson-Formel auf den Linienflügeln

Dieses Kapitel kreist um die quasistatische Approximation: alle Teilchen ruhen und die Linienverbreiterung geschieht allein durch die statistische Mittelung. Ein Teilchen im Ort $\mathfrak{x}$ verursacht die Störfrequenz $\psi(|\mathfrak{x}|)$ und die Störphase $t\psi(|\mathfrak{x}|)$. Man hat in den Überlegungen in Kapitel VI einfach $v = 0$ zu setzen, um die quasistatische Approximation zu erhalten.

Man findet

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \int_0^\infty 2\pi\varrho\,d\varrho\int dz\left[\exp\left(i\,t\,\psi\left(\sqrt{\varrho^2+z^2}\right)\right) - 1\right] \\ &= \int_0^\infty 4\pi r^2\,dr\,\left(e^{it\psi(r)} - 1\right) \end{aligned}$$

nach Einführung von Kugelkoordinaten. Es ist $R_0 = e^{NF_0(t)}$ und I_0 wie in Satz V durch R_0 definiert.

Satz 1. *Die Funktion $F_0(t)$ ist Fouriertransformierte des straffen, fast positiven reellen Funktionals*

$$\langle A_0, f\rangle = \frac{4\pi}{n}\,(2\pi\,|C|)^{3/n}\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1+3/n}}\,\left(f(x\,\mathrm{sgn}\,C) - f(0)\right)$$

für $f\in\mathfrak{T}$.

Es ist also

$$I_0 = \exp_*\,N A_0.$$

Beweis. Aus der Definition sieht man leicht, daß A_0 ein straffes, fast positives Funktional ist. Um zu beweisen, daß $\hat{A}_0 = F$ ist, führt man die Integrationsvariable

$$x = \frac{2\pi |C|}{r^n}$$

ein.

Satz 2. *Für $v > 0$ ist F_v Fouriertransformierte eines straffen, fast positiven reellen Funktionals A_v. Es ist also*

$$I_v = \exp_* N A_v .$$

Beweis. Wir verwenden Satz II. 5. Sei $f \in \mathscr{S}$, $\hat{f} \geqq 0$ und $\hat{f}(0) = 0$, dann ist nach der Abschätzung in Hilfssatz VI. 1 und nach dem Satz von Fubini

$$\int F_v(t)\, f(t)\, dt = \int_0^\infty 2\pi \varrho\, d\varrho \int G_v(\varrho, t)\, f(t)\, dt .$$

Wir führen die Integrationsvariable $z/v = s$ ein

$$G_v(\varrho, t) = v \int \left(\exp i \int_0^t \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + v^2(\tau + s)^2}\right) d\tau - 1 \right) ds .$$

$G_v(\varrho, t)$ ist also ein positives Vielfaches einer Funktion des in Kapitel III betrachteten Typs. Man hat

$$\varphi(t) = \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + v^2 t^2}\right)$$

zu setzen. Nach Satz III. 2 ist

$$\int G_v(\varrho, t)\, f(t)\, dt \geqq 0$$

und somit

$$\int F_v(t)\, f(t)\, dt \geqq 0 .$$

Wir verwenden Satz II.5 und Hilfssatz VI.2 und vollenden den Beweis.

Satz 3. *Für $v \downarrow 0$ konvergiert A_v gegen A_0 für jedes $f \in \mathfrak{T}$.*

Beweis. Wir verwenden Satz II.6. Nach Hilfssatz VI.2 ist $F_0(t)$ stetig. Konvergiert $v_i \downarrow 0$, dann sind die $F_{v_i}(t)$ durch ein gemeinsames Polynom beschränkt. Wir müssen noch zeigen, daß $F_{v_i}(t) \to F_0(t)$ für alle t konvergiert. Nun ist mit $\varphi(z) = \psi\left(\sqrt{\varrho^2 + z^2}\right)$

$$\begin{aligned}
&|G_v(\varrho, t) - G_0(\varrho, t)| \\
&= \left| \int \left(\exp i \int_0^t \varphi(z + v\tau)\, d\tau - 1 \right) dz - \int (\exp i t \varphi(z) - 1)\, dz \right| \leqq \\
&\leqq \int \left| \int_0^t \varphi(z + v\tau)\, d\tau - t\varphi(z) \right| dz \leqq \\
&\leqq \int_0^{|t|} \int |\varphi(z + v\tau) - \varphi(z)|\, dz\, d\tau \leqq \\
&\leqq |t| \sup_{0 \leqq \tau \leqq t} \int |\varphi(z + v\tau) - \varphi(z)|\, dz \\
&\to 0 \quad \text{für} \quad v \downarrow 0 ,
\end{aligned}$$

weil die Translation von integrierbaren Funktionen in der L^1-Norm stetig ist.

Also konvergiert $G_{v_i}(\varrho, t) \to G_0(\varrho, t)$ und nach der Abschätzung von Hilfssatz VI.1 und dem Satz von Lebesgue

$$F_{v_i}(t) = \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho\, G_{v_i}(\varrho, t) \to \int_0^\infty 2\pi\varrho\, d\varrho\, G_0(\varrho, t) = F_0(t).$$

Für jede Folge $v_i \downarrow 0$ und für jedes $f \in \mathfrak{T}$ konvergiert also nach Satz II.6

$$\langle A_{v_i}, f\rangle \to \langle A_0, f\rangle.$$

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Wie oben bei der Einführung charakteristischer Koordinaten nützen wir jetzt die Homogenität von $\psi(r) = 2\pi C\cdot r^{-4}$ aus.

Sei $\alpha > 0$ ein Parameter. Durch Einführung der neuen Integrationsvariablen

$$\varrho = \alpha^{-1/(n-1)}\varrho'$$

$$z = \alpha^{-1/(n-1)} z'$$

$$\tau = \alpha^{-n/(n-1)}\tau'$$

erhält man

$$F_{\alpha v}(t) = \alpha^{-3/(n-1)} F_v(\alpha^{n/(n-1)} t).$$

Setzen wir

$$x = \alpha^{-n/(n-1)},$$

dann erhält man

$$x^{3/n} F_v\left(\frac{t}{x}\right) = F_{v\cdot x^{-(n-1)/n}}(t).$$

Bedenkt man, daß $x A_v(x\nu)$ mit

$$\langle x A_v(x\nu), f(\nu)\rangle = \langle A_v(\nu), f(\nu/x)\rangle$$

durch die Fouriertransformation auf $F_v(t/x)$ abgebildet wird, dann erhält man

Satz 4. *Für $f \in \mathfrak{T}$ und $x \to \infty$ konvergiert $x^{1+3/n} A_v(x\nu)$ gegen A_0.*

Satz 5. *Für $f \in \mathfrak{T}$ und $x \to \infty$ konvergieren die fast positiven straffen Funktionale*

$$x^{3/n}(x I_v(x\nu) - \delta(\nu))$$

gegen $N A_0$.

Beweis. Offensichtlich ist $x^{3/n}(x I_v(x\nu) - \delta(\nu))$ ein straffes, fast positives Funktional. Seine Fouriertransformierte ist

$$x^{3/n}(e^{NF_v(t/x)} - 1) = x^{3/n}\exp\left(x^{-3/n} N F_{v\cdot x^{-(n-1)/n}}(t) - 1\right).$$

Nach Satz II.3 ist Re $F_v(t) \leqq 0$ und man kann den letzten Ausdruck durch

$$|F_{v\cdot x^{-(n-1)/n}}(t)|$$

abschätzen. Nach Hilfssatz VI.2 liegt dieser Ausdruck für $x \geqq 1$ unter einem festen Polynom in t. Da

$$x^{3/n}[\exp(x^{-3/n} F_{v\cdot x^{-(n-1)/n}}(t)) - 1] \to N F_0(t)$$

geht, erhält man nach Satz II.6 die Behauptung des Satzes.

Satz 6. *Für $x \to \infty$ konvergiert*

$$x^{3/n} \int_x^\infty I_v(\nu)\, d\nu \to \frac{4\pi}{3} N (2\pi |C|)^{3/n}$$

$$x^{3/n} \int_{-\infty}^{-x} I_v(\nu)\, d\nu \to 0,$$

falls $C > 0$ ist. Ist $C < 0$, so geht

$$x^{3/n} \int_x^\infty I_v(\nu)\, d\nu \to 0$$

$$x^{3/n} \int_{-\infty}^{-x} I_v(\nu)\, d\nu \to \frac{4\pi}{3} N (2\pi |C|)^{3/n}.$$

Da Satz 6 für alle v, also auch für $v = 0$ dieselben Grenzwerte liefert, folgt, daß sich $I_v(\nu)$ im Unendlichen wie $I_0(\nu)$, die quasistatische Approximation, verhält.

Beweis. Sei

$$B_x = x^{3/n} (x\, I_v(x\nu) - \delta(\nu)),$$

sei χ die charakteristische Funktion von $[1, \infty]$, sei φ eine stetige Funktion $0 \leqq \varphi \leqq \chi$ und ψ eine stetige Funktion $\psi \geqq \chi$, die in einer Umgebung des Nullpunktes verschwindet. Sei $C > 0$. Wegen Satz 1 und Satz 5 gilt

$$\langle A_0, \psi \rangle = \frac{4\pi}{n} (2\pi |C|)^{3/n} \int_0^\infty \frac{\psi(\nu)\, d\nu}{\nu^{1+3/n}} \geqq \limsup \langle B_x, \chi \rangle \geqq \liminf \langle B_x, \chi \rangle \geqq$$

$$\geqq \langle A_0, \varphi \rangle = \frac{4\pi}{n} (2\pi |C|)^{3/n} \int_0^\infty \frac{\varphi(\nu)\, d\nu}{\nu^{1+3/n}}.$$

Man kann φ und ψ so wählen, daß sich $\langle A_0, \varphi \rangle$ und $\langle A_0, \psi \rangle$ um beliebig wenig von

$$\frac{4\pi}{n} (2\pi |C|)^{3/n} \int_1^\infty \frac{d\nu}{\nu^{1+3/n}} = \frac{4\pi}{3} (2\pi |C|)^{3/n} = a$$

unterscheiden.

Folglich konvergiert

$$\langle B_x, \chi \rangle = x^{3/n+1} \int_1^\infty I(x\nu)\, d\nu$$

$$= x^{3/n} \int_x^\infty I(\nu)\, d\nu \to a.$$

So werden auch die anderen Aussagen des Satzes bewiesen.

Literatur

[1] ANDERSON, P. W.: A method of synthesis of the statistical and impact theories of pressure broadening. Phys. Review, II. Ser. **86**, 809 (1952).

[2] —, and J. D. TALMAN: Pressure broadening of spectral lines at general pressures. Conference on the broadening of spectral lines. University of Pittsburgh, Sept. 15—17, 1955, S. 29—61.

[3] Bourbaki, N.: Topologie générale, chap. 9. Paris: Hermann 1958.
[4] — Intégration, chap. 1—4. Paris: Hermann 1952.
[5] Doob, J. L.: Stochastic processes. New York: John Wiley & Sons 1953.
[6] Gnedenko, B. W., u. A. N. Kolmogorov: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Berlin: Akademie-Verlag 1960.
[7] Griem, H. R., M. Baranger, A. C. Kolb and G. Oertel: Stark broadening of neutral Helium lines in a plasma. Phys. Review, II. Ser. **125**, 177—195 (1962).
[8] Krickeberg, K.: Maße in topologischen Räumen. Seminar Sommersemester 1963, Ausarbeitung von W. Hildenbrand.
[9] Loomis, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York: D. van Nostrand Inc. 1953.
[10] Neumark, M. A.: Normierte Algebren. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.
[11] Schwartz, L.: Théorie des distributions. Tome I. Paris: Hermann 1957.
[12] — Théorie des distributions. Tome II. Paris: Hermann 1959.
[13] Traving, G.: Über die Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien. Karlsruhe: G. Braun 1960.
[14] Unsöld, A.: Physik der Sternatmosphären. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.
[15] Waldenfels, W. v.: Fast positive Operatoren. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **4**, 159—174 (1965).

Mathematisches Institut
der Universität des Saarlandes
Saarbrücken