Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9, 323—340 (1968)

Wurzeln vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum I *

Horst Michel

Eingegangen am 25. August 1967

Für maßtreue Transformationen T eines Maßraumes (Ω, B, m) ist die Frage ihrer Einbettbarkeit in eine Strömung, d.h. die Auffindung einer einparametrigen Gruppe $\{T_\gamma\}$ maßtreuer Transformationen T_γ mit den Eigenschaften $T_1 = T$, $T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} = T_{\gamma_1+\gamma_2}$, wobei diese Gleichungen mod m-Nullmengen zu verstehen sind und die γ die additive Gruppe der reellen Zahlen oder eine ihrer Untergruppen durchlaufen, ein klassisches Problem der Ergodentheorie. Der erste Schritt zu seiner Lösung gelang Halmos [4], der unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über T notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Quadratwurzel von T, d.h. einer maßtreuen Transformation S mit $S^2 = T$ angeben konnte.

Einige seiner Hauptresultate sind in Arbeiten von Blum-Friedman [3] und Krengel-Michel [12] auf k-te Wurzeln verallgemeinert worden und man hat insbesondere die folgenden Resultate:

1°. Ist T ergodisch und gibt es eine k-te Wurzel S von T (d.h. es gilt $S^k = T$), so enthält die Gruppe $H(T)$ der Eigenwerte des vermöge $(Tf)(\omega) = f(T\omega)$, $(f \in L_2(m), \omega \in \Omega)$ der maßtreuen Transformation T zugeordneten linearen isometrischen Operators T in $L_2(m)$ keine von 1 verschiedenen k-ten Einheitswurzeln. Die Bezeichnung der maßtreuen Transformation und des durch sie induzierten isometrischen Operators in $L_2(m)$ durch dasselbe Symbol T kann im folgenden zu keinen Mißverständnissen führen und ist auch bei anderen Autoren üblich.

2°. Ist T eine ergodische Transformation mit diskretem Spektrum und $H(T)$ frei von k-ten Einheitswurzeln $\neq 1$, so besitzt T eine k-te Wurzel.

3°. Ist T eine invertierbare ergodische Transformation mit diskretem Spektrum, so existiert eine einparametrige Gruppe $\{T_\gamma\}$ mit $T_1 = T$ und $T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} = T_{\gamma_1+\gamma_2}$, wobei die Parametergruppe $\{\gamma\}$ von allen Zahlen $1/k$ erzeugt wird, für die k-te Wurzeln existieren. $\{\gamma\}$ ist also eine (im allgemeinen echte) 1 enthaltende additive Untergruppe der Gruppe der rationalen Zahlen.

Es ist wünschenswert, sich von den in diesen Sätzen vorkommenden einschränkenden Voraussetzungen über T zu befreien, bzw. sie abzuschwächen. Schon Halmos konnte in der oben zitierten Arbeit zeigen, daß das zweite Resultat auch für nichtergodische T gilt, wenn außerdem $k = 2$ ist. Als besonders ein-

---

* Gekürzter Teil der am 21. 2. 1967 von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg angenommenen Habilitationsschrift des Verfassers.

schneidend erweist sich die Voraussetzung des diskreten Spektrums, von der indes beim Beweis von 2°. wesentlicher Gebrauch gemacht wird, da für ergodische Transformationen mit diskretem Spektrum eine „kanonische" Darstellung als Rotation in einer kompakten topologischen Gruppe angebbar ist, mit deren Hilfe die Wurzeln konstruiert werden können.

1962 gelang ABRAMOW [1], aufbauend auf einer Arbeit [5] von HALMOS, eine solche kanonische Darstellung für Transformationen mit sogenanntem quasidiskretem Spektrum, das eine Verallgemeinerung des diskreten Spektrums darstellt. Um jedoch die Orthogonalität der Quasieigenfunktionen zu sichern, mußte von T nicht nur Ergodizität, sondern Vollergodizität (T^n ergodisch für alle natürlichen n) vorausgesetzt werden.

Die Untersuchungen von ABRAMOW dienen der vorliegenden Arbeit als Grundlage, um Existenzsätze über Wurzeln vollergodischer Automorphismen (= invertierbare maßtreue Transformationen) mit quasidiskretem Spektrum herzuleiten.

Die Theorie von ABRAMOW erweist sich dabei als weitreichend genug, um für vollergodische Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum analoge Resultate zu erzielen, wie sie oben für ergodische Transformationen mit diskretem Spektrum zusammengestellt wurden.

1. Vorbemerkungen

1.1. Gruppentheoretische Hilfsmittel

Aus der Gruppentheorie werden insbesondere kommutative torsionsfreie Abelsche Gruppen verwandt, für deren Theorie z.B. auf [13] verwiesen sei.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

Ist S ein Endomorphismus in einer torsionsfreien Abelschen Gruppe G, so wird der *Kern des Endomorphismus* S^n mit

$$K_G(S^n) = \{g \in G \mid S^n g = 1\}$$

bezeichnet. Sind Mißverständnisse ausgeschlossen, werden dafür auch die Bezeichnungen $K(S^n)$ und G_n benutzt. Die zu S eindeutig bestimmte *Fortsetzung* in die Vervollständigung $\bar{G}$ von G bezeichnen wir mit $\bar{S}$. Für die Vervollständigung der Kerne der Potenzen von S gilt dann

$$\overline{K_G(S^n)} = K_{\bar{G}}(\bar{S}^n)\,. \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

S heißt *nilpotent*, falls ein natürliches n mit $S^n g = 1$ $(g \in G)$ existiert. Das dabei kleinstmögliche n heißt *Nilpotenzindex* von S. Mit S in G ist auch $\bar{S}$ in $\bar{G}$ nilpotent und zwar mit demselben Index.

S heiße (in Anlehnung an [13], S. 182, Fußnote) *lokal-nilpotent,* falls zu jedem $g \in G$ ein natürliches n mit $S^n g = 1$ existiert. Es gilt dann

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_G(S^n)\,, \qquad S G_{n+1} \subseteqq G_n\,.$$

Mit S in G ist auch $\bar{S}$ in $\bar{G}$ lokal-nilpotent und es gilt

$$\bar{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\bar{G}}(\bar{S}^n)\,.$$

Sind $G_1 \subseteqq G_2 \subseteqq \cdots$, $G_1' \subseteqq G_2' \subseteqq \cdots$ zwei wachsende (endliche oder unendliche) Folgen beliebiger Gruppen G_n, G_n' und ist in jeder der Gruppen $G = \bigcup_n G_n$, $G' = \bigcup_n G_n'$ ein Endomorphismus S bzw. S' derart definiert, daß $SG_{n+1} \subseteqq G_n$, $S'G_{n+1}' \subseteqq G_n'$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gilt, so heißen die Paare $\langle\{G_n\}, S\rangle$ und $\langle\{G_n'\}, S'\rangle$ genau dann *äquivalent* (in Zeichen: $\langle\{G_n\}, S\rangle \approx \langle\{G_n'\}, S'\rangle$), wenn $G_1 = Gr$ gilt und ein Isomorphismus V von G auf G' existiert, der die Elemente von $G_1 = G_1'$ festläßt und für den $VG_n = G_n'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $S = V^{-1}S'V$ gilt. Sind die Gruppen G, G' kommutative torsionsfreie Abelsche Gruppen und die Endomorphismen S, S' lokal-nilpotent mit $K_G(S^n) = G_n$, $K_{G'}(S'^n) = G_n'$, so kann für die Paare $\langle\{G_n\}, S\rangle$, $\langle\{G_n'\}, S'\rangle$ einfacher $\langle G, S\rangle$, $\langle G', S'\rangle$ geschrieben werden und damit ist

$$\langle G, S\rangle \approx \langle G', S'\rangle$$

definiert.

1.2. Maß- und ergodentheoretische Hilfsmittel

Im folgenden werden nur Lebesguesche Maßräume (Ω, B, m), ([16]) verwandt, die insbesondere separabel und normiert sind. Der jeweils zugeordnete Hilbertraum $L_2(m)$ enthält daher alle m-Fastkonstanten.

Sind zwei Automorphismen T_1 auf (Ω_1, B_1, m_1) und T_2 auf (Ω_2, B_2, m_2) *konjugiert* (= algebrenisomorph, [10], S. 164), so schreiben wir $T_1 \sim T_2$.

Einzelheiten der Abramowschen Theorie können aus [7], [1] und [11] entnommen werden, so daß wir uns hier im wesentlichen auf die Erläuterung abweichender Bezeichnungen beschränken können.

Ist T ein ergodischer Automorphismus eines Lebesgueschen Raumes (Ω, B, m), so werde die abzählbare *Gruppe der Eigenwerte* von T in $L_2(m)$ mit $H_1(T)$ und die *Gruppe der normierten Eigenfunktionen* mit $G_1(T)$ bezeichnet. Da jede m-fastkonstante Funktion aus $L_2(m)$ Eigenfunktion zum Eigenwert 1 ist, gilt $H_1(T) \subseteqq G_1(T)$ und beide Gruppen sind nicht leer. Sind $G_1(T) \subseteqq G_2(T) \subseteqq \cdots \subseteqq G_n(T)$ und $H_1(T) \subseteqq H_2(T) \subseteqq \cdots \subseteqq H_n(T)$ schon definiert, so bestimmt man $G_{n+1}(T)$ und $H_{n+1}(T)$ durch

$$G_{n+1}(T) = \{f \in L_2(m) \mid \|f\| = 1 \quad \text{und} \quad \exists\, \varphi \in G_n(T) \quad \text{mit} \quad Tf = \varphi f\},$$
$$H_{n+1}(T) = \{\varphi \in G_n(T) \mid \exists\, f \in G_{n+1}(T) \quad \text{mit} \quad Tf = \varphi f\}.$$

Dann gilt

$$H_n(T) \subseteqq H_{n+1}(T) \subseteqq G_n(T) \subseteqq G_{n+1}(T) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

$H_n(T)$ heißt die *Menge der Quasieigenwerte n-ter Ordnung von T*. $G_n(T)$ heißt die *Menge der Quasieigenfunktionen n-ter Ordnung von T*. Weiter heißt $G(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(T)$ die *Menge der Quasieigenfunktionen* von T und $H(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n(T)$ die *Menge der Quasieigenwerte von T*.

Existiert eine (und folglich auch eine kleinste) natürliche Zahl n mit $H_n(T) = H_{n+1}(T)$, so gilt $H(T) = H_n(T)$. $G(T)$ und $H(T)$ haben folgende Eigenschaften:

1. Aus $f \in G(T)$ folgt $|f(\omega)| = 1$ für m-fast alle $\omega \in \Omega$.
2. Jede der Mengen $G_n(T)$, $H_n(T)$, $G(T)$, $H(T)$ ist eine multiplikative Gruppe.

3. Gehören $f_1, f_2 \in G(T)$ zum gleichen Quasieigenwert φ, so gilt $f_1 = c f_2$, wobei c eine komplexe Konstante mit $|c| = 1$ ist.

4. Definiert man eine Abbildung R_T der Gruppe $H(T)$ in sich durch $T\varphi = R_T\varphi \cdot \varphi$, $(\varphi \in H(T))$ so ist R_T ein lokal-nilpotenter Endomorphismus der Gruppe $H(T)$ mit der Eigenschaft

$$K_{H(T)}(R_T^n) = H_n(T) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

5. Die Gruppe $H(T)$ ist abzählbar.

Ein Automorphismus heißt *vollergodisch*, wenn T^n $(n = 1, 2, \ldots)$ ergodisch ist. Vollergodizität von T ist gleichbedeutend damit, daß $H_1(T)$ keine n-ten $(n = 2, 3, \ldots)$ Einheitswurzeln $\neq 1$ enthält. Dann gilt zusätzlich

6. Ist T vollergodisch, so sind die Quasieigenfunktionen, die zu verschiedenen Quasieigenwerten gehören, orthogonal. Dies macht folgende Definition sinnvoll:

Ein vollergodischer Automorphismus T eines Lebesgueschen Raumes hat ein *quasidiskretes Spektrum* genau dann, wenn $G(T)$ den Hilbertraum $L_2(m)$ aufspannt. Offenbar ist ein quasidiskretes Spektrum, das nicht diskret ist, ein gemischtes Spektrum. Es gelten folgende grundlegende Sätze:

Eindeutigkeitssatz. Die vollergodischen Automorphismen T bzw. T' in den Lebesgueschen Räumen (Ω, B, m) bzw. (Ω', B', m') mit quasidiskreten Spektren sind genau dann konjugiert, wenn $\langle H(T), R_T\rangle \approx \langle H(T'), R_{T'}\rangle$ gilt (vgl. 1.1).

Existenzsatz. Es sei H eine abzählbare torsionsfreie Abelsche Gruppe, die mit der Kreisgruppe $K = \{z \mid z \text{ komplex und } |z| = 1\}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat und R_H ein lokal-nilpotenter Endomorphismus in H mit $K_H(R_H) = H_1 \subset K$. Dann existiert ein Lebesguescher Raum (Ω, B, m) und in ihm ein vollergodischer Automorphismus T mit quasidiskretem Spektrum derart, daß $\langle H(T), R_T\rangle \approx \langle H, R_H\rangle$ gilt.

Für die Klassen der zueinander konjugierten vollergodischen Automorphismen T mit quasidiskretem Spektrum bilden also die (rein algebraisch definierten) Klassen der zueinander äquivalenten Paare $\langle H, R_H\rangle$ ein vollständiges Invariantensystem, wenn H und R_H den Voraussetzungen des Existenzsatzes genügen.

Für die Beweise dieser Sachverhalte sei insbesondere auf die Arbeit von ABRAMOW [1] verwiesen.

2. Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Wurzel vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum

In diesem Kapitel werden der Begriff der Wurzel eines Automorphismus definiert und mit Hilfe der Abramowschen Theorie, wie sie in 1.2 dargestellt wurde, notwendige und hinreichende Kriterien dafür angegeben, daß ein vollergodischer Automorphismus mit quasidiskretem Spektrum eine k-te Wurzel $(k = 1, 2, \ldots)$ besitzt.

Wie bei den entsprechenden Fragestellungen für ergodische Automorphismen mit diskretem Spektrum (vgl. [7], S. 49ff. und [12]) wird auch hier die Pontrjaginsche Dualitätstheorie topologischer Gruppen wesentlich benutzt, doch ist von beiden Automorphismenklassen keine eine Untermenge der anderen, so daß es sich nicht um eine Verallgemeinerung des Wurzelproblems für ergodische Automorphismen mit diskretem Spektrum handelt. Das zeigt sich insbesondere an dem in 2.3 bewiesenen Eindeutigkeitssatz, der für Automorphismen, die ergodisch, aber nicht vollergodisch sind, im allgemeinen nicht gilt ([4], S. 165ff.).

2.1. Problemstellung und Hilfssätze

Definition 2.1.1. *Ist T ein vollergodischer Automorphismus eines Lebesgueschen Raumes (Ω, B, m) und k eine natürliche Zahl, so heißt der ergodische Automorphismus W von (Ω, B, m) eine k-te Wurzel von T, falls $W^k \sim T$ gilt. Die 1-ten Wurzeln von T sind also die zu T konjugierten Automorphismen.*

Bekanntlich ist die Beschränkung auf ergodische Automorphismen W in dieser Definition nicht unnötig eng, denn die unter einer maßtreuen Transformation W invarianten Mengen sind wegen $W^k \sim T$ auch unter T invariant, so daß aus der Ergodizität von T die von W hervorgeht. Wegen $W^{-1} \sim W^{k-1} T^{-1}$ ist W auch Automorphismus. Darüber hinaus gilt sogar der folgende

Satz 2.1.2. *Ist W eine k-te Wurzel eines vollergodischen Automorphismus, so ist W selbst vollergodisch.*

Beweis. Wäre nämlich (vgl. 1.2) W^l nicht ergodisch für ein natürliches l, so wäre auch $T^l \sim W^{lk}$ nicht ergodisch.

Die Wurzeln vollergodischer Automorphismen sind also nur in der Menge der vollergodischen Automorphismen zu suchen.

Satz 2.1.3. *Sind T_1 bzw T_2 zwei konjugierte vollergodische Automorphismen in den Lebesgueschen Maßräumen (Ω_1, B_1, m_1) bzw. (Ω_2, B_2, m_2), so hat T_2 genau dann eine k-te Wurzel, wenn T_1 eine hat.*

Beweis. Ist $S: (\Omega_1, B_1, m_1) \to (\Omega_2, B_2, m_2)$ der Isomorphismus, der T_1 in T_2 überführt und W_1 eine k-te Wurzel von T_1, so ist offenbar $W_2 = S W_1 S^{-1}$ eine k-te Wurzel von T_2.

Die Eigenschaft, eine k-te Wurzel zu besitzen oder nicht zu besitzen, kommt also nicht nur einem vollergodischen Automorphismus, sondern einer ganzen Klasse konjugierter vollergodischer Automorphismen zu.

Nach den Resultaten von ABRAMOW (vgl. 1.2) muß sich daher das Existenzproblem für Wurzeln W vollergodischer Automorphismen T mit quasidiskretem Spektrum auf Beziehungen zwischen den in 1.1 und 1.2 eingeführten Paaren $\langle H(T), R_T \rangle$ und $\langle H(W), R_W \rangle$ zurückführen lassen.

Es ist daher wichtig, den Zusammenhang zwischen den Quasispektren $H(T)$ und $H(W)$ zu kennen. Zu diesem Zweck wird zunächst der Zusammenhang von $G(T)$ mit $G(W)$ untersucht.

Lemma 2.1.4. *Ist W eine k-te Wurzel eines vollergodischen Automorphismus T eines Lebesgueschen Raumes (Ω, B, m), so gelten für die Gruppen $G_n(T)$, $G_n(W)$, $G(T)$, $G(W)$ der Quasieigenfunktionen die Identitäten*

$$G_n(W) = G_n(T), \tag{1}$$

$$G(W) = G(T) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Beweis. 1. Ist $n = 1$, so folgt aus $g \in G_1(W)$ mit einem gewissen $\mu \in H_1(W)$ die Beziehung $Wg = \mu g$ und daraus $Tg = W^k g = \mu^k g$, also $g \in G_1(T)$. Umgekehrt existiert zu $f \in G_1(T)$ ein $\lambda \in H_1(T)$ mit $Tf = \lambda f$. Setzt man $h = Wf$, so ist auch

$$Th = TWf = WTf = \lambda Wf = \lambda h.$$

h und f gehören also zum gleichen Eigenwert und unterscheiden sich nach dem Eigenwertsatz für ergodische Transformationen nur um eine Konstante, also gilt $Wf = \mu f$, woraus $f \in G_1(W)$ folgt.

2. Ist nun $G_n(W) = G_n(T)$ schon gezeigt, so existiert wegen

$$G_{n+1}(W) = \{g \in L_2(m) \mid \|g\| = 1 \quad \text{und} \quad \exists \psi \in G_n(W) \text{ mit } Wg = \psi g\}$$

zu $g \in G_{n+1}(W)$ ein $\psi \in G_n(W)$ mit $Wg = \psi g$ und daraus folgt

$$Tg = W^k g = \psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi \cdot g.$$

Da $\psi \in G_n(W)$ ist, gilt auch $\psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi \in G_n(W) = G_n(T)$, also ist $g \in G_{n+1}(T)$. Umgekehrt existiert zu $f \in G_{n+1}(T)$ wegen

$$G_{n+1}(T) = \{f \in L_2(m) \mid \|f\| = 1 \quad \text{und} \quad \exists \varphi \in G_n(T) \text{ mit } Tf = \varphi f\}$$

ein $\varphi \in G_n(T)$ mit $Tf = \varphi f$. Man bilde $h = Wf$. Dann ist

$$Th = TWf = WTf = W(\varphi f) = W\varphi \cdot Wf = W\varphi \cdot h$$

und daher

$$T\frac{h}{f} = \frac{Th}{Tf} = \frac{W\varphi}{\varphi} \cdot \frac{h}{f}.$$

Wegen $\varphi \in G_n(T) = G_n(W)$ ist der Quotient $W\varphi/\varphi \in G_{n-1}(W) = G_{n-1}(T)$, also $h/f \in G_n(T)$. Setzt man nun wieder $h = Wf$, so gilt also $Wf = \psi f$ mit $\psi \in G_n(T) = G_n(W)$, woraus $f \in G_{n+1}(W)$ folgt. Damit ist (1) bewiesen und (2) folgt sofort wegen $G(W) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(W)$, $G(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(T)$.

Lemma 2.1.5. *Ist W eine k-te Wurzel eines vollergodischen Automorphismus T eines Lebesgueschen Raumes (Ω, B, m), so gelten für die Gruppen $H_n(T)$, $H_n(W)$, $H(T)$, $H(W)$ der Quasieigenwerte die Beziehungen*

$$H_n(T) = \{\psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi \mid \psi \in H_n(W)\}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$H(T) = \{\psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi \mid \psi \in H(W)\}.$$

Beweis. Ist $\psi \in H_n(W)$, so existiert wegen

$$H_n(W) = \{\psi \in G_{n-1}(W) \mid \exists g \in G_n(W) \quad \text{mit} \quad Wg = \psi g\}$$

ein $g \in G_n(W)$ mit $Wg = \psi g$, woraus $Tg = W^k g = \psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi \cdot g$ folgt. Mit $\psi \in H_n(W) \subset G_{n-1}(W) = G_{n-1}(T)$ ist auch das Produkt $\psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi$ in $G_{n-1}(T)$ gelegen und da $g \in G_n(W) = G_n(T)$ galt, so ist $\psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi \in H_n(T)$.

Ist umgekehrt $\varphi \in H_n(T)$, so gilt wegen

$$H_n(T) = \{\varphi \in G_{n-1}(T) \mid \exists f \in G_n(T) \quad \text{mit} \quad Wf = \varphi f\}$$

$Tf = \varphi f$ für ein gewisses $f \in G_n(T)$. Aus $G_n(T) = G_n(W)$ folgt aber auch $f \in G_n(W)$ und es existiert ein $\psi \in G_{n-1}(W)$ mit $Wf = \psi f$, woraus man $Tf = \psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi \cdot f$

erhält. Also ist φ in der Form

$$\varphi = \psi \cdot W\psi \cdots W^{k-1}\psi$$

darstellbar.

Diesem Lemma kann unter Benutzung des in 1.2 definierten Endomorphismus R_T auch die folgende Form gegeben werden:

Corollar 2.1.6. *Ist W eine k-te Wurzel eines vollergodischen Automorphismus T eines Lebesgueschen Raumes (Ω, B, m), so gelten für die Gruppen $H_n(T)$, $H_n(W)$, $H(T)$, $H(W)$ der Quasieigenwerte die Gleichungen*

$$H_n(T) = \left\{ \prod_{\mu=0}^{k-1} (R_W^\mu \psi)^{\binom{k}{\mu+1}} \,\middle|\, \psi \in H_n(W) \right\}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$H(T) = \left\{ \prod_{\mu=0}^{k-1} (R_W^\mu \psi)^{\binom{k}{\mu+1}} \,\middle|\, \psi \in H(W) \right\}.$$

Beweis. Nach Lemma 2.1.5 besitzt jedes $\varphi \in H_n(T)$ (bzw. $H(T)$) eine Darstellung $\varphi = \prod_{\lambda=0}^{k-1} W^\lambda \psi$ mit $\psi \in H_n(W)$ (bzw. $H(W)$) und wegen $W\psi = R_W \psi \cdot \psi$ gilt $W^\lambda \psi = \prod_{\mu=0}^{\lambda} (R_W^\mu \psi)^{\binom{\lambda}{\mu}}$. Rechnet man das doppelte Produkt

$$\varphi = \prod_{\lambda=0}^{k-1} \prod_{\mu=0}^{\lambda} (R_W^\mu \psi)^{\binom{\lambda}{\mu}}$$

in ein einfaches um, so folgt die Behauptung.

2.2. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Wurzeln

Die Existenz von Quasieigenwerten und Quasieigenfunktionen ist nicht an das quasidiskrete Spektrum gebunden. Ebenso benutzen die Hilfssätze in 2.1 nirgends die Voraussetzung, T habe ein quasidiskretes Spektrum. Die folgende notwendige Bedingung basiert ganz auf diesen Hilfssätzen. Daher braucht nicht vorausgesetzt zu werden, daß T ein quasidiskretes Spektrum hat. Die Situation ist hier also ganz analog zu der bei ergodischen Transformationen, wo die notwendige Bedingung auch kein diskretes Spektrum erfordert (vgl. das in der Einleitung zitierte Resultat 1°).

Satz 2.2.1. *Notwendig für die Existenz einer k-ten Wurzel W ($k = 2, 3, \ldots$) eines vollergodischen Automorphismus T eines Lebesgueschen Raumes (Ω, B, m) ist die Existenz eines Endomorphismus R in $H(T)$ mit den Eigenschaften*

$$R_T \varphi = \prod_{\mu=1}^{k} (R^\mu \varphi)^{\binom{k}{\mu}} \qquad (\varphi \in H(T)), \tag{1}$$

$$K_{H(T)}(R_T^n) \subset K_{H(T)}(R^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Beweis. 1. Hat T eine k-te Wurzel W, so gehören zu ihr Gruppen $H(W)$, $G(W)$ und ein Endomorphismus R_W von $H(W)$ in sich. Jedes $\varphi \in H(T)$ besitzt (Corollar 2.1.6) die Darstellung

$$\varphi = \prod_{\mu=0}^{k-1} (R_W^\mu \psi)^{\binom{k}{\mu+1}}$$

woraus sofort

$$R_W \varphi = \prod_{\mu=0}^{k-1} (R_W^\mu (R_W \psi))^{\binom{k}{\mu+1}}$$

folgt. Daraus ist ersichtlich, daß die Einschränkung von R_W auf $H(T)$ ein Endomorphismus in $H(T)$ ist.

2. Ist $\varphi \in H(T)$, so ist wegen $H(T) \subset H(W)$ auch $\varphi \in H(W)$. Durch Vergleich von $W^k \varphi = T\varphi = R_T \varphi \cdot \varphi$ und

$$W^k \varphi = \prod_{\mu=0}^{k} (R_W^\mu \varphi)^{\binom{k}{\mu}} = \prod_{\mu=1}^{k} (R_W^\mu \varphi)^{\binom{k}{\mu}} \cdot \varphi$$

folgt

$$R_T \varphi = \prod_{\mu=1}^{k} (R_W^\mu \varphi)^{\binom{k}{\mu}}. \tag{3}$$

3. Aus Corollar 2.1.6 liest man unmittelbar ab, daß $H_n(T) \subset H_n(W)$ gilt, was wegen 1.2.4 mit

$$K_{H(T)}(R_T^n) = K_{H(T)}(R_W^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

gleichbedeutend ist.

4. Da die Einschränkung von R_W auf $H(T)$ dort ein Endomorphismus ist, so kann man den im Satz geforderten Endomorphismus R definieren durch $R(\varphi) = R_W \varphi$. Die Eigenschaften (1) und (2) sind dann wegen (3) und (4) erfüllt.

Der folgende Satz zeigt, daß die soeben gefundenen notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, wenn nur zusätzlich gefordert wird, daß T ein quasidiskretes Spektrum hat.

Satz 2.2.2. *Hinreichend für die Existenz einer k-ten Wurzel W ($k = 2, 3, \ldots$) eines vollergodischen Automorphismus T mit quasidiskretem Spektrum eines Lebesgueschen Raumes (Ω, B, m) ist die Existenz eines Endomorphismus R in $H(T)$ mit den Eigenschaften*

$$R_T \varphi = \prod_{\mu=1}^{k} (R^\mu \varphi)^{\binom{k}{\mu}} \qquad (\varphi \in H(T)), \tag{1}$$

$$K_{H(T)}(R_T^n) \subset K_{H(T)}(R^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Beweis. 1. Da $H_1(T)$ torsionsfrei ist und für jedes $\varphi \in H(T)$ $(R^n \varphi)^l = R^n(\varphi^l)$ gilt, so ist auch $H(T)$ torsionsfrei und besitzt eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Vervollständigung $\overline{H(T)}$ (vgl. [13]). Die Elemente $\bar{\varphi}$ von $\overline{H(T)}$ können in der Form

$$\bar{\varphi} = (\varphi, m) \qquad (\varphi \in H(T), m = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

dargestellt werden, wobei

$$(\varphi_1, m_1) = (\varphi_2, m_2) \leftrightarrow \varphi_1^{m_2} = \varphi_2^{m_1} \tag{4}$$

und

$$(\varphi_1, m_1) \cdot (\varphi_2, m_2) = (\varphi_1^{m_2} \cdot \varphi_2^{m_1}, m_1 m_2) \tag{5}$$

gilt. $\overline{H(T)}$ ist wie $H(T)$ abelsch und torsionsfrei, aber nicht notwendig abzählbar.

Der Endomorphismus R_T und der nach Voraussetzung in $H(T)$ existierende Endomorphismus R besitzen eindeutige Fortsetzungen $\bar{R}_T$ und $\bar{R}$ auf $\overline{H(T)}$. Es gelten für die Vervollständigungen der Untergruppen $H_n(T) = K_{H(T)}(R_T^n)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(6) & \overline{K_{H(T)}(R_T^n)} &= K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}_T^n) \\ &(7) & \overline{K_{H(T)}(R^n)} &= K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^n). \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

Aus (2) folgt $\overline{K_{H(T)}(R_T^n)} \subset \overline{K_{H(T)}(R^n)}$ und daraus mit (6) und (7) die Beziehung

$$(8) \qquad K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}_T^n) \subset K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^n).$$

Weiter folgt aus (1), daß

$$(9) \qquad K_{H(T)}(R^n) \subset K_{H(T)}(R_T^n),$$

denn ist $\varphi \in K_{H(T)}(R^n)$, also $R^n\varphi = 1$, so ist nach (1)

$$R_T^n \varphi = (R^n \varphi)^{k^n} \ldots,$$

wobei die weiteren Faktoren die Gestalt $(R^\lambda \varphi)^{a_\lambda}$ mit $\lambda > n$ haben, so daß tatsächlich $R_T^n \varphi = 1$ gilt, also $\varphi \in K_{H(T)}(R_T^n)$. Aus (8) und (9) zusammen folgt also

$$(10) \qquad K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}_T^n) = K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^n).$$

Berücksichtigt man daher die Gleichung (6) und (10), so folgt

$$(11) \qquad \overline{H(T)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^n).$$

2. In $\overline{H(T)}$ betrachte man den Endomorphismus

$$(12) \qquad \bar{P}\bar{\varphi} = \prod_{\nu=0}^{k-1} (\bar{R}^\nu \bar{\varphi})^{\binom{k}{\nu+1}}, \qquad (\bar{\varphi} \in \overline{H(T)}).$$

Ist $\bar{P}\bar{\varphi} = 1$, so ist $\bar{\varphi} = 1$. Für jedes $\bar{\varphi} \neq 1$ in $\overline{H(T)}$ ist nämlich nach (11) eine Darstellung $\varphi \in K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^n) - K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^{n-1})$ möglich ($n \geqq 1$). Wegen der Torsionsfreiheit von $\overline{H(T)}$ und $\bar{R}^{n-1}(\bar{\varphi}^k) = (\bar{R}^{n-1}\varphi)^k$ ist auch $\bar{\varphi}^k \in K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^n) - K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^{n-1})$. Aus

$$\prod_{\nu=1}^{k-1} (\bar{R}^\nu \bar{\varphi})^{\binom{k}{\nu+1}} \in K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^{n-1})$$

folgt daher

$$\prod_{\nu=0}^{k-1} (\bar{R}^\nu \bar{\varphi})^{\binom{k}{\nu+1}} = \bar{\varphi}^k \cdot \prod_{\nu=1}^{k-1} (\bar{R}^\nu \bar{\varphi})^{\binom{k}{\nu+1}} \in K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^n) - K_{\overline{H(T)}}(\bar{R}^{n-1}),$$

also $\bar{P}\bar{\varphi} \neq \bar{1}$. Der Kern des Endomorphismus $\bar{P}$ ist also $\{\bar{1}\}$. $\bar{P}$ ist sogar Automorphismus in $\overline{H(T)}$. Man betrachte nämlich das unendliche Gleichungssystem

$$(13) \qquad \begin{aligned} \alpha_0 k &= 1, \\ \sum_{\nu=0}^{\lambda} \alpha_{\lambda-\nu} \binom{k}{\nu+1} &= 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k-2) \\ \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_{\lambda-\nu} \binom{k}{\nu+1} &= 0, \qquad (\lambda = k-1, k, \ldots) \end{aligned}$$

für die Folge der α_μ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$), das eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, die rekursiv gewonnen werden kann. Ist nun $\bar{\varphi}_2 \in \overline{H(T)}$ beliebig gegeben, so setze man

$$\bar{\varphi}_1 = \prod_{\mu=0}^{\infty} (\bar{R}^\mu \bar{\varphi}_2)^{\alpha_\mu}. \tag{14}$$

Da die α_μ als Lösungen von (16) alle rational sind, und wegen (11) das Produkt (14) für jedes einzelne $\bar{\varphi}_2$ nach endlich vielen Schritten abbrechen muß, so ist durch (14) ein $\bar{\varphi}_1 \in \overline{H(T)}$ definiert. Mit (12) und (13) folgt daher

$$\begin{aligned}
\bar{P}\varphi_1 &= \prod_{\nu=0}^{k-1} \left(\bar{R}^\nu \left(\prod_{\mu=0}^{\infty} (\bar{R}^\mu \varphi_2)^{\alpha_\mu}\right)\right)^{\binom{k}{\mu+1}} \\
&= \prod_{\lambda=0}^{k-2} \prod_{\mu=0}^{\infty} (\bar{R}^{\nu+\mu} \bar{\varphi}_2)^{\alpha_\mu \binom{k}{\nu+1}} \\
&= \bar{\varphi}_2^{\alpha_0 k} \cdot \prod_{\lambda=0}^{k-2} \prod_{\nu=0}^{\lambda} (\bar{R}^\lambda \bar{\varphi}_2)^{\alpha_{\lambda-\nu}\binom{k}{\nu+1}} \cdot \prod_{\lambda=k-1}^{\infty} \prod_{\nu=0}^{k-1} (\bar{R}^\lambda \varphi_2)^{\alpha_{\lambda-\nu}\binom{k}{\nu+1}} \\
&= \bar{\varphi}_2^{\alpha_0 k} \cdot \prod_{\lambda=1}^{k-2} (\bar{R}^\lambda \bar{\varphi}_2)^{\sum_{\nu=0}^{\lambda} \alpha_{\lambda-\nu}\binom{k}{\nu+1}} \cdot \prod_{\lambda=k-1}^{\infty} (R^\lambda \bar{\varphi}_2)^{\sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_{\lambda-\nu}\binom{k}{\nu+1}} = \bar{\varphi}_2 .
\end{aligned}$$

Damit ist die Automorphieeigenschaft von $\bar{P}$ gezeigt und es existiert ein zu $\bar{P}$ inverser Automorphismus $\bar{P}^{-1}$ in $\overline{H(T)}$ und nach [9] und [1] (Lemma 3 in § 2) läßt sich $\overline{H(T)}$ durch einen Isomorphismus z auf eine Untergruppe von K isomorph so abbilden, daß dieser Isomorphismus z die identische Abbildung von $H_1(T)$ auf sich fortsetzt. Wir setzen

$$z_T(\varphi) = z(\varphi), \quad (\varphi \in H(T)). \tag{15}$$

z_T ist also die Einschränkung von z auf $H(T)$. Weiter definieren wir

$$z_W(\varphi) = z(\bar{P}^{-1}\varphi), \quad (\varphi \in H(T)). \tag{16}$$

Aus (16) folgt dann

$$z_W\left(\prod_{\nu=0}^{k-1} (R^\nu \varphi)^{\binom{k}{\nu+1}}\right) = z_W(P\varphi) = z_T(\varphi), \quad (\varphi \in H(T)). \tag{17}$$

3. Nach Voraussetzung hat T ein quasidiskretes Spektrum, ist also nach den Resultaten von ABRAMOW (vgl. 1.2) konjugiert zu einem Automorphismus der Charaktergruppe $X(H(T))$ von $H(T)$, der der Einfachheit halber auch mit T bezeichnet werde und die Gestalt

$$Tx = z_T \cdot x \cdot Q_T x \quad (x \in X(H(T))) \tag{18}$$

hat. Dabei ist z_T der durch (15) gegebene Charakter und der Endomorphismus Q_T in $X(H(T))$ durch

$$Q_T x(\varphi) = x(R_T \varphi) \quad (x \in X(H(T)), \varphi \in H(T)) \tag{19}$$

definiert. Legt man nun durch

$$Qx(\varphi) = x(R\varphi) \tag{20}$$

einen zweiten Endomorphismus in $X(H(T))$ fest, der dem Endomorphismus R in $H(T)$ entspricht, so ist mit

(21) $$W x = z_W \cdot x \cdot Q x \qquad (x \in X(H(T)))$$

eine Transformation in $X(H(T))$ gegeben, wenn z_W der durch (16) gegebene Isomorphismus, also ein spezieller Charakter aus $X(H(T))$ ist.

4. Die durch (21) gegebene Transformation W ist eine k-te Wurzel von T, denn es gilt

$$W^k x = \prod_{\nu=0}^{k-1} (Q^\nu z_W)^{\binom{k}{\nu+1}} \cdot x \cdot \prod_{\mu=1}^{k} (Q^\mu x)^{\binom{k}{\mu}},$$

wofür man mit (17) und (20)

$$\left(\prod_{\nu=0}^{k-1} (Q^\nu z_W)^{\binom{k}{\nu+1}}\right)(\varphi) = z_W\left(\prod_{\nu=0}^{k-1} (R^\nu \varphi)^{\binom{k}{\nu+1}}\right) = z_T(\varphi)$$

und wegen (1), (19) und (20) mit

$$\left(\prod_{\mu=1}^{k} (Q^\mu x)^{\binom{k}{\mu}}\right)(\varphi) = x\left(\prod_{\mu=1}^{k} (R^\mu \varphi)^{\binom{k}{\mu}}\right) = x(R_T \varphi) = Q_T x(\varphi)$$

die Gleichung $W^k x = z_T x\, Q_T x = T x$ erhält.

Wir wollen nun zeigen, daß W maßtreu ist. Die Elemente $\varphi \in H(T)$ bilden ein Orthonormalsystem in $L_2(X(H(T)), \mu)$, das nach Voraussetzung (quasidiskretes Spektrum) vollständig ist. Daher gilt für den durch $W f(x) = f(W x)$, $(x \in X(H(T)))$ in $L_2(X(H(T)), \mu)$ definierten Operator W wegen

$$\begin{aligned} W \varphi(x) &= \varphi(W x) = (W x)(\varphi) = z_W(\varphi) \cdot x(\varphi) \cdot (Q x)(\varphi) \\ &= z_W(\varphi) \cdot x(\varphi) \cdot x(R \varphi) = z_W(\varphi) \cdot (R \varphi) x \cdot \varphi(x), \end{aligned}$$

daß er $L_2(X(H(T)), \mu)$ in sich überführt, denn $z_W(\varphi) \cdot (R\varphi) x \cdot \varphi(x)$ ist ein Charakter und somit ein Element des Orthonormalsystems. Aus

(22) $$W \varphi_1(x) = W \varphi_2(x)$$

folgt

$$z_W(\varphi_1)\, x(\varphi_1)\, x(R \varphi_1) = z_W(\varphi_2)\, x(\varphi_2)\, x(R \varphi_2)$$

woraus mit $x = 1$ insbesondere $z_W(\varphi_1) = z_W(\varphi_2)$, also $\varphi_1 R \varphi_1 = \varphi_2 R \varphi_2$ und daher

(23) $$\varphi_1 \varphi_2^{-1} = R^{2n}(\varphi_1 \varphi_2^{-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

folgt. Da R wegen (2) lokal nilpotent ist, so ist für hinreichend großes n die rechte Seite von (23) das Einselement und also

(24) $$\varphi_1 = \varphi_2 .$$

Da aus (22) die Beziehung (24) folgt, so ergibt sich aus

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad \varphi_1 = \varphi_2, \\ 0, & \text{wenn} \quad \varphi_1 \neq \varphi_2 \end{cases}$$

auch

$$(W \varphi_1, W \varphi_2) = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad \varphi_1 = \varphi_2, \\ 0, & \text{wenn} \quad \varphi_1 \neq \varphi_2 . \end{cases}$$

W ist also eine isometrische Transformation. W ist aber auch unitär, denn es werden alle Elemente des Orthonormalsystems durchlaufen, wenn man W anwendet. Ist nämlich $\varphi_2 \in H(T)$ beliebig, so definiere man

$$\varphi_1 = \varphi_2 \cdot (R\,\varphi_2)^{-1} \cdot (R^2\,\varphi_2) \ldots$$

Dann gilt

$$W\varphi_1 = z_W(\varphi_1) \cdot \varphi_2 \quad \text{mit} \quad |z_W(\varphi_1)| = 1\,.$$

Als unitärer Operator erhält W die Normen der charakteristischen Funktionen beliebiger meßbarer Mengen aus $X(H(T))$, also ist W maßtreu.

Beispiel 2.2.3. Die Bedingung (2) in Satz 2.2.2 folgt im allgemeinen nicht aus (1), kann also nicht gestrichen werden. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel. Ist

$$H = \{a^l\, b^m\, c^n \,|\, l, m, n \text{ ganzzahlig}\}$$

die von den drei Elementen a, b, c erzeugte torsionsfreie Abelsche Gruppe und durch

$$P_1(a^l\, b^m\, c^n) = b^{2n}$$

ein nilpotenter Endomorphismus P_1 (mit dem Index 2) in H definiert, so gilt für den durch

$$P(a^l\, b^m\, c^n) = a^{-2l}\, b^n$$

definierten Endomorphismus P die Gleichung

$$(1) \qquad P_1(a^l\, b^m\, c^n) = a^{-4l}\, b^{2n} \cdot a^{4l} = \prod_{\mu=1}^{2} (P^\mu(a^l\, b^m\, c^n))^{\binom{2}{\mu}}\,,$$

aber wegen

$$K_H(P_1) = \{a^l\, b^m \,|\, l, m \text{ ganzzahlig}\}\,,$$
$$K_H(P) = \{b^m \,|\, l, m \text{ ganzzahlig}\}$$

nicht die Beziehung

$$(2) \qquad K_H(P_1) \subseteqq K_H(P)\,.$$

Nach [1] (Lemma 3 in § 2) kann H durch einen Isomorphismus λ in eine Untergruppe $\tilde{H} = \lambda(H)$ der Kreisgruppe K übergeführt werden, wobei die Endomorphismen P_1, P in die durch $S_1(\lambda(h)) = \lambda(P_1(h))$, $S(\lambda(h)) = \lambda(P(h))$, $(h \in H)$ definierten Endomorphismen S_1, S in $\tilde{H}$ übergehen und es gilt

$$(3) \qquad S_1(\lambda(h)) = \prod_{\mu=1}^{2} (S^\mu(\lambda(h)))^{\binom{2}{\mu}}$$

und die Inklusion

$$(4) \qquad K_{\tilde{H}}(S_1) \subseteqq K_{\tilde{H}}(S)$$

ist falsch, wie man aus (1) und (2) folgert. Da durch den Isomorphismus λ insbesondere aus $K_H(P_1)$ eine Untergruppe von K, nämlich $K_{\tilde{H}}(S_1)$ geworden ist, hat man in $\langle \tilde{H}, S_1 \rangle$ ein für den Abramowschen Existenzsatz zulässiges Paar (vgl. 1.2). Es existiert also ein vollergodischer Automorphismus T in einem gewissen Lebesgueschen Maßraum (Ω, B, m) mit einem gewissen quasidiskreten

Spektrum $H(T)$ und der Eigenschaft $\langle \tilde{H}, S_1\rangle \approx \langle H(T), R_T\rangle$, wobei R_T den in 1.2 definierten Endomorphismus in $H(T)$ bezeichnet. Nach 1.1 existiert daher eine isomorphe Abbildung V von $\tilde{H}$ auf $H(T)$, die die Elemente von $K_{\tilde{H}}(S_1)$ festläßt und für welche $R_T = V\lambda P_1 \lambda^{-1} V^{-1}$ gilt. Wie R_T ist auch der durch

$$R = V\lambda P \lambda^{-1} V^{-1} \tag{5}$$

definierte Endomorphismus R in $H(T)$ definiert und erfüllt wegen (3) die Beziehung

$$R_T\varphi = \prod_{\mu=1}^{2} (R^\mu \varphi)^{\binom{2}{\mu}},$$

die für die Existenz einer 2-ten Wurzel von T nach Satz 2.2.1 notwendig ist, nicht aber die Inklusion $K_{H(T)}(R_T) \subsetneqq K_{H(T)}(R)$, denn diese ist das isomorphe Abbild von (4) in $H(T)$, jedoch war (4) falsch. Also ist der durch (5) definierte Endomorphismus ungeeignet für den Beweis der Existenz einer 2-ten Wurzel, da er zwar 2.2.1,(1), nicht aber 2.2.1,(2) erfüllt.

2.3. Eindeutigkeitssatz für Wurzeln

Zwar sind die Bedingungen (1) und (2) von Satz 2.2.2 hinreichend für die Existenz einer k-ten Wurzel eines vollergodischen Automorphismus T mit quasidiskretem Spektrum, doch sind damit für die Auffindung eines Endomorphismus R, der in diese Bedingungen eingeht, im allgemeinen keine Mittel an die Hand gegeben. Dieser Umstand wird dadurch gemildert, daß sich im folgenden Satz neben der Eindeutigkeit der Wurzeln (bis auf Konjugiertheit) auch die Eindeutigkeit von R zeigen wird. Wenn also überhaupt eine k-te Wurzel existiert, so ist der fragliche Endomorphismus R eindeutig bestimmt.

Satz 2.3.1. *Hat ein vollergodischer Automorphismus T eines Lebesgueschen Raumes (Ω, B, m) mit quasidiskretem Spektrum zwei k-te Wurzeln W_1 und W_2, so sind W_1 und W_2 konjugiert ($W_1 \sim W_2$).*

Beweis. 1. Die Existenz einer k-ten Wurzel hat nach Satz 2.2.1 die Existenz eines Endomorphismus R in $H(T)$ mit den Eigenschaften

$$R_T\varphi = \prod_{\mu=1}^{k} (R^\mu \varphi)^{\binom{k}{\mu}}, \qquad (\varphi \in H(T)) \tag{1}$$

$$K_{H(T)}(R_T^n) = K_{H(T)}(R^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

zur Folge. Ist nun $\varphi \in H_{n+1}(T) - H_n(T)$, so gelten die Beziehungen

$$R_T^m\varphi = \prod_{\mu=m}^{\min(km,n)} (R^\mu \varphi)^{\alpha_{m,\mu}}, \qquad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

mit gewissen ganzzahligen $\alpha_{m,\mu}$, die man aus (1) sukzessive herleitet. Aus diesen Gleichungen folgt, daß $R\varphi$ eine eindeutige Funktion von $R_T\varphi, \ldots, R_T^n\varphi$ ist. Denn insbesondere gilt für $m = n$

$$R_T^n\varphi = (R^n\varphi)^{\alpha_{n,n}},$$

woraus wegen der Torsionsfreiheit von $H(T)$ die eindeutige Lösung

$$R^n\varphi = (R_T^n\varphi)^{1/\alpha_{n,n}}$$

folgt. Für $m = n - 1$ ist ebenso

$$R^{n-1}\varphi = [R_T^{n-1}\varphi((R_T^n\varphi)^{1/\alpha_{n,n}})^{-\alpha_{n-1,n}}]^{1/\alpha_{n-1,n-1}},$$

also $R^{n-1}\varphi$ eine Funktion von $R_T^{n-1}\varphi$, $R_T^n\varphi$. Durchläuft man so absteigend $m = n, n-1, \ldots, 1$, so ergibt sich $R^m\varphi$ als eindeutig bestimmte Funktion von $R_T^m\varphi, R_T^{m+1}\varphi, \ldots, R_T^n\varphi$, also für $m = 1$ die Behauptung. Damit ist die Eindeutigkeit von R klar.

2. Es seien nun W_1 und W_2 zwei k-te Wurzeln von T und $\langle H(W_1), R_{W_1}\rangle$, $\langle H(W_2), R_{W_2}\rangle$ die ihnen nach 1.2 zugeordneten Paare. Es ist zu zeigen, daß diese Paare äquivalent sind. $H(T)$ ist Untergruppe sowohl von $H(W_1)$ als auch von $H(W_2)$. Da nach Satz 2.2.1 R_{W_1} und R_{W_1}, eingeschränkt auf $H(T)$ der Gleichung

$$R_T\varphi = \prod_{\mu=1}^{k}(R_{W_1}^{\mu}\varphi)^{\binom{k}{\mu}} = \prod_{\mu=1}^{k}(R_{W_2}^{\mu}\varphi)^{\binom{k}{\mu}}$$

genügen, so gilt nach dem ersten Teil dieses Beweises

$$R_{W_1}\varphi = R_{W_2}\varphi \qquad (\varphi \in H(T)). \tag{4}$$

Weiter betrachten wir die durch

$$P_1\psi_1 = \prod_{\nu=0}^{k-1}(R_{W_1}^{\nu}\psi_1)^{\binom{k}{\nu+1}} \qquad (\psi_1 \in H(W_1))$$

$$P_2\psi_2 = \prod_{\nu=0}^{k-1}(R_{W_2}^{\nu}\psi_2)^{\binom{k}{\nu+1}} \qquad (\psi_2 \in H(W_2))$$

definierten Endomorphismen P_1 von $H(W_1)$ auf $H(T)$ und P_2 von $H(W_2)$ auf $H(T)$. Wir zeigen (am Beispiel von P_1), daß P_1 und P_2 sogar Automorphismen von $H(W_1)$ auf $H(T)$ und von $H(W_2)$ auf $H(T)$ sind.

Der Kern von P_1 ist $\{1\}$, denn für jedes $\psi_1 \neq 1$ in $H(W_1)$ ist eine Darstellung $\psi_1 \in K_{H(W_1)}(R_{W_1}^n) - K_{H(W_1)}(R_{W_1}^{n-1})$, $(n \geqq 1)$ möglich. Wegen der Torsionsfreiheit von $H(W_1)$ und $R_{W_1}^{n-1}(\psi_1^k) = (R_{W_1}^{n-1}\psi_1)^k$ ist auch $\psi_1^k \in K_{H(W_1)}(R_{W_1}^n) - K_{H(W_1)}(R_{W_1})$.

Aus

$$\prod_{\nu=1}^{k-1}(R_{W_1}^{\nu}\psi_1)^{\binom{k}{\lambda+1}} \in K_{H(W_1)}(R_{W_1}^{n-1})$$

folgt daher

$$\prod_{\nu=0}^{k-1}(R_{W_1}^{\nu}\psi_1)^{\binom{k}{\lambda+1}} = \psi_1^k \cdot \prod_{\nu=1}^{k-1}(R_{W_1}^{\nu}\psi_1)^{\binom{k}{\lambda+1}} \in K_{H(W_1)}(R_{W_1}^n) - K_{H(W_1)}(R_{W_1}^{n-1}),$$

also $P_1\psi_1 \neq 1$, womit die Kerneigenschaft gezeigt ist. Damit ist aber bewiesen, daß P_1 Automorphismus ist, weil P_1 $H(W_1)$ auf ganz $H(T)$ abbildet (Corollar 2.1.6). Analog zeigt man von P_2 die Automorphieeigenschaft.

Zum Beweis der Äquivalenz von $\langle H(W_1), R_{W_1}\rangle$ und $\langle H(W_2), R_{W_2}\rangle$ ist zu zeigen (vgl. 1.1):

a) es gilt $H_1(W_1) = H_1(W_2)$,

b) es existiert ein Isomorphismus V von $H(W_1)$ auf $H(W_2)$, der die Elemente von $H_1(W_1) = H_1(W_2)$ festläßt und für den $VH_1(W_1) = H_n(W_2)$, $(n = 1, 2, \ldots)$; $R_{W_1} = V^{-1}R_{W_2}V$ gelten.

Wegen $H_1(T) = \{\lambda_1^k \mid \lambda_1 \in H_1(W_1)\} = \{\lambda_2^k \mid \lambda_2 \in H_1(W_2)\}$ und der Torsionsfreiheit von $H_1(W_1)$ und $H_1(W_2)$ ist offenbar auch die von $H_1(W_1)$ und $H_1(W_2)$ erzeugte Gruppe $\{H_1(W_1), H_1(W_2)\}$ torsionsfrei. Wäre nun $\lambda_1 \in H_1(W_1) - H_1(W_2)$, so wäre $\lambda_1^k \in H_1(T)$ und es existierte ein $\lambda_2 \in H_1(W_2)$ mit $\lambda_1^k = \lambda_2^k$. In der von $H_1(W_1)$ und $H_1(W_2)$ erzeugten Gruppe $\{H_1(W_1), H_1(W_2)\}$ gilt daher $(\lambda_1 \lambda_2^{-1})^k = 1$, also $\lambda_1 = \lambda_2 \in H_1(W_2)$ entgegen der Annahme. Analog zeigt man, daß $\lambda_2 \in H_1(W_2) - H_1(W_1)$ unmöglich ist. Also gilt $H_1(W_1) = H_1(W_2)$, womit a) erfüllt ist. Zum Beweis von b) definieren wir den Isomorphismus

$$V\psi_1 = P_2^{-1} P_1 \psi_1 \qquad (\psi_1 \in H(W_1))$$

von $H(W_1)$ auf $H(W_2)$ und haben zunächst $V\psi_1 = \psi_1$, $(\psi_1 \in H_1(W_1))$ was wegen $P_2 \psi_1 = P_1 \psi_2$ unmittelbar klar ist. Für beliebige n folgt wegen $VH_n(W_1) = H_n(W_2)$ daraus, daß P_1 die Gruppe $H_n(W_1)$ auf $H_n(T)$ und P_2^{-1} die Gruppe $H_n(T)$ auf $H_n(W_2)$ abbildet. Zum Beweis von $R_{W_1} = V^{-1} R_{W_2} V$ benutzen wir die Identität von R_{W_1} und R_{W_2} in $H(T)$. Ist $\psi_1 \in H(W_1)$, so ist $P_1 \psi_1 \in H(T)$ und daher nach (4)

$$R_{W_1} P_1 \psi_1 = R_{W_2} P_1 \psi_1 . \tag{5}$$

Da R_{W_1} mit P_1 vertauschbar ist, so gilt

$$R_{W_1} \psi_1 = P_1^{-1} R_{W_1} P_1 \psi_1 , \tag{6}$$

und da R_{W_2} mit P_2 vertauschbar ist, auch

$$R_{W_2} P_1 \psi_1 = P_2 R_{W_2} P_2^{-1} P_1 \psi_1 . \tag{7}$$

Aus (6), (5) und (7) folgt daher

$$R_{W_1} \psi_1 = P_1^{-1} R_{W_1} P_1 \psi_1 = P_1^{-1} R_{W_2} P_1 \psi_1 = P_1^{-1} P_2 R_{W_2} P_2^{-1} P_1 \psi_1 = V^{-1} R_{W_2} \psi_1 .$$

Damit ist die Äquivalenz von $\langle H(W_1), R_{W_1} \rangle$ und $\langle H(W_2), R_{W_2} \rangle$ gezeigt und der Satz bewiesen.

Beispiel 2.3.2. Aus Teil 1 des Beweises von Satz 2.3.1 ersieht man, daß es im allgemeinen beträchtliche Schwierigkeiten machen wird, den Endomorphismus R explizit als Funktion von R_T darzustellen. Ist R_T anstatt lokal nilpotent sogar nilpotent, so ist eine explizite Darstellung von R als Funktion von R_T zwar möglich, doch im allgemeinen nicht in der Form

$$R\varphi = (R_T \varphi)^{\alpha_1} (R_T^2 \varphi)^{\alpha_2} \cdots (R_T^n \varphi)^{\alpha_n} .$$

Das soll das folgende Beispiel zeigen. Ist R_T nilpotent mit dem Index 3 und besitzt T eine 2-te Wurzel, so gilt für den nach Satz 2.2.1 existierenden Endomorphismus R wegen

$$\begin{aligned} R_T \varphi &= (R\varphi)^2 R^2 \varphi \\ R_T^2 \varphi &= (R^2 \varphi)^4 \qquad (\varphi \in H(T)) \end{aligned} \tag{1}$$

die Darstellung

$$R\varphi = (R_T \varphi (R_T^2 \varphi)^{-1/4})^{1/2} , \tag{2}$$

die im allgemeinen nicht in der Form

$$R\varphi = (R_T \varphi)^{1/2} (R_T^2 \varphi)^{-1/8} \tag{3}$$

geschrieben werden darf, denn aus der Existenz einer 2-ten Wurzel von

$R_T\varphi(R_T^2\varphi)^{-1/4}$, $(\varphi \in H(T))$ folgt nicht ohne weiteres die Existenz 2-ter Wurzeln der Faktoren $R_T\varphi$ und $(R_T^2\varphi)^{-1/4}$:

Es sei $H = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \text{ ganzzahlig}\}$ die von den drei Elementen a, b, c erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe und in H durch $P_1(a^l b^m c^n) = a^{2m+n} b^{2n}$ ein nilpotenter Endomorphismus vom Index 3 definiert. Wegen $P_1^2(a^l b^m c^n) = a^{4n}$ gilt dann für den durch

$$(4) \qquad P h = (P_1 h (P_1^2 h)^{-1/4})^{1/2} \qquad (h \in H)$$

in H definierten Endomorphismus $P(a^e b^m c^n) = a^m b^n$, für den, wie man leicht nachrechnet

$$(5) \qquad P_1 h = (P h)^2 P^2 h, \qquad (h \in H)$$

$$(6) \qquad K_H(P_1) = K_H(P),$$

$$(7) \qquad K_H(P_1^2) = K_H(P^2)$$

gilt, jedoch gibt es offenbar Elemente $h \in H$, für die man

$$(8) \qquad (P_1 h)^{1/2} \notin H$$

hat, so daß also statt der Darstellung (4) für P nicht

$$P h = (P_1 h)^{1/2} (P_1^2 h)^{-1/8}$$

geschrieben werden darf. Unterwirft man nun die Gruppe H und die Endomorphismen P_1 und P demselben Isomorphismus V wie die entsprechende Gruppe in Beispiel 2.2.3, so erhält man einen vollergodischen Automorphismus T in einem gewissenLebesgueschen Raum (Ω, B, m) mit einem quasidiskreten Spektrum $H(T) = V\lambda H$ und den in $H(T)$ definierten Endomorphismen

$$(9) \qquad R_T = V \lambda P_1 \lambda^{-1} V^{-1},$$

$$(10) \qquad R = V \lambda P \lambda^{-1} V^{-1}.$$

Wegen (4), (6) und (7), die nach Ausführung des Isomorphismus $V\lambda$ gerade in die Bedingungen 2.2.2,(1) und 2.2.2,(2) übergehen, besitzt T eine Quadratwurzel und der Endomorphismus R hat wegen (9), (10) und (4) sogar eine Darstellung (2), wegen (8) aber keine Darstellung (3), w.z.b.w.

2.4. Ein von der Abramowschen Theorie unabhängiges Beispiel

Es erscheint wünschenswert, die Existenz von Wurzeln an einem von der Abramowschen Theorie unabhängigen Beispiel einer vollergodischen Transformation mit quasidiskretem Spektrum zu untersuchen.

Es sei (Ω, B, m) die Randlinie des Einheitskreises, ausgestattet mit dem normierten Lebesgueschen Maß, $L_2(m)$ der zugehörige Hilbertraum. Weiter sei $(\Omega^*, B^*, m^*) = (\Omega, B, m) \times (\Omega, B, m)$ der aus zwei Kopien von (Ω, B, m) gebildete Produktmaßraum, also insbesondere $\Omega^* = \{(x, y) \mid x, y \in \Omega\}$ und $L_2(m \times m)$ der zugehörige Hilbertraum, in dem die Funktionen $x^m y^n$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

In Ω^* betrachten wir die Transformation

$$T(x, y) = (c^2 x, c x^2 y),$$

worin c komplex, keine n-te Einheitswurzel und $|c| = 1$ sei. T ist invertierbar ($T^{-1}(x, y) = (c^{-2}x, c_{)}x^{-2}y)$) und maßtreu, also ein Automorphismus.

Durch Fourierentwicklung der Funktionen in $L_2(m \times m)$ beweist man leicht den folgenden

Satz 2.4.1. *Sind m, n gegebene ganze Zahlen und ist b komplex mit $|b| = 1$, so erfüllt $f(x, y) \in L_2(m \times m)$ die Gleichung*

$$Tf(x, y) = f(c^2 x, c x^2 y) = b x^m y^n f(x, y)$$

genau dann, wenn $f(x, y) = a x^\mu y^l$ $(\mu, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $m = 2l$, $n = 0$, $b = c^{2\mu + l}$ und $|a| = 1$ gelten.

Dieser Satz liefert mit den Definitionen aus Abschnitt 1.2

$$H(T) = H_2(T) = \{c^{2\mu+l} x^{2l} \,|\, \mu, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

und für den Endomorphismus R_T in $H(T)$

$$R_T(c^{2\mu+l} x^{2l}) = c^{4l}, \qquad R_T^k(c^{2\mu+l} x^{2l}) = 1, \qquad (k \geqq 2).$$

Für die Existenz einer k-ten Wurzel W von T ist nach Satz 2.2.2 die Existenz eines Endomorphismus R in $H(T)$ erforderlich, der die Bedingungen

$$c^{4l} = [R(c^{2\mu+l} x^{2l})]^k, \tag{1}$$

$$K_{H(T)}(R_T) = \{c^{2\mu} \,|\, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \subset K_{H(T)}(R)$$

erfüllt. Eine Lösung ergibt sich nur im Falle $k = 2$ mit dem Endomorphismus

$$R(c^{2\mu+l} x^{2l}) = c^{2l}, \qquad K_{H(T)}(R) = \{c^{2\mu} \,|\, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

also existiert eine Quadratwurzel von T. Sie läßt sich leicht explizit angeben: $W(x, y) = (cx, xy)$. Es ist das von Halmos in [7], S. 58 in anderem Zusammenhang angegebene Beispiel. Für alle natürlichen $k > 2$ existiert keine k-te Wurzel von T, auch für den Fall $k = 4$ nicht, wie es nach (1) scheinen mag, weil z.B. $c \notin H(T)$ ist.

Literatur

1. Abramow, L. M.: Metrische Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum. Isw. Akad. Nauk UdSSR, Ser. mat. **26**, 513—530 (1962), (russisch).
2. Aumann, G.: Reelle Funktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954.
3. Blum, J. R., and N. Friedman: On commuting transformations and roots. Proc. Amer. math. Soc. **17**, 1370—1374 (1966).
4. Halmos, P. R.: Square roots of measure preserving transformations. Amer. J. Math. **64**, 153—166 (1942).
5. — Measurable transformations. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 1015—1034 (1949).
6. — Measure Theory. 3rd Ed. New York-Toronto-London: van Nostrand 1954.
7. — Lectures on ergodic theory. Tokyo: Mathematical Society of Japan 1956.
8. — Finite-dimensional vector spaces. 2nd Ed. Princeton-New York-Toronto-London: van Nostrand 1958.
9. —, and H. Samelson: On monothetic groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA **28**, 254—258 (1942).

10. JACOBS, K.: Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
11. — Lecture notes on ergodic theory. Aarhus: Aarhus Universitet 1962/63.
12. KRENGEL, U., u. H. MICHEL: Über Wurzeln ergodischer Transformationen. Math. Z. **96**, 50—57 (1967).
13. KUROSCH, A. G.: Gruppentheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1953.
14. MICHEL, H.: Über Strömungen in Gruppen, speziell in symmetrischen Gruppen. Math. Z. **105**, 141—149 (1968).
15. PONTRJAGIN, L. S.: Topologische Gruppen. Leipzig: Teubner 1957.
16. ROCHLIN, W. A.: Über grundlegende Begriffe der Maßtheorie. Mat. Sbornik, n. Ser. **25**, 107—150 (1949).

Dr. HORST MICHEL
II. Mathematisches Institut
Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg
X 402 Halle/S., Reichardtstr. 9