Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
59, 161–168 (1982)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Deux schémas de Bernoulli d'alphabet dénombrable et d'entropie infinie sont finitairement isomorphes

B. Petit

Dépt. de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques,
Université de Bretagne Occidentale, F-29283 Brest Cedex, France

Dans un travail récent, M. Keane et M. Smorodinsky [2] ont établi l'isomorphisme finitaire de deux schémas de Bernoulli de même entropie. En utilisant des méthodes analogues, on peut généraliser ce résultat au cas où l'espace d'état est dénombrable.

1. Définitions et notations

Etant donné $X=\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie et de la tribu habituelles, ainsi que de la mesure produit μ définie par le vecteur de probabilité >0, $p=(p_0,\ldots,p_n,\ldots)$, nous considérons la transformation bijective bi-mesurable T: $X\to X$ définie par $(Tx)_n=x_{n+1}$ qui laisse μ invariante.

Le système $B(p)=(X,\mu,T)$ est alors appelé schéma de Bernoulli généralisé. L'entropie [1] d'un tel système est donnée par:

$$h(p)=-\sum_{n=0}^{\infty} p_n \log p_n \leqq +\infty.$$

(N.B. Traditionnellement le logarithme est pris en base 2.)

Let but de ce qui suit est de démontrer le:

Théorème 1. *Si $h(p)=h(q)=+\infty$, $B(p)$ et $B(q)$ sont finitairement isomorphes.*

Rappelons [4] que φ est un isomorphisme finitaire de $B(p)$ dans $B(q)$ $=(X,\nu,T)$ s'il existe $X'\subset X$, $X''\subset X$ tels que:

(1) $\mu(X')=\nu(X'')=1$.

(2) φ: $X'\to X''$ est bijective.

(3) $\varphi T=T\varphi$.

(4) $\varphi\mu=\nu$.

(5) Pour tout $x\in X'$, il existe $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ tel que: $x'\in X'$ et $x[n,m]=x'[n,m]$ impliquent $(\varphi(x))_0=(\varphi(x'))_0$. Et φ^{-1} vérifie une propriété analogue.

Donnons maintenant quelques notations:

Nous poserons, pour $n\geqq 2$,

$$\bar{p}_i^n=\frac{p_i}{1-p_0} \quad \text{si } 1\leqq i\leqq n-1$$

0044-3719/82/0059/0161/$01.60

et

$$\bar{p}_n^n = \frac{1}{1-p_0} \sum_{n}^{+\infty} p_i$$

de sorte que $P_n = (\bar{p}_1^n, \ldots, \bar{p}_n^n)$ est un vecteur de probabilité sur $A_n = \{1, \ldots, n\}$.

Nous noterons μ_n la mesure associée à P_n.

Nous noterons π_n la projection canonique de $\mathbb{N}^*$ sur A_n définie par:

$$\pi_n(a) = a \quad \text{si } a \leqq n-1$$
$$\pi_n(a) = n \quad \text{si } a \geqq n.$$

Si μ_0 est la mesure définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu_0(n) = \frac{p_n}{1-p_0}$ pour $n \geqq 1$, il est bien évident que $\mu_n = \pi_n \mu_0$.

Nous noterons $g_n(p)$ l'entropie de P_n:

$$g_n(p) = -\sum_{n=1}^{n} \bar{p}_i^n \log \bar{p}_i^n.$$

Enfin, nous définirons:

$$\Theta = \operatorname*{Sup}_{n \geqq 2} \left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} (\bar{p}_i^n, \bar{q}_i^n) \right) \quad \text{et} \quad \eta_n(p) = \inf_{1 \leqq i \leqq n} \bar{p}_i^n.$$

Remarque.

$$\lim_{n \to \infty} g_n(p) = \frac{1}{1-p_0} h(p) + \frac{p_0}{1-p_0} \log p_0 + \log(1-p_0) \leqq +\infty.$$

2. Réduction du problème

Lemme 2. *Si $h(p) = h(q) = +\infty$, si le théorème est vrai dans le cas où $p_0 = q_0$, il est vrai dans tous les cas d'entropie infinie.*

Démonstration. Notons d'abord que toute permutation ϕ de $\mathbb{N}$ induit canoniquement un isomorphisme finitaire. Ceci dit, supposons $p_0 > q_0$, soit $p_0 = q_0 + \delta$. Considérons $r = (q_0, \delta, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$; il est bien évident que $h(r) = +\infty$; par suite, grâce aux hypothèses $B(r)$ et $B(q)$ d'une part, $B(r)$ et $B(p)$ (cf. remarque ci-dessus) sont finitairement isomorphes. D'où le lemme.

3. Squelettes-Sociétés

Par désir d'être complet, nous rappellerons les définitions et propriétés exposées dans [2] et [3].

Etant donné une suite $\{N_r\}_{r \geqq 1}$ d'entiers positifs, strictement croissante, on appelle *squelette de rang r* toute configuration

$$s = 0^{n_0} \underline{l_1} 0^{n_1} \underline{l_2} \ldots \underline{\qquad} 0^{n_{m-1}} \underline{l_m} 0^{n_m}$$

(suite finie de zéros et de «trous») telle que:

(i) $\forall t \in \langle 1, m \rangle \; l_t \geqq 1$.
(ii) $\forall t \in \langle 0, m \rangle \; n_t \geqq 1$.
(iii) $\forall t \in \langle 1, m-1 \rangle \; n_t < N_t \leqq \min(n_0, n_m)$.

Etant donné un squelette de rang r, s, on appelle *longueur de* s l'entier $l = \sum_{i=1}^{m} l_i \cdot$ s' est dit *sous-squelette* de s, si s' est un squelette de rang $r' < r$ ayant pour configuration:

$$s' = 0^{n_t} \underline{\;\; l_{t+1} \;\;} 0^{n_{t+1}} \underline{\;\;\;\;} \ldots \underline{\;\;\;\;\;\;} 0^{n_{t'}}.$$

Deux sous-quelettes s' et s'' de s sont disjoints si leurs ensembles d'indexation $\{t+1, \ldots, t'\}$ dont disjoints.

Si $s_1, \ldots, s_j$ sont des sous-squelettes de s, on dit qu'ils forment une *décomposition* de s s'ils sont disjoints deux-à-deux et si $\bigcup_{t=1}^{j} \langle t_i + 1, t_i' \rangle = \langle 1, m \rangle$.

On écrit alors $s = \prod_{i=1}^{j} s_i$.

Rappelons alors [2, 3]:

Lemme 3. *Tout squelette de rang $r > 1$, se décompose de façon unique en sous-squelettes de rang $r-1$, $s = \prod_{i=1}^{j} s_i$ (appelée décomposition canonique de s).*

Et, également:

Lemme 4. (1) *Pour presque tout $x \in X$, ou bien $x_0 = 0$ ou bien il existe, pour tout $r \geqq 1$, un unique squelette $s_r(x)$ de rang r qui «recouvre» la coordonnée* 0 de x.

(2) *Pour toute suite $\{L_r\}_{r \geqq 1}$ d'entiers, il existe une suite $\{N_r\}_{r \geqq 1}$ telle que pour tout $x \in X$, $x_0 \neq 0$, $l(s_r(x)) \geqq L_r$ dès que r est assez grand.*

On déduit de ce dernier résultat que:

Si Σ désigne la famille des suites $\{s_r\}_{r \geqq 1}$ de squelettes tels que:

(i) rang $(s_r) = r$ pour tout $r \geqq 1$.
(ii) s_r est un sous-squelette de s_{r+1}.
(iii) $l(s_r) = l_r \geqq L_r$ dès que r est assez grand.

Et si $X'(\{s_r\}) = \{x \in X \mid x_0 \neq 0$ et $s_r(x) = s_r \; \forall r \geqq 1\}$, presque tout $x \in X$, tel que $x_0 \neq 0$, appartient à un certain $X'(\{s_r\})$.

Etant donnés deux ensembles finis A et B munis de mesures ρ et σ, on appelle *société* de A vers B, toute application S de A dans $\mathfrak{P}(B)$ telle que:

$$\forall E \subset A \qquad \rho(E) \leqq \sigma(S(E)).$$

Si S est une société de A vers B, on définit la société S^* de B vers A par:

$$\forall y \in B \; S^*(y) = \{x \mid y \in S(x)\}.$$

Si R et S sont des sociétés de A vers B, on dit que R est *plus fine* que S si, pour tout $x \in A$, $R(x) \subset S(x)$. (On écrit alors $R < S$.)

Enfin si S est une société de A vers B et T une société de B vers C (muni de la mesure τ), l'application de A dans $\mathfrak{P}(C)$ définie par:

$$T \circ S(x) = T(S(x))$$

est également une société (c'est immédiat).

Nous rappelons que:

Lemme 5. *Pour toute société S de A vers B, il existe une société R telle que:*

(1) $R < S$.
(2) $\operatorname{Card}\{y \in B \mid \operatorname{Card} R^*(y) \geqq 2\} < \operatorname{Card} A$.

Enfin, nous donnons sans démonstration:

Lemme 6. *Si R et S sont des sociétés de A vers B et si T est une société de B vers C:*

(1) $R < S \Rightarrow T \circ R < T \circ S$.
(2) $R < S \Rightarrow R^* < S^*$.
(3) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.
(4) $S^{**} = S$.

Démonstration du théorème. En vertu du lemme 2, on peut toujours supposer $p_0 = q_0$.

Choisissons une suite $\{n_i\}_{i \geqq 1}$ telle que:

$$\begin{aligned} &\text{Pour } i \text{ pair} \geqq 2 \quad g_{n_i}(q) > -2 \log \eta_{n_{i-1}}(p) \\ \text{et} \quad & \\ &\text{pour } i \text{ impair} \geqq 3 \quad g_{n_i}(p) > -2 \log \eta_{n_{i-1}}(q). \end{aligned} \tag{1}$$

Nous poserons X_{n_i} (pour i impair) $= \{0, \ldots, n_i\}^{\mathbb{Z}}$ muni de la mesure définie par le vecteur de probabilité $\left(p_0, p_1, \ldots, p_{n_i - 1}, \sum_{n_i = n}^{+\infty} p_n\right)$. Nous donnons une définition analogue pour Y_{n_i} (i pair).

Nous noterons $B_i(p)$ (resp. $B_i(q)$) le schéma de Bernoulli ainsi obtenu. Nous appellerons encore π_i la projection canonique de $B(p)$ sur $B_i(p)$ (resp. $B(q)$ sur $B_i(q)$) qui est évidemment un homomorphisme finitaire.

Enfin, les mesures ci-dessus introduites sur X_{n_i} (resp. Y_{n_i}) seront notées $\tilde{\mu}_{n_i}$ (resp. $\tilde{\nu}_{n_i}$).

4. Remplisseurs - Sociétés

Si i est impair, posons $\mathfrak{F}_{n_i}(s) = A^l_{n_i}$ où s est un squelette de rang quelconque et de longueur l. De même $\mathfrak{G}_{n_i}(s) = A^l_{n_i}$ lorsque i est pair

Lemme 8. *Pour tout $\delta > 0$, pour tout entier $r \geqq 1$, il existe un entier $l_0 = l_0(\delta, r)$ tel que, pour tout i impair $< r$ et tout $F \in \mathfrak{F}_{n_i}(s)$ sauf peut-être sur un ensemble de mesure $< \delta$, on ait:*

$$\mu_{n_i}(F) \leqq 2^{-g_{n_i}(p)\frac{l}{2}}$$

et pour tout i pair $\leqq r$, *tout* $G \in \mathfrak{G}_{n_i}(s)$ *sauf peut-être sur un ensemble de mesure* $<\delta$, *on ait:*

$$\nu_{n_i}(G) \leqq 2^{-g_{n_i}(q)\frac{l}{2}}.$$

Démonstration. Raisonnons par exemple sur $\mathfrak{F}_{n_i}(s)$:

En appliquant la loi des grands nombres à $A_{n_i}^l$, on détermine un entier $l_i = l_i(\delta, r)$ tel que pour tout $F \in \mathfrak{F}_{n_i}(s)$ sauf peut-être sur un ensemble de mesure $<\delta$, on ait

$$l \geqq l_i \Rightarrow \mu_{n_i}(F) \leqq 2^{-g_{n_i}(p)\frac{l}{2}}$$

On prendra ensuite $l_0 = \sup_{1 \leqq i \leqq r} l_i$.

Prenons alors $L_r = l_0(\delta_r, r)$ où $\{\delta_r\}$ est une suite convergeant vers 0.

On choisit alors une suite $\{N_r\}$ de telle sorte que le lemme 4-2) soit vérifié sur $B(p)$ et $B(q)$; de la sorte $\{N_r\}$ convient pour tous les systèmes $B_i(p)$ et $B_i(q)$. La construction à laquelle nous allons maintenant procéder s'inspire évidemment de [3]. Notons $\bar{\pi}_i$ la projection canonique de $A_{n_{i+2}}$ sur A_{n_i}, et également $\bar{\pi}_i$ la projection de $\mathfrak{F}_{n_{i+2}}(s)$ sur $\mathfrak{F}_{n_i}(s)$ (resp. $\mathfrak{G}_{n_{i+2}}(s)$ sur $\mathfrak{G}_{n_i}(s)$). Cette application peut être considérée comme une société car $\bar{\pi}_i \mu_{n_{i+2}} = \mu_{n_i}$ (resp. $\bar{\pi}_i \nu_{n_{i+2}} = \nu_{n_i}$). Remarquons en passant que $\bar{\pi}_i \circ \bar{\pi}_i^* = Id$. (L'inverse est faux.) (2)

Lemme 9. *Pour tout squelette s de rang r, il existe une suite de sociétés* $\{S_i(s)\}_{i \geqq 1}$ *telle que:*

(1) *Si i est impair* $S_i(s)$ *est une société de* $\mathfrak{F}_{n_i}(s)$ *vers* $\mathfrak{G}_{n_{i+1}}(s)$ *et si i est pair, de* $\mathfrak{G}_{n_i}(s)$ *vers* $\mathfrak{F}_{n_{i+1}}(s)$.

(2) *Pour* $i \geqq 2$, $S_i(s) = \bar{\pi}_{i-1}^* \circ S_{i-1}^*(s)$.

(3) *Si* $r \geqq 2$, *et si* $s = \prod_{k=1}^{j} s_k$ *est la décomposition canonique de s, pour tout* $i \geqq 1$, $S_i(s) < \prod_{k=1}^{j} S(s_k)$.

(4) *Pour tout* $i \leqq r$, $S_i(s)$ *vérifie le lemme* 5.2).

Démonstration. Soit s un squelette de rang 1; soit R_1 la société de $\mathfrak{F}_{n_1}(s)$ vers $\mathfrak{G}_{n_2}(s)$ définie par $R_1(F) = \mathfrak{G}_{n_2}(s)$. Choisissons alors $S_1(s) < R_2$ de façon à vérifier le lemme 5.2).

Posons alors, pour $i \geqq 2$, $S_i(s) = \bar{\pi}_{i-1}^* \circ S_{i-1}^*(s)$.

La suite $\{S_i(s)\}$ vérifie le lemme 9.

Supposons donc le lemme vrai jusqu'au rang $r-1$.

Soit s un squelette de rang r et soit $s = \prod_{k=1}^{j} s_k$ sa décomposition canonique.

Posons, pour, $1 \leqq i \leqq r$ $R_i(s) = \prod_{k=1}^{j} S_i(s_k)$.

Construisons $T_r(s) < R_r(s)$ vérifiant le lemme 6, et considérons $T_{r-1}(s) = T_r^*(s) \circ \bar{\pi}_{r-1}^*$. Ayant $T_r(s) < \prod_{k=1}^{j} S_r(s_k)$, en vertu des lemme 6.1) et 2), on a:

$$T_r^*(s) < \prod_{k=1}^{j} S_r^*(s_k).$$

Par définition $S_r^*(s_k) = S_{r-1}(s_k) \circ \bar{\pi}_{r-1}$, donc, grâce à (2): $T_{r-1}(s) < R_{r-1}(s)$.

Deux cas se présentent alors: ou bien $T_{r-1}(s)$ vérifie le lemme 5.2) et le même raisonnement s'applique à T_{r-2}, ou bien ce n'est pas le cas: choisissons alors $U_{r-1}(s) < T_{r-1}(s)$ vérifiant lemme 5.2). On constate alors que, si $U_r(s) = \bar{\pi}_{r-1}^* \circ U_{r-1}^*(s)$, $U_r(s)$ vérifie, a fortiori, cette propriété puisque $U_r(s) < T_r(s)$. De proche en proche, et au bout de r raffinements au plus, on construit $S_1(s), \ldots, S_r(s)$ vérifiant le lemme 5.

En posant $S_i(s) = \bar{\pi}_{i-1}^* \circ S_{i-1}^*(s)$ pour $i \geqq r+1$, la suite $\{S_i(s)\}_{i \geqq 1}$ vérifie le lemme 9. Ce qui achève la démonstration.

5. Démonstration du théorème

Lemme 10. *Il existe une suite d'homomorphismes finitaires $f_i: B_{i+1}(p) \to B_i(q)$ si i est pair et de $B_{i+1}(q) \to B_i(p)$ si i est impair telle que:*

$$\forall i \geqq 1, \quad f_i \circ f_{i+1} = \tilde{\pi}_i$$

où $\tilde{\pi}_i$ est la projection canonique de $B_{i+2}(p)$ sur $B_i(p)$ (resp. $B_{i+2}(q)$ sur $B_i(q)$).

Démonstration. Soit, par exemple $i \geqq 3$ et impair; raisonnant comme dans [3] si $X'_{n_i}(\{s_r\}) = \{x \in \{0, \ldots, n_i\}^{\mathbb{Z}} \mid s_r(x) = s_r\}$, pour presque tout $x \in X'_{n_i}$, $F_r(x)$ est contenu dans l'image par $S_{i-1}(s_r)$ d'un unique $G \in \mathfrak{G}_{n_{i-1}}(s_r)$ (en effet la probabilité pour qu'il n'en soit pas ainsi est majorée par:

$$\delta_r + \frac{1}{\eta_{n_{i-1}}{}^{l_r}(q)} \cdot 2^{-g_{n_i}(p)\frac{l_r}{2}}$$

qui tend vers 0 en vertu de (1)) et ceci dès que r est assez grand. Sans répéter ici l'argumentation de [3], cette propriété permet de définir un homomorphisme finitaire de $B_i(p)$ dans $B_{i-1}(q)$, soit f_{i-1}.

Si X'_i est l'ensemble de définition de f_{i-1}, il est clair que $\nu_{n_{i-1}}(f_{i-1} X'_i) = 1$. Donc, pour preque tout $x \in X'_i$, $f_{i-1}(x)$ appartient à l'ensemble de définition de f_{i-2}. Examinons alors $f_{i-2} \circ f_{i-1}(x)$.

Pour presque tout x tel que $x_0 \neq 0$, il existe r rel que $F_r(x)$ soit contenu dans l'image par $S_{i-1}(s_r)$ d'un unique $G \in \mathfrak{G}_{n_{i-1}}(s_r)$ et G est contenu dans l'image par $S_{i-2}(s_r)$ d'un *unique* $F' \in \mathfrak{F}_{n_{i-2}}(s_r)$.

Donc $F_r(x) \in S_{i-1}(s_r) \circ S_{i-2}(s_r)(F')$. Soit $F'' = \tilde{\pi}_{i-2} F$; alors $S_{i-2}(s_r)(F'') = S_{i-1}^*(s_r)(F)$, en vertu de la formule démontrée au lemme 9.2). Ayant $F \in S_{i-1}(s_r) \circ S_{i-1}^*(s_r)(F)$, on obtient: $F_r(x) \in S_{i-1}(s_r) \circ S_{i-2}(F'')$; l'unicité de F' montre que $F' = F''$ et donc que $F' = \tilde{\pi}_{i-2} F_r(x)$; ce qui implique évidemment $f_{i-2} \circ f_{i-1} = \tilde{\pi}_{i-2}$ et le lemme 10 est entièrement démontré.

Soit X''_1 l'ensemble d'arrivée de f_1.

Posons X''_3 l'ensemble des points appartenant à l'ensemble de définition de f_2 et à l'ensemble d'arrivée de f_3. Il est clair que $\tilde{\mu}_{n_3}(X''_3) = 1$.

On pose alors X''_{2i+1} l'ensemble des points appartenant à l'ensemble de définition de f_{2i} et à l'ensemble d'arrivée f_{2i+1}.

On pose enfin $X'' = \bigcap_{i \geqq 0} \pi_{2i+1}^{-1} X''_{2i+1}$. On a alors $\mu(X'')=1$.

On définirait de même Y''.

Construction de $\varphi: B(p) \to B(q)$. Si $x \in X''$, $\pi_{2i+1} x \in X''_{2i+1}$ donc $f_{2i}(\pi_{2i+1} x) \in Y''_{2i}$ et par suite l'ensemble $\bigcap_{i \geqq 1} \pi_{2i}^{-1} f_{2i}(\pi_{2i+1} x)$ est non vide.

1. Pour tout $x \in X''$, $\bigcap_{i \geqq 1} \pi_{2i}^{-1} f_{2i}(\pi_{2i+1} x)$ est réduit à un point.

En effet, si $y, y' \in \bigcap_{i \geqq 1} \pi_{2i}^{-1} f_{2i}(\pi_{2i+1} x)$, pour tout i, $\pi_{2i} y = \pi_{2i} y'$, donc $y = y'$.

En vertu de cette propriété, il est loisible de considérer l'application:

$$x \to \varphi(x) = \bigcap_{i \geqq 1} \pi_{2i}^{-1} f_{2i} \pi_{2i+1}(x).$$

2. $\varphi T = T \varphi$. est tout a fait évident. (3)

3. Pour tout $i \geqq 1$, $\pi_{2i} \circ \varphi = f_{2i} \circ \pi_{2i+1}$. (4)

Est évident par définition.

4. $\varphi \mu = \nu$.

En vertu de (4), et puisque f_{2i} est un homomorphisme finitaire:

$$\pi_{2i} \varphi \mu = f_{2i} \circ \pi_{2i+1} \mu = f_{2i} \tilde{\mu}_{n_{2i+1}} = \tilde{\nu}_{n_{2i}}.$$

Donnons nous alors un cylindre A de $B(q)$. On peut choisir i assez grand pour que: $\nu(A) = \tilde{\nu}_{n_{2i}}(\pi_{2i} A)$.

A étant un cylindre, pour ce même i, $\pi_{2i}^{-1}(\pi_{2i} A) = A$.

Donc, $\nu(A) = \tilde{\nu}_{n_{2i}}(\pi_{2i} A) = \mu(\varphi^{-1} \pi_{2i}^{-1}(\pi_{2i} A)) = \mu(\varphi^{-1} A)$ ce qui montre (5)

5. Pour tout $E \subset X''$, la suite $\{\pi_{2i}^{-1} f_{2i} \pi_{2i+1}(E)\}_{i \geqq 1}$ est décroissante. (6)

En effet, si $z \in \pi_{2i+2}^{-1} f_{2i+2} \pi_{2i+3} E$, $\pi_{2i+2} z \in f_{2i+2} \pi_{2i+3} E$.

Mais $\pi_{2i} z = \tilde{\pi}_{2i} \circ \pi_{2i+2} z$, donc $\pi_{2i} z \in \tilde{\pi}_{2i} f_{2i+2} \pi_{2i+3} E$.

En vertu du lemme 10, $\pi_{2i} = f_{2i} \circ f_{2i+1}$, donc:

$$\pi_{2i} z \in f_{2i} \circ f_{2i+1} \circ f_{2i+2} \circ \pi_{2i+3} E;$$

ayant $f_{2i+1} \circ f_{2i+2} = \tilde{\pi}_{2i+1}$, il vient:

$$\pi_{2i} z \in f_{2i} \pi_{2i+1} E$$

c'est-à-dire $z \in \pi_{2i}^{-1} f_{2i} \pi_{2i+1} E$: (6) est donc démontré.

6. φ est un homomorphisme finitaire.

En tenant compte de (3) et (5) il nous suffit de montrer la continuité de φ. Soit $y \in \mathbb{N}^*$; prenons i_0 assez grand pour que $\pi_{2i_0} y = y$. Il existe un cylindre $[a_m, \ldots, a_n]$ de $B_{2i_0+1}(p)$ tel que:

$$\forall x \in [a_m, \ldots, a_n] \, (f_{2i_0}(x))_0 = y.$$

Soit I le cylindre de $B(p)$ s'écrivant $[a_m, \ldots, a_n]$.

On remarque que $\pi_{2i+1}^{-1}[a_m, \ldots, a_n] \supset I$.

Pour tout $z \in I$, $\pi_{2i_0+1} z \in [a_m, \ldots, a_n]$, donc $(f_{2i_0} \pi_{2i_0+1} z)_0 = y$.

Par conséquent pour tout $y' \in \pi_{2i_0}^{-1} f_{2i_0} \pi_{2i_0+1} z$, on a $y'_0 = y$.

Ce qui implique $\pi_{2i_0}^{-1} f_{2i_0} \pi_{2i_0+1}(I) \subset [y]$.

En vertu de (6) $\bigcap\limits_{i \geqq i_0} \pi_{2i}^{-1} f_{2i} \pi_{2i+1}(I) = \bigcap\limits_{i \geqq 1} \pi_{2i}^{-1} f_{2i} \pi_{2i+1}(I)$, ensemble qui contient bien évidemment $\varphi(I)$.

De sorte que $\varphi(I) \subset [y]$.

(Les cylindres sont toujours, naturellement supposés restreints à X'' et Y'' respectivement.)

Construction de ψ: $B(q) \to B(p)$. Par symétrie, si $y \in Y''$, nous poserons $\psi(y) = \bigcap\limits_{i \geqq 1}^{\infty} \pi_{2i-1}^{-1} f_{2i-1} \pi_{2i}(y)$. Il nous suffira donc de montrer que $\psi(\varphi(x)) = x$.

Soit $z = \psi(\varphi(x))$; pour tout i, $z \in \pi_{2i-1}^{-1} f_{2i-1} \pi_{2i}(\varphi(x))$ c'est-à-dire

$$\pi_{2i-1} z = f_{2i-1} \pi_{2i}(\varphi(x)).$$

Comme $\varphi(x) \in \pi_{2i}^{-1} f_{2i} \pi_{2i+1}(x)$, $\pi_{2i} \varphi(x) = f_{2i} \cdot \pi_{2i+1}(x)$ donc

$$\pi_{2i-1} z = f_{2i-1} \circ f_{2i} \pi_{2i+1}(x).$$

Utilisant à nouveau le lemme 10, comme dans la démonstration du (6), il vient:

$$\pi_{2i-1} z = \pi_{2i-1} x.$$

Ceci étant vrai pour tout $i, z = x$. Le théorème 1 est donc entièrement établi.

Bibliographie

1. Billingsley, P.: Ergodic theory and information. New York: Addison Wesley 1965
2. Keane, M., Smorodinsky, M.: Bernoulli schemes of the same entropy are finitarily isomorphic. Ann. Math. **109**, 397–406 (1979)
3. Keane, M., Smorodinsky, M.: A class of finitary codes. Israel J. Math. **26**, n^0 3–4, 352–371 (1977)
4. Keane, M., Denker, M.: Almost topological dynamical systems. [A paraître]

Reçu le 15 Mai 1980