Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8, 204—209 (1967)

Das Gesetz vom iterierten Logarithmus für stark mischende stationäre Prozesse

WALTER PHILIPP

Eingegangen am 14. Juli 1966

Einleitung

Für stationäre Prozesse $\langle x_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots\rangle$, die eine starke Mischungsbedingung erfüllen, gilt der zentrale Grenzwertsatz, d.h., die Verteilung von $S_N = N^{-1/2} \sum_{n \leqq N} x_n$ strebt gegen die Normalverteilung (siehe z.B. [2] und die dort angegebene Literatur). Daher ist es vielleicht von Interesse zu zeigen, daß für derartige Prozesse das Gesetz vom iterierten Logarithmus gilt, d.h., daß mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\left|\sum_{n\leqq N} x_n\right|}{\sqrt{2\sigma^2 N \log\log N}} = 1\,,$$

wenn für die Streuung des Prozesses $\sigma^2 \neq 0$ gilt. Dies um so mehr, da der Beweis im wesentlichen bereits durch die Arbeit von ERDÖS u. GÁL [1] und eine frühere Arbeit [2] erbracht ist. Natürlich gibt es noch einige Hindernisse zu überwinden, doch sind diese von geringerer Schwierigkeit.

Genauer beweisen wir folgenden

Satz 1. *Es sei $\langle x_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots\rangle$ ein stationärer Prozeß im weiten Sinne mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $E x_i = 0 \quad (i \geqq 0)$.

(ii) *Es gibt eine Funktion $L(x)$, definiert für alle ganzen $x \geqq 0$, mit $L(x)\, L(y) \leqq L(x+y)$, so daß für alle ganzen Zahlen $r \geqq 1$; $0 \leqq i_0 \leqq i_1 < \cdots < i_r$; $1 \leqq j < r$ und $p_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq r)$ gilt*

$$\begin{aligned} &\left| E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_r}^{p_r}) - E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_j}^{p_j})\, E(x_{i_{j+1}}^{p_{j+1}} \cdots x_{i_r}^{p_r})\right| \leqq \\ &\qquad \leqq L(j)\, c(i_{j+1} - i_j) \sup_{1 \leqq i \leqq i_r} E\left(|x_i|^{\sum p_\nu}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\left| E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_r}^{p_r} \mid A) - E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_r}^{p_r})\right| \leqq L(0)\, c(i_1 - i_0) \sup_{1 \leqq i \leqq i_r} E\left(|x_i|^{\sum p_\nu}\right) \tag{2}$$

für alle $A \in \mathfrak{M}_0^{i_0}$. Dabei ist $\mathfrak{M}_a^b$ die σ-Algebra, die durch die Ereignisse $\{x_n < \alpha\}$ $(a \leqq n \leqq b)$ erzeugt wird, und $c(s) = s^{-\gamma(s)}$ mit $\gamma(s) \uparrow \infty$ so rasch, daß $\frac{1}{4}\gamma(N^{1/16}) \geqq p + 1$ für alle ganzen $N \geqq 1$ und $p \leqq 3 \log_2 N$. Weiter wird vorausgesetzt, daß

$$\sup_{0 \leqq i < \infty} E\left(|x_i|^{6 \log_2 N}\right) \cdot L(6 \log_2 N) = O(N^{1/12})\,.$$

Dann existiert

$$\sigma^2 = \lim N^{-1} E\Big(\sum_{n \leqq N} x_n\Big)^2 = \|x_0\|^2 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} E(x_0 x_s)\,.$$

Ist $\sigma \neq 0$, dann gilt mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\left|\sum_{n\leqq N} x_n\right|}{\sqrt{2\sigma^2 N \log_2 N}} = 1 .$$

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich der Lektüre einer noch unveröffentlichten Arbeit [4] von STACKELBERG, der mir das Manuskript freundlicherweise zur Verfügung stellte.

1. Die Abschätzung nach oben

Wir zeigen hier, daß $\limsup(\cdots) \leqq 1$, und zwar sogar unter schwächeren Voraussetzungen.

Proposition 1. *Es sei $\langle x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots\rangle$ ein stationärer Prozeß im weiten Sinne mit den Eigenschaften* (i) *und* (ii), *wobei wir aber in* (ii) *nur* (1) *als erfüllt annehmen. Ist $\sigma \neq 0$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\eta > 0$ ein $N_0 = N_0(\varepsilon, \eta)$, so daß mit Wahrscheinlichkeit $> 1 - \eta$ und für alle $N \geqq N_0$*

$$\left|\sum_{n\leqq N} x_n\right| \leqq (1+\varepsilon)\sqrt{2\sigma^2 N \log_2 N} .$$

Zum *Beweis* brauchen wir einige Hilfssätze, die wir alle unter den obigen Annahmen beweisen. Die Existenz von σ^2 folgt aus Hilfssatz 1.1 in [2].

Hilfssatz 1. *Es gilt für alle ganzen $M, N \geqq 0$ und $0 \leqq p \leqq 3\log_2 N$*

$$E\left(\left(\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right)^{2p}\right) = \frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \sigma^{2p}(1 + O(N^{-\delta})), \quad 0 < \delta < \frac{1}{100},$$

gleichmäßig in M.

Der *Beweis* folgt sofort aus Hilfssatz 1.7 in [2], indem wir diesen auf den Prozeß $\langle x_{n+M},\ n = 0, 1, \ldots\rangle$ anwenden.

Hilfssatz 2. *Wir setzen für festes $M, N \geqq 0$*

$$\Phi(t) = P\left\{\left|\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right| \geqq \sqrt{2t\sigma^2 N \log_2 N}\right\}.$$

Dann gilt für alle $N \geqq N_0$

$$\Phi(t) \leqq \begin{cases} \dfrac{18\log_2 N}{\log^t N} & \textit{für} \quad 0 \leqq t \leqq 3 \quad \textit{und} \\[2mm] \dfrac{6\log_2 N}{t^2 \log_2 N} & \textit{für} \quad t \geqq 3 . \end{cases} \tag{3}$$

Dabei hängt N_0 nur von der Konstanten ab, die durch O in Hilfssatz 1 *impliziert wird.*

Der *Beweis* ist identisch mit dem von Lemma 7 [1]. Wir setzen nun

$$F(M, N) = \left|\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right| .$$

Die Lemmas 12, 13, 14 in [1] übertragen sich dann sinngemäß. Man folgt dem restlichen Beweis von Lemma 11, dem ja Proposition 1 entspricht, bis ans Ende und überzeugt sich leicht, daß alle Schritte richtig bleiben, wenn man sie sinngemäß überträgt, ausgenommen jener, bei dem $F([a^n] + m_\lambda 2^\lambda, N^*)$ durch N^* nach oben abgeschätzt wird. Diese Abschätzung ersetzen wir durch folgenden

Hilfssatz 3. *Für jedes $1 < a \leqq 2$ gilt mit Wahrscheinlichkeit 1*

$$F([a^n] + m_\lambda 2^\lambda, N^*) = O(N^{(1/3)+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\int F([a^n] + m_\lambda 2^\lambda, N^*)^2 = \int F(0, N^*)^2 = O(N^*).$$

Da für $\varepsilon > 0$ die Reihe $\sum N^{*-1-\varepsilon} < \infty$, folgt nach einem bekannten Satz, daß mit Wahrscheinlichkeit 1

$$F([a^n] + m_\lambda 2^\lambda, N^*) = O(N^{*1+\varepsilon}) = O(N^{(1/3)+\varepsilon}).$$

Damit ist Hilfssatz 3 und Proposition 1 bewiesen.

2. Die Abschätzung nach unten

Proposition 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ und $N > 0$ ganz, eine endliche Folge ganzer Zahlen $N < N_1 < \cdots < N_k$, so daß mit Wahrscheinlichkeit $> 1 - \eta$*

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq k} \frac{F(0, N_\nu)}{\psi(N_\nu)} \geqq 1 - \varepsilon,$$

wobei $\psi(N) = \sqrt{2\sigma^2 N \log_2 N}$.

Die folgenden drei Hilfssätze gelten alle unter den Voraussetzungen des Satzes 1.

Hilfssatz 4. *Es gilt gleichmäßig in M*

$$\int_A \left(\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right)^{2p} = P(A) \frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \sigma^{2p} (1 + O(N^{-\delta})), \quad 0 < \delta < \frac{1}{100},$$

für alle $A \in \mathfrak{M}_0^{M-m}$ mit $\alpha N < m < M$ $(a > 0)$ und alle $0 \leqq p \leqq 3 \log_2 N$.

Beweis. Aus dem polynomischen Lehrsatz folgt

$$\int_A \left(\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right)^{2p} = \sum \frac{(2p)!}{p_1! \cdots p_N!} \int_A x_M^{p_1} \cdots x_{M+N-1}^{p_N}, \tag{4}$$

wobei über alle $p_i \geqq 0$ mit $\sum p_i = 2p$ summiert wird. Nun ist nach (2)

$$\int_A x_M^{p_1} \cdots x_{M+N-1}^{p_N} = P(A) E(x_M^{p_1} \cdots x_{M+N-1}^{p_N}) + \Theta L(0) c(m) P(A) \sup_{0 \leqq i < \infty} E(|x_i|^{2p})$$

mit $|\Theta| \leqq 1$. Dies in (4) eingesetzt, ergibt unter Verwendung von Hilfssatz 1

$$\begin{aligned} \int_A \left(\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right)^{2p} &= P(A) \frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \sigma^{2p} (1 + O(N^{-\delta})) + \\ &\quad + P(A) L(0) c(m) \sup_{0 \leqq i < \infty} E(|x_i|^{2p}) N^{2p} \\ &= P(A) \frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \sigma^{2p} (1 + O(N^{-\delta})), \quad 0 < \delta < \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

In Analogie zu Hilfssatz 2 gilt

Hilfssatz 5. *Wir setzen*

$$\Phi_A(t) = P\left\{\left|\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right| \geqq \sqrt{2\,t\,\sigma^2\,N\log_2 N}\,\middle|\, A\right\},$$

wobei $A \in \mathfrak{M}_0^{M-m}$ $(\alpha N < m < M,\ \alpha > 0)$. *Dann gilt für* $\Phi_A(t)$ *die Abschätzung* (3).

Hilfssatz 6. *Für* $0 < \varepsilon < 1$ *und* $A \in \mathfrak{M}_0^{M-m}$ $(\alpha N < m < M,\ \alpha > 0)$ *gilt*

$$\Phi_A(1-\varepsilon) > (\log N)^{-1+(\varepsilon^2/4)}.$$

Für einen *Beweis* siehe Lemma 8 [1].

Wir führen nun den Beweis von Proposition 2 zu Ende. Dieser folgt auch der allgemeinen Linie von [1], und so können wir uns etwas kürzer fassen. Wir schreiben für $k = 1, 2, \ldots$

$$F_k = F(2(a^u + \cdots + a^{u+k-1}),\ a^{u+k}),$$
$$\psi_k = \psi(a^{u+k}), \quad N_k = 2(a^u + \cdots + a^{u+k-1}) + a^{u+k},$$

wo die ganzen Zahlen $a \geqq 3$ und $u \geqq 2$ wie in [1] später passend gewählt werden. Wir definieren nun die Ereignisse $E_0, E_1, \ldots, E_k$ induktiv: E_0 ist leer;

$$E_1 = \left\{F_1 \geqq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\psi_1\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_k = \left\{F_k \geqq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\psi_k\right\} \cap \{\Omega - (E_1 + \cdots + E_{k-1})\}.$$

Es ist $\Omega - (E_1 + \cdots + E_k) \in \mathfrak{M}_0^{N_k}$, wie man leicht sieht. Hilfssatz 6 mit

$$M = 2(a^u + \cdots + a^{u+k}), \quad N = a^{u+k+1} \quad \text{und} \quad m = M - N_k = a^{u+k}$$

angewendet, ergibt für $k \geqq 0$ (für $k = 0$ bedeutet $\Omega - (E_1 + \cdots + E_k) = \Omega$)

$$P\{E_{k+1}\} \geqq P\{\Omega - (E_1 + \cdots + E_k)\} \cdot ((u + k + 1)\log a)^{-1}.$$

Daraus folgt durch Induktion nach k

$$P\{\Omega - (E_1 + \cdots + E_k)\} \leqq \prod_{\nu=1}^{k} (1 - ((u + \nu)\log a)^{-1}).$$

Wir definieren die Ereignisse E_k' $(k \geqq 1)$ durch

$$E_{k+1}' = \{F(0, N_k + a^{u+k} \geqq \sqrt{2}\,\psi(N_k + a^{u+k})\}$$

und erhalten aus Hilfssatz 1, wenn $a \geqq a_0$,

$$P(E_{k+1}') < \frac{1}{2}(u + k)^{-3/2}$$

und schließlich

$$P\left\{\Omega - \bigcup_{\nu=1}^{k} E_\nu\right\} + P\left\{\bigcup_{\nu=1}^{k} E_\nu'\right\} < \prod_{\nu=1}^{k} (1 - ((u + \nu)\log a)^{-1}) + (u - 1)^{-1/2}.$$

Weiter gilt

$$\frac{F(0, N_\nu)}{\psi(N_\nu)} \geqq \frac{F_\nu}{\psi_\nu} \cdot \frac{\psi_\nu}{\psi(N_\nu)} - \frac{F(0, N_\nu + a^{u+\nu-1})}{\sqrt{2}\,\psi(N_{\nu-1} + a^{u+\nu-1})} \cdot \frac{\sqrt{2}\,\psi(N_{\nu-1} + a^{u+\nu-1})}{\psi(N_\nu)}.$$

Der Rest des Beweises ist analog zu [1]. Man wählt dabei a nur in Abhängigkeit von ε ($a > N$ würde nämlich $\alpha = 0$ zur Folge haben) und wählt dann u so groß, daß $a^u > N$.

3. Eine Anwendung

Es sei T eine Resttransformation vom Typ A (s. [2] und [3]) oder $Tx = x^{-1}$ mod 1 (Typ C). Weiter sei $g(u_1, \ldots, u_m)$ eine Funktion, wie sie in Hilfssatz 2.9 [2] beschrieben wird. Aus diesem Hilfssatz folgt, daß die Bedingung (1) im Satz erfüllt ist. Daß auch (2) erfüllt ist, zeigt man analog. Es gilt also im Falle $\sigma \neq 0$ für fast alle x

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\left|\sum_{n\leqq N} f(T^n x)\right|}{\sqrt{2\sigma^2 N \log_2 N}} = 1,$$

wenn $E(|f|^{6\log_2 N}) = O(N^{1/12})$ und m eine feste natürliche Zahl bedeutet.

4. Zwei weitere Sätze

In Wirklichkeit beinhaltet der Beweis des Satzes sogar

Satz 2. *Es sei $\langle x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\rangle$ ein stochastischer Prozeß mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Konstante $\gamma > 0$, so daß für alle ganzen $M, N \geqq 0$ und $0 \leqq p \leqq 3\log_2 N$ gilt*

$$E\left(\left(\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right)^{2p}\right) = O\left(\frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \gamma^p\right).$$

Dann ist fast sicher

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\left|\sum_{n\leqq N} x_n\right|}{\sqrt{2\gamma N \log_2 N}} \leqq 1.$$

Bemerkung. Dieser Satz findet sich bereits bei S. GÁL [5] in etwas schwächerer Form.

Satz 3. *Es sei $\langle x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\rangle$ ein stochastischer Prozeß, für den folgendes gilt: Es gibt eine Konstante $\gamma > 0$, so daß für alle ganzen $M, N \geqq 0$ und $0 \leqq p \leqq$ $\leqq 3\log_2 N$ und alle $A \in \mathfrak{M}_0^{M-m}$ mit $\alpha N < m \leqq M$ ($\alpha > 0$) gilt*

$$E\left(\left(\sum_{n=M}^{M+N-1} x_n\right)^{2p} \middle|\, A\right) = \frac{(2p)!}{2^p p!} \gamma^p N^p (1 + o(1)).$$

Dann ist fast sicher

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\left|\sum_{n\leqq N} x_n\right|}{\sqrt{2\gamma N \log_2 N}} \geqq 1.$$

Die beiden Sätze sind für einige Anwendungen von Bedeutung.

Literatur

1. ERDÖS, P., and I. S. GÁL: On the law of the iterated logarithm I and II. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A 58, 65—84 (1955).

2. Philipp, W.: Ein zentraler Grenzwertsatz mit Anwendung auf die Zahlentheorie. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8, 185—203 (1967).
3. Roos, P.: Iterierte Resttransformationen von Zahldarstellungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **4**, 45—63 (1965).
4. Stackelberg, O. P.: On the law of the iterated logarithm for continued fractions. Duke Math. J. **33**, 801—820 (1966).
5. Gál, I. S.: Sur la majoration des suites de fonctions. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A **54**, 243—251 (1951).

Mathematisches Institut
der Universität
1010 Wien, Hanuschgasse 3

Ab 1. Sept. 1967:
Department of Mathematics
University of Illinois
Urbana, Illinois, USA