Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8, 185—203 (1967)

Ein zentraler Grenzwertsatz mit Anwendungen auf die Zahlentheorie

WALTER PHILIPP *

Eingegangen am 14. Juli 1966

Einleitung

In den letzten Jahren wurden von verschiedenen Autoren [5], [12], [13] stationäre Prozesse im strikten Sinne $\langle x_n, n = 0, 1, 2, \ldots\rangle$ untersucht, die starke Mischungsbedingungen erfüllen. Eine von diesen lautet

$$\sup |P(AB) - P(A)\, P(B)| \leqq \alpha(n) \downarrow 0,$$

wobei sup über alle $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$ und $B \in \mathfrak{M}_{n}^{\infty}$ erstreckt wird; $\mathfrak{M}_a^b$ ist dabei die σ-Algebra, die durch die Ereignisse $\langle (x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}) \in E\rangle$ erzeugt wird (E eine beliebige k-dimensionale Borel-meßbare Menge und $a \leqq n_1 < \cdots < n_k \leqq b$). Unter gewissen Voraussetzungen über die Folge $\langle \alpha(n)\rangle$ wurde gezeigt, daß die Verteilung von $S_N = N^{-1/2} \sum_{n \leqq N} x_n$ gegen die Normalverteilung strebt.

In dieser Arbeit werden nun stationäre Prozesse im weiten Sinne betrachtet, die eine starke Mischungsbedingung erfüllen, die der obigen im wesentlichen äquivalent ist. Es wird gezeigt, daß die Verteilung von S_N gegen die Normalverteilung strebt, wobei aber auch noch über die Geschwindigkeit der Konvergenz Aussagen gemacht werden (Satz 1).

Der Beweis von Satz 1 ist von den Beweisen der oben erwähnten Sätze grundsätzlich verschieden. Es werden in dieser Arbeit die höheren Momente der S_N abgeschätzt und dann gezeigt, daß die charakteristischen Funktionen der $N^{-1/2} S_N$ mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen die der Normalverteilung streben.

Mit Hilfe von Satz 1 wird in Kapitel 3 gezeigt, daß die Verteilungen der Summen $N^{-1/2} \sum_{n \leqq N} f(T^n x)$ gegen die Normvalerteilung streben, wobei f eine Funktion aus einer gewissen Klasse K ist (diese Klasse enthält z.B. die Funktionen von beschränkter Variation und Lip α ($\alpha > 0$)) und T zu einer gewissen Klasse von Abbildungen des Einheitsintervalls auf sich gehört, die in der Zahlentheorie eine Rolle spielen; z.B. $Tx = ax \bmod 1$ ($a > 1$; ganz) oder $Tx = \vartheta x \bmod 1$ (für gewisse $\vartheta > 1$, nichtganz) oder $Tx = x^{-1} \bmod 1$ (dieses T definiert den Kettenbruchalgorithmus). Im 1. Fall wird dadurch ein Ergebnis von M. KAC [7] und POSTNIKOV [9] und im 3. Fall eines von IBRAGIMOV [6] verschärft.

Herr Dr. STACKELBERG hat mir freundlicherweise das Manuskript seiner noch unveröffentlichten Arbeit [14] zur Verfügung gestellt. Aus dieser Arbeit habe ich einige der Ideen Dr. STACKELBERGS benützt, die höheren Momente der S_N abzuschätzen.

* Diese Arbeit wurde teilweise durch das United States Office of Naval Research unterstützt.

1. Formulierung und Beweis von Satz 1

Im folgenden bedeutet $|\Theta| \leqq 1$ eine — nicht notwendigerweise immer dieselbe — Konstante. Weiter bedeutet durchwegs $\int (\cdots) = \int\limits_X (\cdots)\, dP$, wobei $\Omega = (X, \Sigma, P)$ stets der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum ist, und $\|x\|_p$ die p-Norm von x. Für $p = 2$ lassen wir den Index weg, also $\|x\|_2 = \|x\|$.

Satz 1. *Es sei $\langle x_i,\ i = 0, 1, \ldots\rangle$ ein stationärer Prozeß im weiten Sinne, der folgenden Bedingungen genügt:*

(1.1) $E\, x_i = 0 \quad (i \geqq 0)$.

(1.2) *Es gibt eine Funktion $L(x) \geqq 1$, definiert für alle ganzen $x \geqq 1$, mit $L(x)\, L(y) \leqq L(x+y)$ und der Eigenschaft: Für alle ganzen Zahlen*

$$r \geqq 1;\quad 0 \leqq i_1 < \cdots < i_r;\quad 1 \leqq j < r \quad \text{und} \quad p_\nu \geqq 0 \quad (1 \leqq \nu \leqq r)$$

existieren die gemischten Momente und es gilt

$$|E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_r}^{p_r}) - E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_j}^{p_j})\, E(x_{i_{j+1}}^{p_{j+1}} \cdots x_{i_r}^{p_r})| \leqq L(j)\, c(i_{j+1} - i_j) \sup_{1 \leqq i \leqq i_r} E|x_i|^{\Sigma p_\nu},$$

wobei $c(s) = s^{-\psi(s)}$ mit $\psi(s) \uparrow \infty$.
Dann existiert

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \int \Big(\sum_{n \leqq N} x_n\Big)^2 dP = \|x_0\|^2 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} E(x_0 x_s).$$

Ist $\sigma \neq 0$, dann gilt

$$P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{n \leqq N} x_n < y\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\, dt + O(Q^{-1/2}) +$$
$$+ O\Big(N^{-1/16}\, C^{2Q+1}\, L(2Q+1) \sup_{1 \leqq i \leqq N} E|x_i|^{2Q+1}\Big).$$

Dabei ist $C = \sum s\, c(s) < \infty$ und Q ist so zu wählen, daß

$$Q \leqq \max\left(\frac{1}{32}\, \frac{\log N}{\log_2 N},\ p_0\right), \text{ wo } p_0 = \sup p \text{ mit } \psi(N^{1/16}) \geqq 4p.$$

Die Konstanten in O sind numerisch.

Später werden wir folgendes Korollar verwenden:

Korollar. *Ist speziell*

$$\psi(s) \geqq s^\delta \quad (\delta > 0) \quad \text{und} \quad \sup_{1 \leqq i < \infty} \|x_i\|_{2Q+1} \leqq Q^a, \quad a \geqq 1,$$

so gilt

$$P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{n \leqq N} x_n < y\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\, dt + R_N,$$

wobei im Falle $L(x) = L = \text{const}$

$$R_N = O\left(\left(\frac{\log_2 N}{\log N}\right)^{1/2}\right)$$

und im Falle $L(x) = \exp(\alpha\, \beta^x)$

$$R_N = O(\beta^{1/2} \log_2^{-1/2} N) + \exp\left(-\frac{1}{16} \log N + \alpha \log^{1/2} N\right).$$

Die Konstanten in O hängen nur von a und δ und im 1. Fall von L ab.

Der *Beweis* des Satzes beruht auf einigen Hilfssätzen, bei denen stets die Voraussetzungen von Satz 1 als erfüllt angenommen werden. Wir setzen $h = [N^{1/2}]$ und $k = [N^{1/4}]$ — diese Wahl ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich — und führen neue Zufallsvariable y_i, u_i $(1 \leqq i \leqq l)$ ein.

$$y_1 = x_0 + \cdots\cdots\cdots + x_{h-1} \qquad u_1 = x_h + \cdots\cdots\cdots + x_{h+k-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_l = x_{(l-1)(h+k)} + \cdots + x_{lh+(l-1)k-1} \qquad u_l = x_{lh+(l-1)k} + \cdots + x_N .$$

Da $lh + (l-1)k \leqq N < (h+k)l$, folgt $\frac{1}{2} N^{1/2} \leqq l \leqq N^{1/2}$ für $N \geqq N_0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $C > 1$ voraus. Wir schreiben

$$S_N = Y_N + U_N = \sum_{i \leqq l} y_i + \sum_{i \leqq l} u_i .$$

Hilfssatz 1.1. $\sigma^2 = E x_0^2 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} E(x_0 x_s) = N^{-1} \int \Big(\sum_{n \leqq N} x_n \Big)^2 + 2\,\Theta\, L(1)\, C N^{-1} E x_0^2 .$

Beweis. $$N^{-1} \int \Big(\sum_{n \leqq N} x_n \Big)^2 = E x_0^2 + 2 \sum_{s \leqq N} E(x_0 x_s) - N^{-1} \sum_{s \leqq N} s\, E(x_0 x_s)$$
$$= E x_0^2 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} E(x_0 x_s) + 2\,\Theta\, L(1)\, C N^{-1} E x_0^2 ,$$

da wegen (1.1) und (1.2) $|E(x_0 x_s)| \leqq L(1) E x_0^2\, s^{-\psi(s)}$.

Hilfssatz 1.2. $$N^{-1} E\, Y_N^2 = \sigma^2 + 6\,\Theta\, L(1)\, C N^{-1/4} E x_0^2,$$
$$E y_1^2 = h\sigma^2 + 2\,\Theta\, L(1)\, C E x_0^2 .$$

Beweis. $$E\, Y_N^2 = \int \Big(\sum_{i \leqq l} y_i \Big)^2 = l E y_1^2 + \sum_{i \neq j} E(y_i y_j)$$
$$= l E y_1^2 + \Theta\, L(1)\, N^2 k^{-\psi(k)} E x_0^2 ,$$

da wegen (1.1) und (1.2) $|E(y_i y_j)| \leqq L(1) h^2 k^{-\psi(k)} E x_0^2$ für $i \neq j$. Ebenso erhalten wir wie in Hilfssatz 1.1

$$h^{-1} E y_1^2 = \sigma^2 + 2\,\Theta\, L(1)\, C h^{-1} E x_0^2 .$$

Daraus folgt

$$N^{-1} E\, Y_N^2 = \sigma^2 + 6\,\Theta\, L(1) C N^{-1/4} E x_0^2 ,$$

da wegen Hilfssatz 1.1

$$\sigma^2 \leqq 3 C L(1) E x_0^2 .$$

Hilfssatz 1.3. *Es gilt für ganzes $M \geqq 1$ und alle $p \geqq 1$ mit $\psi(M^{1/4}) \geqq 4(p+1)$ und $2p$ ganz*

$$\int \Big| \sum_{i \leqq M} x_i \Big|^{2p} \leqq L(2p)\,(10\, C M)^p (4p)!\, E_M^{2p} , \tag{1.3}$$

wo wir $\sup_{1 \leqq i \leqq M} E |x_i|^{2p} = E_M^{2p}$ *setzen.*

Für ganzes $2p$, $m \geqq 1$ ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\sum_{i \leqq m} p_i = 2p$ in ganzen Zahlen $p_i \geqq 1$ höchstens gleich 10^p, wie man leicht sieht, wenn man das Volumen des Tetraeders $\sum_{i \leqq m} p_i \leqq 2p$, $p_i \geqq 0$ berechnet. Wegen des polynomischen

Lehrsatzes genügt es daher, anstelle von (1.3) folgenden Hilfssatz zu beweisen.

Hilfssatz 1.4. *Es seien M, $2p \geqq 2$ ganz mit $\psi(M^{1/4}) \geqq 4(p+1)$. Dann gilt für alle ganzen $m \geqq 2$, $p_i \geqq 1$ $(1 \leqq i \leqq m)$ mit $\sum_{i \leqq m} p_i = 2p$*

$$\sum |E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_m}^{p_m})| \leqq L(2p)(CM)^p E_M^{2p}(2p)!\,, \tag{1.4}$$

wobei über alle $1 \leqq i_1 < \cdots < i_m \leqq M$ summiert wird.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $2p$. Für $2p = 2$ folgt die Richtigkeit von (1.4) aus Hilfssatz 1.1. Wir zerlegen nun die linke Seite von (1.4) in

$$\sum = \sum{}' + \sum{}'', \tag{1.5}$$

wobei in $\sum'$ über alle Terme von $\sum$ summiert wird, für die gilt $i_{j+1} - i_j \leqq M^{1/4}$ für alle $j = 1, \ldots, m-1$. Die Anzahl der Terme in $\sum'$ ist höchstens gleich $M \cdot M^{(1/4)(m-1)} \leqq M^p$. Aus der Hölderschen Ungleichung ergibt sich

$$E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_m}^{p_m}) \leqq E_M^{2p}, \tag{1.6}$$

Daraus folgt

$$\sum{}' \leqq E_M^{2p} M^p.$$

In $\sum''$ wird über die restlichen Terme summiert. Dabei gilt für mindestens ein j mit $1 \leqq j \leqq m-1$

$$i_{j+1} - i_j > M^{1/4}. \tag{1.7}$$

Wir fassen nun in $\sum_j''$ alle Terme aus $\sum''$ zusammen, für die (1.7) gilt. Daraus folgt wegen (1.7)

$$\begin{aligned}\sum{}'' &= \sum_{j=1}^{m-1} \sum{}_j'' |E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_m}^{p_m})| \leqq \\ &\leqq \sum_{j=1}^{m-1} \sum{}_j'' |E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_j}^{p_j})|\, |E(x_{i_{j+1}}^{p_{j+1}} \cdots x_{i_m}^{p_m})| + \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} \sum{}_j'' L(j-1)\, c(M^{1/4}) E_M^{2p}.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sum{}_j'' L(j-1)\, c(M^{1/4}) E_M^{2p} \leqq L(2p-1) E_M^{2p} M^{2p} \cdot c(M^{1/4}) \leqq L(2p-1) E_M^{2p} M^p.$$

Weiter gilt nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\sum{}_j'' |E(x_{i_1}^{p_1} \cdots x_{i_j}^{p_j})|\, |E(x_{j+1}^{p_{j+1}} \cdots x_{i_m}^{p_m})| &\leqq \\ \leqq L(p_1 + \cdots + p_j) L(p_{j+1} + \cdots + p_m) &\times \\ \times E_M^{2p}(p_1 + \cdots + p_j)!\,(p_{j+1} + \cdots + p_m)!\,(10\,CM)^p &\leqq \\ \leqq L(2p) E_M^{2p} (10\,CM)^p (2p-1)!\,,&\end{aligned}$$

außer wenn $j = p_1 = 1$ oder $j = m-1$, $p_m = 1$. In diesen beiden Fällen verschwinden aber sämtliche Terme von $\sum_j''$. Somit gilt

$$\sum{}'' \leqq L(2p) E_M^{2p} (10\,CM)^p (2p)!\,.$$

(1.4) folgt nun sofort aus (1.5) und den Abschätzungen für $\sum'$ und $\sum''$.

Hilfssatz 1.5. *Für alle ganzen p, $p_i \geqq 1$ mit $\sum\limits_{1 \leqq i \leqq t} p_i = 2p$ gilt*

$$|E(y_1^{p_1} \cdots y_t^{p_t}) - \prod_{i \leqq t} E(y_i^{p_i})| \leqq (h E_N)^{2p} k^{-\psi(k)} \sum_{j<t} L(p_j).$$

Beweis. Aus (1.2) folgt

$$E(y_1^{p_1} \cdots y_t^{p_t}) = E\left(\prod_{j \leqq t}\left(\sum_{r_j=0}^{h-1} x_{(i_j-1)(h+k)+r_j}\right)^{p_j}\right)$$
$$= \int \prod_{j \leqq t} \prod_{\nu \leqq p_j} \sum_{r_{11}=0}^{h-1} \cdots \sum_{r_{tp_t}}^{h-1} x_{(i_j-1)(h+k)+r_{j\nu}}$$
$$= \sum_{r_{11}=0}^{h-1} \cdots \sum_{r_{tp_t}=0}^{h-1} \left(\prod_{j \leqq t} \int \prod_{\nu \leqq p_j} x_{(i_j-1)(h+k)+r_{j\nu}} + \Theta \cdot E_N^{2p} k^{-\psi(k)} \sum_{j<t} L(p_j)\right)$$
$$= \prod_{j \leqq t} E(y_{i_j}^{p_j}) + \Theta (h E_N)^{2p} k^{-\psi(k)} \sum_{j<t} L(p_j).$$

Im folgenden bedeuten $c_1, c_2, \ldots$ stets beliebig kleine positive Konstanten.

Hilfssatz 1.6. *Es sei $1 \leqq p \leqq \frac{1}{32} \cdot \frac{\log N}{\log_2 N}$ mit $\psi(N^{1/16}) \geqq 4(p+1)$, dann gilt*

$$E\, Y_N^{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \sigma^{2p} + \Theta (C E_N)^{2p} \cdot L(2p) N^{p-(3/8)+c_1}, \tag{1.8}$$

$$|E\, Y_N^{2p+1}| \leqq (C E_N)^{2p+1} L(2p+1) N^{p+(3/8)+c_2}, \tag{1.9}$$

$$|E\, U_N^{2p}| \leqq (C E_N)^{2p} L(2p) N^{(3p/4)+(1/32)}. \tag{1.10}$$

Wir beweisen zuerst (1.8). Dazu entwickeln wir Y_N^{2p} nach dem polynomischen Lehrsatz und erhalten

$$\int \left(\sum_{i \leqq l} y_i\right)^{2p} = \left(\sum' + \sum'' + \sum'''\right) \frac{(2p)!}{p_1! \ldots p_l!} E(y_l^{p_1} \cdots y_l^{p_l})$$

dabei sind $p_i \geqq 0$ ganz und $\sum\limits_{i \leqq l} p_i = 2p$.

In $\sum'$ wird über alle Terme summiert mit $p_i = 0$ oder 2 $(1 \leqq i \leqq l)$, in $\sum''$ über alle Terme mit $p_i \neq 1$ $(1 \leqq i \leqq l)$, für die es mindestens ein j mit $p_j \neq 0$ oder 2 gibt. $\sum'''$ enthält die übrigen Glieder.

Wir schreiben $\sum'$ als

$$\sum' = \frac{(2p)!}{2^p} \sum E(y_{i_1}^2 \cdots y_{i_p}^2),$$

wobei über alle $1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq l$ summiert wird. Indem wir Hilfssatz 1.5 anwenden, erhalten wir

$$\sum' = \frac{(2p)!}{2^p} \binom{l}{p} \left((E y_1^2)^p + \Theta (h E_N)^{2p} p\, L(2) k^{-\psi(k)}\right).$$

Nun ist $\binom{l}{p} - \frac{l^p}{p!} \leqq \frac{l^{p-1}}{(p-2)!}$. Dies gibt unter Verwendung von Hilfssatz 1.2

$$\left|\sum' - \frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \sigma^{2p}\right| \leqq \frac{(2p)!\, l^p}{2^p p!} \left(\sigma^{2p} \frac{N^{p-(1/2)+c_4}}{l^p} + (h E_N)^{2p} p\, L(2) k^{-\psi(k)}\right) \leqq$$
$$\leqq (C E_N)^{2p} L(2p) N^{p-(1/2)+c_5}.$$

Wir betrachten nun einen Term in $\sum''$. Aus Hilfssatz 1.5 folgt

$$(1.11)\qquad |E(y_1^{p_1}\cdots y_l^{p_l})| \leqq \prod_{j\leqq l} |E(y_j^{p_j})| + (h E_N)^{2p}\cdot k^{-\varphi(k)} \sum_{j<l} L(p_j).$$

Bezeichnen wir mit r die Anzahl der Faktoren mit $p_i = 2$ und mit s die Anzahl jener mit $p_i \geqq 3$, dann gilt $3s + 2r \leqq 2p$. Da $s \geqq 1$, haben wir $r + s \leqq p - 1$. Daher enthält $\sum''$ höchstens l^{p-1} Terme. Also folgt aus Hilfssatz 1.3, angewendet auf die Prozesse $\langle x_{i+t}\rangle$ $(i \geqq 0)$ für gewisse t

$$|\textstyle\sum''| \leqq (10Ch)^p\cdot l^{p-1}(4p)! \displaystyle\prod_{j\leqq l} L(p_j) E_N^{2p} + E_N^{2p}\cdot N^{3p/2} k^{-\varphi(k)} \sum_{j<l} L(p_j) \leqq$$
$$\leqq (CE_N)^{2p} L(2p) N^{p-(3/8)+c_6}.$$

Nach Hilfssatz 1.5 erhält man für einen Term in $\sum'''$ auch die Abschätzung (1.11). Daraus folgt

$$(1.12)\qquad |E(y_1^{p_1}\cdots y_l^{p_l})| \leqq (hE_N)^{2p}\cdot L(2p) k^{-\varphi(k)}$$

da mindestens ein $p_i = 1$. Also gilt

$$|\textstyle\sum'''| \leqq E_N^{2p} N^{2p}\cdot k^{-\varphi(k)} L(2p) \leqq (CE_N)^{2p} L(2p) N^{p-1}.$$

Durch Addition der Abschätzungen von $\sum'$, $\sum''$, $\sum'''$ ergibt sich (1.8).

Um (1.9) zu beweisen, schreiben wir wieder

$$E\,Y_N^{2p+1} = \int\Big(\sum_{i\leqq l} y_i\Big)^{2p+1} = \big(\textstyle\sum' + \sum''\big) \dfrac{(2p+1)!}{p_1!\ldots p_l!} E(y_1^{p_1}\cdots y_l^{p_l})$$

mit $\sum p_i = 2p+1$. Dabei wird diesmal in $\sum'$ über alle Terme mit $p_i \neq 1$ $(1 \leqq i \leqq l)$ summiert, und in $\sum''$ über die restlichen.

Wir betrachten nun einen Term in $\sum'$. Wir bezeichnen mit r die Anzahl der Faktoren mit $p_i \geqq 2$. Dann gilt $2r \leqq 2p + 1$, also $r \leqq p$; es gibt daher höchstens l^p Terme in $\sum'$. Man kann nun wie in (1.11) schließen und erhält

$$|\textstyle\sum'| \leqq l^p((10CE_N h^{1/2})^{2p+1} L(2p+1) + E_N h)^{2p+1} L(2p+1) k^{-\varphi(k)})(4p)! \leqq$$
$$\leqq (CE_N)^{2p+1} L(2p+1) N^{p+(3/8)+c_7}.$$

Wie in (1.12) erhält man für einen Term in $\sum''$

$$|E(y_1^{p_1}\cdots y_l^{p_l})| \leqq (hE_N)^{2p+1} L(2p+1) k^{-\varphi(k)}.$$

Also ist

$$|\textstyle\sum''| \leqq (CE_N N)^{2p+1} k^{-\varphi(k)} L(2p+1) \leqq (CE_N)^{2p+1} L(2p+1) N^{p+(1/4)}.$$

Damit ist (1.9) bewiesen. Der Beweis von (1.10) verläuft genau so wie jener von (1.8). Man muß nur h mit k vertauschen. Also gilt

$$|E\,U_N^{2p}| \leqq p^p \sigma^{2p}(kl)^p + p^p(10CE_N)^{2p} L(2p) N^{(3p/4)-(1/2)+c_8} \leqq$$
$$\leqq (CE_N)^{2p} L(2p) N^{(3p/4)+(1/32)}.$$

Hilfssatz 1.7. *Es gilt für die p's aus Hilfssatz* 1.6

$$(1.13)\qquad E\,S_N^{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \sigma^{2p} + \Theta N^{p-(3/32)} (CE_N)^{2p} L(2p),$$

$$(1.14)\qquad |E\,S_N^{2p+1}| \leqq N^{p+(13/32)} (CE_N)^{2p+1} L(2p+1).$$

Beweis. $E S_N^{2p} = \int (Y_N + U_N)^{2p} = E Y_N^{2p} + \sum_{\nu=1}^{2p} \binom{2p}{\nu} E(Y^{2p-\nu} U_N^\nu)$.

Nach Hilfssatz 1.6 gilt für alle $\nu \geqq 1$

$$E(Y_N^{2p-\nu} U_N^\nu) \leqq (E(Y_N^{(2p-\nu)2}) E U_N^{2\nu})^{1/2} \leqq N^{p-(3/32)} (C E_N)^{2p} L(2p).$$

Daraus folgt

$$E S_N^{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} N^p \sigma^{2p} + \Theta N^{p-(3/32)} (C E_N)^{2p} L(2p) \sum_{\nu=1}^{2p} \binom{2p}{\nu}$$

und somit (1.13). Ebenso verläuft der Beweis von (1.14).

Wir setzen nun den Beweis von Satz 1 fort. Dazu betrachten wir die charakteristische Funktion von $\frac{S_N}{\sigma\sqrt{N}}$, also

$$\begin{aligned}
\varphi_N(t) &= \int \exp\left(\frac{S_N}{\sigma\sqrt{N}} i t\right) dP = \int \cos \frac{S_N}{\sigma\sqrt{N}} t + i \int \sin \frac{S_N}{\sigma\sqrt{N}} t \\
&= \sum_{p=0}^{Q-1} \frac{(-1)^p t^{2p}}{(2p)!} E\left(\frac{S_N^{2p}}{\sigma^{2p} N^p}\right) + \Theta \frac{t^{2Q}}{(2Q)!} \frac{E S_N^{2Q}}{\sigma^{2Q} N^Q} + \\
&\quad + i \sum_{p=0}^{Q-1} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{E S_N^{2p+1}}{\sigma^{2p+1} N^{p+1/2}} + \Theta \frac{t^{2Q+1}}{(2Q+1)!} \frac{E S_N^{2Q+1}}{\sigma^{2Q+1} N^{Q+1/2}} \\
&= e^{-t^2/2} + \Theta \frac{t^{2Q}}{2^Q Q!} + \Theta N^{-3/32} \sum_{p=0}^{Q-1} (C E_N t)^{2p} L(2p) + \\
&\quad + \Theta N^{-3/32} \sum_{p=0}^{Q-1} (C E_N t)^{2p+1} L(2p+1) + \\
&\quad + \Theta \frac{t^{2Q}}{2^Q Q!} + \Theta N^{-3/32} (C E_N t)^{2Q} L(2Q) + \\
&\quad + \Theta N^{-3/32} (C E_N t)^{2Q+1} L(2Q+1) \\
&= e^{-t^2/2} + 2\Theta \frac{t^{2Q}}{2^Q Q!} + \Theta N^{-3/32} \sum_{p=0}^{Q} (C E_N t)^{2p-1} L(2p-1) \quad \text{für} \quad t \geqq 0
\end{aligned}$$

und alle $1 \leqq Q \leqq \frac{1}{32} \frac{\log N}{\log_2 N}$ mit $\psi(N^{1/16}) \geqq 4(Q+1)$. Für $T \geqq 3$ ist dann

$$(1.13) \qquad \int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi_N(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt \leqq \frac{T^{2Q}}{2^Q Q!} + N^{-3/32} T^{2Q+1} (C E_N)^{2Q+1} L(2Q+1).$$

Wir wählen nun

$$Q \leqq \min\left(\frac{1}{32} \frac{\log N}{\log_2 N}, \; p_0\right) \quad \text{und} \quad T^2 = \frac{Q}{2},$$

wobei

$$p_0 = \sup p \quad \text{mit} \quad \psi(N^{1/16}) \geqq 4(p+1).$$

Dann wird

$$(1.13) \qquad \leqq \omega^Q + N^{-1/32} (C E_N)^{2Q+1} L(2Q+1) \quad \text{mit} \quad \omega > 1.$$

Nach einem Satz von ESSEEN [4, p. 197] erhalten wir

$$P\left\{\frac{S_N}{\sigma\sqrt{N}} < y\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2} dt + O((1/Q)^{1/2}) + O(N^{-1/16}(CE_N)^{2Q+1} L(2Q+1)).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Sind noch zusätzlich die Voraussetzungen des Korollars erfüllt, so folgt

$$\psi(N^{1/16}) \geqq N^{\delta/16} \geqq 4(Q+1) \quad \text{für} \quad N \geqq N_0(\delta).$$

Im Fall $L(x) = L = \text{const}$ setzen wir $Q = \frac{1}{64a} \frac{\log N}{\log_2 N}$ und erhalten

$$R_N = O\left(\left(\frac{\log_2 N}{\log N}\right)^{1/2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{16}\log N + \frac{1}{32}\frac{\log N}{\log_2 N}\log(CL) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{32}\log N\right) = O\left(\left(\frac{\log_2 N}{\log N}\right)^{1/2}\right).$$

Ist aber $L(x) = \exp(\alpha\beta^x)$ $(\beta > 1)$, so setzen wir $Q = \frac{1}{4}(\log\beta)^{-1}\log_2 N - \frac{1}{2}$ und erhalten

$$R_N = O(\beta^{1/2}\log_2^{-1/2} N) + \exp\left(-\frac{1}{16}\log N + \alpha e^{\frac{1}{4}\log_2 N} + c\log_2^2 N\right)$$
$$= O(\beta^{1/2}\log_2^{-1/2} N) + \exp\left(-\frac{1}{16}\log N + \alpha\log^{1/2} N\right).$$

2. Hilfssätze über Resttransformationen

In diesem Abschnitt beweisen wir einige Hilfssätze über die Transformation $Tx = x^{-1} \bmod 1$ und auch über Resttransformationen, die Roos [11] eingehend untersucht hat.

Die Transformation $Tx = x^{-1} \bmod 1$ des Einheitsintervalls auf sich besitzt ein eindeutig bestimmtes invariantes Maß (äquivalent zum Lebesgueschen Maß), das gegeben ist durch

$$|E| = \mu(E) = \frac{1}{\log 2}\int_E \frac{dx}{1+x},$$

$E \subset (0, 1]$ und L-meßbar. T ist stark mischend von beliebig hoher Ordnung [10]. Wir bezeichnen als Grundintervall m-ter Stufe die Menge

$$\{\alpha \,|\, a_1(\alpha) = r_1, \ldots, a_m(\alpha) = r_m\},$$

wobei die a_i die Teilnehmer der Kettenbruchentwicklung von α sind. Dann gilt [8].

Hilfssatz 2.1. *Ist I_m ein Grundintervall m-ter Stufe und F eine meßbare Menge, dann gilt für $n \geqq m$*

$$|I_m \cap T^{-n} F| = |I_m|\,|F|\,(1 + O(\varrho^{\sqrt{n-m}})).$$

Dabei sind $\varrho < 1$ und die Konstante in O „numerische Konstanten".

Es folgt sofort, daß dies auch für Vereinigungen von verschiedenen Grundintervallen m-ter Stufe gilt.

Roos folgend bezeichnen wir die Abbildung T von $[0, 1)$ auf sich Resttransformation vom Typ A, wenn

$$(2.1) \qquad Tx = \frac{x - c_j}{c_{j+1} - c_j}, \quad x \in [c_j, c_{j+1}),$$

wobei $\langle c_j \rangle$ entweder eine endliche Folge mit $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_R = 1$ oder eine unendliche Folge mit $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_j < \cdots 1$ und $\lim c_j = 1$ ist. T ist maßtreu bezüglich des Lebesgueschen Maßes und stark mischend von beliebig hoher Ordnung [10].

Schließlich betrachten wir noch Resttransformationen vom Typ B, die ebenfalls durch (2.1) definiert sind, nur gilt in diesem Fall für die endliche Folge $\langle c_j \rangle$ $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_{R-1} < 1 < c_R < 1 + c_{R-1}$. Auch hier gibt es ein eindeutig bestimmtes Maß μ, das äquivalent zum Lebesgueschen Maß ist und dessen Radon-Nikodym-Derivierte eine Treppenfunktion mit abzählbar vielen Sprüngen ist. *T ist stark mischend von beliebig hoher Ordnung.* Dies folgert man aus Hilfssatz 2.8 genauso wie in [8]. Im Spezialfall $Tx = \vartheta x \bmod 1$ ($\vartheta > 1$, nichtganz) stammt dieser Satz von Rohlin [10]. Bei den Transformationen der Typen A und B folgen wir der Bezeichnung von Roos [11]. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Transformation $Tx = x^{-1} \bmod 1$ als Typ C. Weiter bezeichnet $\mu(\cdot)$ oder $|\,.\,|$ stets das zu einem fest vorgegebenen T gehörige, eindeutig bestimmte invariante Maß. (Eine Verwechslung mit dem Absolutbetrag ist nicht zu befürchten.)

Wir zeigen nun für die Typen A und B Hilfssätze, die zu Hilfssatz 2.1 analog sind. Dazu benützen wir folgende Formel [11, p. 50]:

Es sei $n \geqq m$, dann gilt für Transformationen vom Typ A und B und für integrierbare Funktionen f

$$\int_0^t f(T^n x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_{k_\nu+1} \prod_{j=1}^{\nu} (c_{k_j+1} - c_{k_j}) \cdot \int_0^1 f(T^{n-\nu-1} x)\, dx + \tag{2.2}$$
$$+ \prod_{j=1}^{m} (c_{k_j+1} - c_{k_j}) \int_0^{r_m(t)} f(T^{n-m} x)\, dx .$$

Abweichend von Hilfssatz 2.1 bezeichnen wir jetzt $[t_1, t_2)$ als Grundintervall m-ter Stufe, wenn $r_m(t_1) = r_m(t_2) = 0$ und die ersten $m - 1$ Ziffern in der Ziffernentwicklung für jedes $x \in [t_1, t_2)$ konstant sind. Da das Lebesguesche Maß invariant bezüglich der Transformationen vom Typ A ist, folgt aus (2.2) sofort

Hilfssatz 2.2. *Ist T vom Typ* A *und I_m ein Grundintervall m-ter Stufe, so gilt für jede meßbare Menge $F \subset [0, 1)$ und $n \geqq m$*

$$|I_m \cap T^{-n} F| = |I_m|\,|F| .$$

Dies gilt auch für Vereinigungen I_m von verschiedenen Grundintervallen m-ter Stufe.

Eine ähnliche Aussage gilt für Transformationen vom Typ B.

Hilfssatz 2.3. *Ist T vom Typ* B *und I_m ein Grundintervall m-ter Stufe und I ein beliebiges Intervall $\subset [0, 1)$, so gilt für jede meßbare Menge $F \subset [0, 1)$ und $n \geqq m$*

$$\lambda(I_m \cap T^{-n} F) = \lambda(I_m)\,|F|\,(1 + O(\varrho^{n-m})) , \tag{2.3}$$

$$\lambda(I \cap T^{-n} F) = \lambda(I)\,|F| + |F|\, O(\varrho^n) . \tag{2.4}$$

Dabei bedeutet λ das Lebesguesche Maß, $\varrho < 1$ und die Konstante in O sind Konstanten, die nur von T abhängen.

Beim *Beweis* von (2.3) folgen wir GEL'FOND [3]. Wir setzen in (2.2) $m = n$ und $t = 1$. Dann ist im allgemeinen $r_n(1) \neq 0$. Wir bemerken, daß

$$\varrho_n = \prod_{j=1}^{n} (c_{k_j+1} - c_{k_j}) \leqq \varrho^{*n}, \tag{2.5}$$

wobei

$$\varrho^* = \max_{0 \leqq j \leqq R} (c_{j+1} - c_j) < 1,$$

$$\int_0^1 f(T^n x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \int_0^1 f(t^{n-\nu-1} x)\, dx + \varrho_n \int_0^{r_n(1)} f(x)\, dx$$

oder

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu A_{n-\nu-1} + B_n$$

mit sinngemäß interpretierten A_n, B_n, λ_n und

$$B_0 = A_0 = \int_0^1 f(x)\, dx, \quad \lambda_0 = 0, \quad \varrho_0 = 1, \quad A_{-1} = 0.$$

Setzen wir

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \quad U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n,$$

so gilt

$$F(z) = F(z)\, U(z) + W(z),$$

$$F(z) = \frac{W(z)}{1 - U(z)} = W(z) \left(\frac{1}{U'(1)} \cdot \frac{1}{1-z} + V(z) \right),$$

wobei $V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit $|b_n| \leqq N \bar{\varrho}^n$ [dies folgt aus (2.5)],

$$\varrho^* < \bar{\varrho} < 1 \quad \text{und} \quad M = \sup_{\zeta \in C} |1 - U(\zeta)|, \quad C = \{\zeta\colon\ |\zeta| = \bar{\varrho}^{-1}\}.$$

Wir setzen

$$W(z)\, V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

daher ist

$$|c_n| \leqq M\, n\, \bar{\varrho}^n \lambda(F) \leqq M_1 \varrho^n |F| \quad \text{mit} \quad \varrho^* < \bar{\varrho} < \varrho < 1.$$

Daraus folgt mit $\tau = U('(1)$

$$\tau A_n = \sum_{k=0}^{n} B_k + C_n,$$

$$\int_0^1 f(T^n x)\, dx = A_n = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} B_k + |F|\, O(\varrho^n) = |F|\, (1 + O(\varrho^n)), \tag{2.6}$$

da

$$|F| = \int_0^1 f(x)\, \sigma(x)\, dx \quad \text{mit} \quad \sigma(x) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n I_{[0, r_n)}(x),$$

$$\tau = U'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \lambda_n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \prod_{j=1}^{n} (c_{k_j+1} - c_{k_j}).$$

Es sei nun $I_m = [t_1, t_2)$ ein Grundintervall m-ter Stufe, d.h. $r_m(t_i) = 0$ $(i = 1, 2)$, dann folgt aus (2.2) und (2.6)

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} f(T^n x)\,dx &= \sum_{\nu=0}^{m-1} (\lambda_\nu(t_2) - \lambda_\nu(t_1)) \int_0^1 f(T^{n-\nu-1} x)\,dx\\ &= |F| \sum_{\nu=0}^{m-1} (\lambda_\nu(t_2) - \lambda_\nu(t_1))\,(1 + O(\varrho^{n-\nu}))\\ &= |F|\,(t_2 - t_1)(1 + O(\varrho^{n-m})).\end{aligned}$$

Damit ist (2.3) gezeigt. Es genügt, (2.4) für Intervalle $I = [0, t)$ zu zeigen. Wir erhalten aus (2.2) für $m = n$ und (2.6)

$$\begin{aligned}\int_0^t f(T^n x)\,dx &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu(t) \int_0^1 f(T^{n-\nu-1} x)\,dx + \varrho_n \int_0^{r_n(t)} f(x)\,dx\\ &= |F| \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu(t)\,(1 + O(\varrho^{n-\nu})) + |F|\,O(\varrho^n)\\ &= |F| \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu(t) + O(\varrho^n) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar{\varrho}^\nu\, O(\varrho^{n-\nu}) \right) + |F|\,O(\varrho^n)\\ &= |F|\,t + |F|\,O(\varrho^n).\end{aligned}$$

Hilfssatz 2.4. *Ist E_m eine Vereinigung von verschiedenen Grundintervallen m-ter Stufe, dann gilt für jede meßbare Menge $F \subset [0, 1)$ und T vom Typ* B

$$|E_m \cap T^{-n} F| = |E_m|\,|F|\,(1 + O(\varrho^{n-m})) + |F|\,O(\varrho^n),$$

wobei $\varrho < 1$ und die Konstante in O nur von T abhängen.

Beweis. Aus (2.3) folgt sofort

$$\lambda(E_m \cap T^{-n} F) = \lambda(E_m)\,|F|\,(1 + O(\varrho^{n-m})). \tag{2.7}$$

Es sei $\psi(x)$ die Indikatorfunktion von E_m, dann gilt

$$\begin{aligned}|E_m \cap T^{-n} F| &= \frac{1}{\tau} \int_0^1 \psi(x)\, f(T^n x) \sum_{\nu=0}^{\infty} I_{[0, r_\nu)}(x) \prod_{j=1}^{\nu} (c_{k_j+1} - c_{k_j})\\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\nu} (c_{k_j+1} - c_{k_j})\, \lambda(E_m \cap [0, r_\nu) \cap T^{-n} F).\end{aligned}$$

Da $E_m \cap [0, r_\nu)$ eine Vereinigung U_m^ν von Grundintervallen m-ter Stufe mit höchstens einem Intervall I_m^ν ist, dessen rechter Endpunkt vielleicht kein Grundpunkt m-ter Stufe ist, folgt aus (2.3) und (2.4)

$$\lambda(E_m \cap [0, r_\nu) \cap T^{-n} F) = \lambda(U_m^\nu)\,|F|\,(1 + O(\varrho^{n-m})) + \lambda(I_m^\nu)\,|F| + |F|\,O(\varrho^n).$$

Dies oben eingesetzt ergibt wegen $\lambda(I_m^\nu) = O(\varrho^m)$

$$\begin{aligned}|E_m \cap T^{-n} F| &= |F| \frac{1}{\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\nu} (c_{k_j+1} - c_{k_j})\, \lambda(E_m \cap [0, r_\nu)) +\\ &\quad + |F| \frac{1}{\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\nu} (c_{k_j+1} - c_{k_j})\, (\lambda(U_m^\nu) + \lambda(I_m^\nu))\, O(\varrho^{n-m}) +\\ &\quad + |F|\, O(\varrho^n) \frac{1}{\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\nu} (c_{k_j+1} - c_{k_j})\\ &= |F|\,|E_m| + |F|\,|E_m|\,O(\varrho^{n-m}) + |F|\,O(\varrho^n),\end{aligned}$$

da

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\nu} (c_{k_j+1} - c_{k_j}) = O(1).$$

Im allgemeinen ist $r_m(1) \neq 0$. Wir erweitern nun den Begriff des Grundintervalls m-ter Stufe etwas, indem wir als rechten Endpunkt eines solchen Intervalls den Punkt 1 zulassen. Anstelle von Hilfssatz 2.4 gilt dann folgender

Hilfssatz 2.5. *Ist E_m eine Vereinigung von verschiedenen Grundintervallen m-ter Stufe, dann gilt für jede meßbare Menge $F \subset [0, 1)$ und T vom Typ* B

$$|E_m \cap T^{-n} F| = |E_m|\,|F| + |F|\, O(\varrho^{n-m}).$$

Beweis. Enthält E_m kein Grundintervall mit Endpunkt 1, so ist die Aussage bereits in stärkerer Form in Hilfssatz 2.4 enthalten. Andernfalls ist $E_m = [0, 1) - F_m$, wo nun F_m kein Grundintervall mit Endpunkt 1 enthält. Daraus folgt nach Hilfssatz 2.4

$$\begin{aligned} |E_m \cap T^{-n} F| &= |T^{-n} F| - |F_m \cap T^{-n} F| \\ &= |F| - |F_m|\,|F| + |F|\, O(\varrho^{n-m}) \\ &= |E_m|\,|F| + |F|\, O(\varrho^{n-m}). \end{aligned}$$

Hilfssatz 2.6. *Es seien $I_0, \ldots, I_r$ Grundintervalle m-ter Stufe und $1 \leqq i_1 < \cdots < i_r$ ganz. Weiter sei $0 \leqq j \leqq r$ mit $i_{j+1} \geqq i_j + m$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &|I_0 \cap T^{-i_1} I_1 \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| \\ &\qquad = |I_0 \cap \cdots \cap T^{-i_j}|\, |T^{-i_{j+1}} I_{j+1} \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| + R_j, \end{aligned}$$

wobei im Fall A $\quad R_j = 0,$

im Fall B $\quad R_j = |T^{-i_{j+1}} I_{j+1} \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r|\, O(\varrho^{i_{j+1} - i_j - m}),$

im Fall C $\quad R_j = |I_0 \cap \cdots \cap T^{-i_j} I_j| \times$

$$\times\, |T^{-i_{j+1}} I_{j+1} \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r|\, O(\varrho^{(i_{j+1} - i_j - m)^{1/2}}).$$

Der *Beweis* ergibt sich sofort aus den Hilfssätzen 2.1, 2.2 und 2.5 und der Tatsache, daß $I_0 \cap T^{-i_1} I_1 \cap \cdots \cap T^{-i_j} I_j$ eine Vereinigung von verschiedenen Grundintervallen der Stufe $i_j + m$ ist.

Im folgenden beschränken wir uns im Fall B auf Transformationen T, für die es ein h mit $r_h(1) = 0$ gibt. Natürlich ist dann $r_m(1) = 0$ für $m \geqq h$ und $r_i(1) \geqq c > 0$ für $1 \leqq i < h$, wobei c nur von T abhängt, wenn man h minimal wählt. Wir bezeichnen diese Transformationen als Typ B*. Solche T gibt es für jedes $h \geqq 2$. Man setze bloß $Tx = \{\vartheta x\}$, wobei $1 < \vartheta < 2$ und $\vartheta^h - \vartheta - 1 = 0$. Die Transformationen vom Typ B* haben die Eigenschaft, daß die Grundintervalle der Stufe m nicht kleiner als ε^m sind, wobei $0 < \varepsilon < 1$ nur von T abhängt. Dies folgt aus der stückweisen Linearität von T und der Tatsache, daß $r_i(1) \geqq c > 0$ für $1 \leqq i < h$.

Hilfssatz 2.7. *Es seien I_k $(0 \leqq k \leqq r)$ Grundintervalle m-ter Stufe, T vom Typ* B* *und $1 \leqq i_1 < \cdots < i_r$ ganz. Dann gilt*

$$|I_0 \cap T^{-i_1} I_1 \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| \geqq \varepsilon^{m(A^r + A^{r-1} + \cdots + 1)},$$

wobei $\varepsilon < 1$ und $A \geqq 2$ nur von T abhängen.

Wir führen den *Beweis* durch Induktion nach r. Es ist nach Hilfssatz 2.6

$$|I_0 \cap T^{-i_1} I_1| = |I_1| (|I_0| + \Theta C_1 \varrho^{i_1 - m}),$$

wobei $C_1 \geqq \frac{1}{\varepsilon}$ die nur von T abhängige Konstante in O ist und $|\Theta| < 1$. Wir setzen

$$n_1 = A\, m \quad \text{mit} \quad A = \max\left(\frac{2\log\varepsilon - \log 2\, C_1}{\log\varrho}, \frac{\log\varepsilon - \log 2}{\log\varepsilon}\right);$$

dann gilt für $i_1 \geqq n_1$

$$C_1 \varrho^{i_1 - m} \leqq C_1 \exp(m \log(\varepsilon^2/2C_1)) \leqq \frac{\varepsilon^{2m}}{2}$$

und somit

$$|I_0 \cap T^{-i_1} I_1| \geqq |I_1| (|I_0| - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{2m}) \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon^{2m} \geqq \varepsilon^{m(A+1)}.$$

Ist aber $i_1 < n_1$, so ist $I_0 \cap T^{-i_1} I_1$ eine Vereinigung von Grundintervallen der Stufe $i_1 + m$ und somit

$$|I_0 \cap T^{-i_1} I_1| \geqq \varepsilon^{i_1 + m} \geqq \varepsilon^{m(A+1)}.$$

Wir nehmen nun an, daß der Hilfssatz für $1 \leqq k < r$ richtig ist. Wir setzen $n_j = m A^j$ $(1 \leqq j \leqq r)$. Ist für alle $0 \leqq j < r$ stets $i_{j+1} - i_j < n_{j+1}$, so ist $I_0 \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r$ eine Vereinigung von Grundintervallen der Stufe $i_r + m$. Nun ist aber $i_r < n_1 + \cdots + n_r = m(A^r + A^{r-1} + \cdots + A)$, also

$$|I_0 \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| \geqq \varepsilon^{m(A^r + A^{r-1} + \cdots + 1)}.$$

Andernfalls bezeichnen wir mit k die kleinste natürliche Zahl mit $i_{k+1} - i_k \geqq n_{k+1}$; dann gilt $k < r$ und

$$C_1 \varrho^{i_{k+1} - i_k - m} \leqq \tfrac{1}{2} \exp(m A^k \log\varepsilon) \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon^{mA^k}.$$

Dies in Hilfssatz 2.6 eingesetzt, ergibt wegen der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} &|I_0 \cap T^{-i_1} I_1 \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| \geqq \\ &\quad \geqq |I_{k+1} \cap \cdots \cap T^{-i_r + i_{k+1}} I_r| (|I_0 \cap \cdots \cap T^{-i_k} I_k| - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{mA^k}) \geqq \\ &\quad \geqq \varepsilon^{m(A^{r-k-1} + \cdots + 1)} \tfrac{1}{2} \varepsilon^{m(A^k + \cdots + 1)} \geqq \varepsilon^{m(A^r + A^{r-1} + \cdots + 1)}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses können wir Hilfssatz 2.6 etwas anders formulieren.

Hilfssatz 2.8. *Sind $I_0, \ldots, I_r$ Grundintervalle m-ter Stufe, $1 \leqq i_1 < \cdots < i_r$ ganz, $0 \leqq j \leqq r$ mit $i_{j+1} \geqq i_j + m$ dann gilt*

$$\begin{aligned} &|I_0 \cap T^{-i_1} I_1 \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| \\ &\quad = |I_0 \cap T^{-i_1} I_1 \cap \cdots \cap T^{-i_j} I_j| \, |T^{-i_{j+1}} I_{j+1} \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| \, (1 + R_j), \end{aligned}$$

wobei im Fall A $\quad R_j = 0,$

im Fall B* $\quad R^j = \varepsilon^{-mA^{j+1}} O(\varrho^{i_{j+1} - i_j}),$

im Fall C $\quad R_j = O(\varrho^{(i_{j+1} - i_j - m)^{\frac{1}{2}}}).$

Es sind dabei $\varepsilon < \varrho < 1$, $A > 2$ und die Konstante in O nur von T abhängige Konstanten.

Hilfssatz 2.9. *Es sei $g(u_1, \ldots, u_m)$ eine Funktion, die für alle m-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen definiert ist. Ist $x = [k_1(x), k_2(x), \ldots]$ die Ziffernentwick-*

lung von x, so definiert $g(k_1(x), \ldots, k_m(x)) = f(x)$ *eine Funktion auf dem Einheitsintervall, von der wir annehmen, daß sie für alle* $p \geqq 1$ *in* L_p *liegt und* $\mu(f) = 0$ *ist. Es gilt dann für alle ganzen* $r \geqq 1$; $1 \leqq i_1 < \cdots < i_r$; $p_i \geqq 1$ $(0 \leqq i \leqq r)$ *und* $0 \leqq j \leqq r$ *mit* $i_{j+1} - i_j \geqq m$

$$\begin{aligned}\int f^{p_0}(x) f^{p_1}(T^{i_1} x) \ldots f^{p_r}(T^{i_r} x) \\ &= \int f^{p_0}(x) \ldots f^{p_j}(T^{i_j} x) \cdot \int f^{p_{j+1}}(T^{i_{j+1}} x) \ldots f^{p_r}(T^{i_r} x) + \\ &+ R_j \int |f^{p_0} \ldots f^{p_j}(T^{i_j})| \cdot \int |f^{p_{j+1}}(T^{i_{j+1}}) \ldots f^{p_r}(T^{i_r})|,\end{aligned}$$

wobei im Fall A $R_j = 0$,

im Fall B* $R_j = \varepsilon^{-mA^{j+1}} O(\varrho^{i_{j+1}-i_j})$,

im Fall C $R_j = O(\varrho^{(i_{j+1}-i_j-m)^{\frac{1}{2}}})$.

Die Konstante in O *und* $\varrho < 1$ *hängen nur von* T *ab.*

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$I_j = I_j(k_1^{(j)}, \ldots, k_m^{(j)}) = \{x\colon k_1(x) = k_1^{(j)}, \ldots, k_m(x) = k_m^{(j)}\}.$$

Dann gilt wegen Hilfssatz 2.8

$$\begin{aligned}\int f^{p_0} \cdots f^{p_r}(T^{i_r}) &= \sum g^{p_0}(k_1^{(0)}, \ldots, k_m^{(0)}) \cdots g^{p_r}(k_1^{(r)}, \ldots, k_m^{(r)}) \times \\ &\times |I_0 \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| = \sum g^{p_0}(\;) \cdots g^{p_j}(\;) |I_0 \cap \cdots \cap T^{-i_j} I_j| \times \\ &\times \sum g^{p_{j+1}}(\;) \cdots g^{p_r}(\;) |T^{-i_{j+1}} I_{j+1} \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r| + \\ &+ R_j \sum |g^{p_0} \cdots g^{p_j}| \, |I_0 \cap \cdots \cap T^{-i_j} I_j| \times \\ &\times \sum |g^{p_{j+1}} \cdots g^{p_r}| \, |T^{-i_{j+1}} I_{j+1} \cap \cdots \cap T^{-i_r} I_r|,\end{aligned}$$

wobei R_j die Bedeutung von Hilfssatz 2.8 hat und die Summe über alle $(k_1^{(j)}, \ldots, k_m^{(j)})$ $(0 \leqq j \leqq r)$ erstreckt wird. Daraus folgt die Behauptung.

Korollar. *Gibt es eine Konstante* $a \geqq 1$, *so daß* $\|f\|_p \leqq p^a$ *für alle* $p \geqq 1$, *so gilt Satz 1 für den Prozeß* $f(T^i x)$ $(i \geqq 0)$ *mit folgenden Restgliedern* R_N:

In den Fällen A *und* C

$$R_N = O\left(\frac{\log_2 N}{\log N}\right)^{1/2} + O\left(\exp\left(-\frac{7}{128}\log N + \frac{1}{64}\frac{\log N}{\log_2 N}\log m\right)\right),$$

und im Fall B*

$$R_N = O(\log_2^{-1/2} N) + \exp\left(-\frac{1}{16}\log N + B m \log^{1/2} N\right)$$

wobei B *nur von* T *abhängt.*

Beweis. Ist $m \geqq i_{j+1} - i_j$, so können wir zwar Hilfssatz 2.9 nicht anwenden, doch folgt aus (1.6)

$$\left|\int f^{p_0} \cdots f^{p_r}\right| \leqq E|f|^{\Sigma p_\nu}.$$

Es gilt also (1.2) mit folgenden Beziehungen: $E_N^{2Q} \leqq (2Q)^{2Qa}$.

Im Fall A: $L(x) \equiv 1$, $c(s) = 1$ für $s \leqq m$ und $c(s) = 0$ für $s > m$.

Im Fall C: $L(x) \equiv 1$, $c(s) = 1$ für $s \leqq m$ und $c(s) \leqq \varkappa \varrho^{\sqrt{s-m}}$ für $s > m$ mit einer numerischen Konstanten $\varkappa$.

Es ist also in beiden Fällen $C = \sum s c(s) \leqq m^2 + m \frac{2\varkappa}{(1-\varrho)^2} + \frac{14\varkappa}{(1-\varrho)^4}$, da ja

$\sum s\varrho^{\sqrt{s}} \leqq \sum s^2(2s+1)\varrho^s \leqq \frac{14}{(1-\varrho)^4}$ wie man leicht sieht. Dies in Satz 1 eingesetzt mit $Q = \frac{1}{256a} \cdot \frac{\log N}{\log_2 N}$ ergibt die Behauptung. Der Fall B* folgt direkt aus dem Korollar zu Satz 1.

Bemerkung. Im Fall C findet sich dieses Resultat bereits bei DOEBLIN [1]. Allerdings läßt sich die Abhängigkeit der Konstante O von den einzelnen Parametern nicht erkennen.

3. Über die Verteilung von $N^{-1/2} \sum_{n \leqq N} f(T^n x)$

Es sei f eine Funktion, definiert auf dem Einheitsintervall. Wir definieren die Funktion $\varphi_k = \varphi_k(f)$ auf folgende Weise: Ist I_k ein Grundintervall k-ter Stufe, so setzen wir $\varphi_k(x)$ für $x \in I_k$ gleich dem Mittelwert von f auf I_k, also

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\mu(I_k)} \int_{I_k} f(t)\,d\mu(t) \quad \text{für alle} \quad x \in I_k.$$

Wir schreiben $\omega_k(f) = \|f - \varphi_k\|_2$.

Definition. $f \in K$, wenn es eine Konstante $a \geqq 1$ gibt mit $\|f\|_p \leqq p^a$ für alle $1 \leqq p < \infty$ und $\sum_k \omega_k(f) < \infty$.

Natürlich ist K keine absolute Klasse, sondern K hängt von der jeweiligen Transformation T ab, da ja die φ_k bereits von T abhängen.

Hilfssatz 3.1. *Für jedes T enthält die Klasse $K = K(T)$ die Funktionen von beschränkter Variation und die Funktionen aus* $\mathrm{Lip}\,\alpha\,(\alpha > 0)$ *($f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, wenn $|f(x) - f(y)| \leqq L|x-y|^\alpha$, $x, y \in [0,1]$, $L = \mathrm{const.}$)*

Beweis. Im ersten Fall genügt es zu zeigen, daß monoton wachsende nichtnegative Funktionen zu K gehören. Es ist

$$\begin{aligned}\omega_k^2(f) &= \int (f-\varphi_k)^2\,d\mu(x) = \sum_{I_k} \int_{I_k} (f^2 - 2f\varphi_k + \varphi_k^2),\\ &= \sum_{I_k} \left(\int_{I_k} f^2\,d\mu(x) - \left(\int_{I_k} f\,d\mu(x) \right)^2 \right) \leqq \\ &\leqq \sum_{I_k} \left(\max_{x \in I_k} f^2(x) - \min_{x \in I_k} f^2(x) \right) \mu(I_k) = O(\varrho^{2k})\end{aligned}$$

da ja $\mu(I_k) = O(\varrho^{2k})$, $\varrho < 1$.

Ist $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(\alpha > 0)$, so gilt mit $l(I_k)$ gleich Länge von I_k

$$\begin{aligned}\omega_k^2(f) &\leqq \sum_{I_k} \left(\max_{x \in I_k} f(x) - \min_{x \in I_k} f(x) \right)^2 \mu(I_k)\\ &\leqq \sum_{I_k} l(I_k)^{2\alpha} \mu(I_k) = O(\varrho^{2\alpha k})\end{aligned}$$

da auch $l(I_k) = O(\varrho^{2k})$ und $\sum \mu(I_k) = 1$.

Hilfssatz 3.2. *Es sei $f \in K$ mit $\mu(f) = 0$. Dann gibt es eine unendliche Folge $\langle s_i \rangle$ natürlicher Zahlen mit $s_i < s_{i+1}$ $(1 \leqq i < \infty)$, so daß für alle $N \geqq H s_i$ gilt*

$$N^{-1/2} \| \sum_{n \leqq N} (f(T^n) - \varphi_{s_i}(T^n) \|_2 < c s_i^{-1/2}. \tag{3.1}$$

Dabei hängen die Konstanten c und H nur von T ab.

Beweis. Aus $\sum \omega_k(f) < \infty$ und $\omega_k(f) \leqq \omega_{k-1}(f)$ folgt die Existenz einer unendlichen Folge $\langle s_i \rangle$ mit

$$\begin{cases} \omega_{s_i}(f) < s_i^{-1}, \\ \sum\limits_{k \geqq s_i} \omega_k^2(f) < s_i^{-1}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Wir setzen $h_i = f - \varphi_{s_i}$, dann ist $\mu(h_i) = 0$. Weiter gilt — wir lassen den Index i weg —

$$N^{-1} \int \Big(\sum_{n \leqq N} h(T^n) \Big)^2 \leqq \|h\|^2 + 2 \sum_{n \leqq N} \Big| \int h(T^n) h \Big| . \tag{3.3}$$

Wir halten nun n für einen Augenblick fest. Um $\int h(T^n) h$ abschätzen zu können, approximieren wir h durch $\varphi_m(h)$, wobei wir im Fall A und C $m = [n/2]$ setzen und im Fall B* $m = \left[\dfrac{n \log \varrho}{\log \varrho + A^2 \log \varepsilon}\right]$. Dann haben wir wegen $\mu(\varphi_m) = 0$

$$\begin{aligned} \Big| \int h(T^n) h \Big| &\leqq \Big| \int (h(T^n) - \varphi_m(T^n)) h \Big| + \Big| \int \varphi_m(T^n)(h - \varphi_m) \Big| + \\ &+ \Big| \int \varphi_m(T^n) \varphi_m - \mu^2(\varphi_m) \Big| \leqq \\ &\leqq \|h - \varphi_m\| (\|h\| + \|\varphi_m\|) + \|\varphi_m\|^2 O(\varrho^{\sqrt{m}}), \end{aligned}$$

wo nach Hilfssatz 2.9 die Konstante in O nur von T abhängt. Ist $m \geqq s$, so ist $\omega_m(h) = \|h - \varphi_m(h)\| = \|f - \varphi_m(f)\| = \omega_m(f)$, da $\varphi_s(f)$ auf den Grundintervallen m-ter Stufe konstant ist für $m \geqq s$. Ist aber $m < s$, so gilt $\|h - \varphi_m(h)\| = \|h - \varphi_s(h)\| = \|f - \varphi_s(f)\| = \omega_s(f)$, da $\varphi_s(h) \geqq 0$ und $\varphi_m(h) = \varphi_s(h)$ für $m < s$. Weiter gilt

$$\|h\| = \|f - \varphi_s(f)\| = \omega_s(f). \tag{3.4}$$

Daher folgt für $N \geqq \dfrac{\log \varrho + A^2 \log \varepsilon}{\log \varrho}$. $s = Hs$ aus (3.1) und (3.2)

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqq N} |h(T^n) h| &= \sum_{n < Hs} + \sum_{Hs \leqq n \leqq N} \leqq \\ &\leqq H s\, \omega_s(f)(\omega_s(f) + 2\omega_s(f)) + \sum_{n < Hs} (2\omega_s(f))^2 O(\varrho^{\sqrt{m}}) + \\ &+ \sum_{Hs \leqq n \leqq N} \Big(\omega_m(f)(\omega_s(f) + 2\omega_m(f)) + (\omega_s(f) + \omega_m(f))^2 O(\varrho^{\sqrt{m}}) \Big) \\ &= O(s^{-1}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit einer nur von T abhängigen Konstanten in O. Die Behauptung folgt nun aus (3.2), (3.3), (3.4) und (3.5).

Korollar. *Ist $f \in C$ mit $\mu(f) = 0$, dann existiert*

$$\sigma^2(f) = \sigma^2 = \lim_{N \to \infty} N^{-1} \Big\| \sum_{n \leqq N} f(T^n) \Big\|_2^2 .$$

Beweis. Dieser Grenzwert existiert für die Funktion φ_{s_i}, wie aus dem Korollar zu Hilfssatz 2.9 ersichtlich ist. Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Hilfssatz 3.2.

Satz 2. *Ist $f \in K$, dann gilt für fast alle x*

$$N^{-1} \sum_{n \leqq N} f(T^n x) = \mu(f) + O(N^{-1/2} \log^{3/2+\varepsilon} N), \quad \varepsilon > 0 .$$

Bemerkung. Dieser Satz wurde im Fall C von DE VROEDT [15] für eine etwas andere Klasse von Funktionen gezeigt. Da wir für den Beweis der Existenz von σ^2 nur die Eigenschaften zweiter Ordnung von f benötigen (Hilfssatz 1.1), ebenso wie in Hilfssatz 3.2, brauchen wir bloß $f \in L_2$ und $\sum \omega_k(f) < \infty$ verlangen.

Beweis. Aus dem Korollar folgt $\Big\| \sum_{n \leqq N} f(T^n) \Big\|^2 = O(N)$. Die Behauptung ergibt sich sofort aus Satz 6 (p. 649) von GÁL und KOKSMA [2].

Später benötigen wir noch folgenden einfachen

Hilfssatz 3.3. *Für alle s, $p \geqq 1$ gilt $\|\varphi_s\|_p \leqq \|f\|_p$, wobei $\varphi_s = \varphi_s(f)$ am Beginn von Kapitel 3 definiert wurde.*

Beweis. Es ist

$$\|f\|_p^p = \sum_{I_s} \int_{I_s} |f(x)|^p \, d\mu(x) ,$$

wobei über alle Grundintervalle s-ter Stufe summiert wird. φ_s ist auf I_s konstant $= c(I_s)$ mit

$$\varphi_s(x) = c(I_s) = \frac{1}{|I_s|} \int_{I_s} f(x) \, d\mu(x) .$$

Für die Richtigkeit des Hilfssatzes genügt es daher zu zeigen, daß für alle I_s

$$\int_{I_s} |f(x)|^p \geqq |c^p(I_s)| \, |I_s| . \tag{3.6}$$

Ist $c(I_s) = 0$ für ein I_s, ist nichts zu beweisen. Andernfalls setzen wir $g(x) = \dfrac{f(x)}{c(I_s)}$; dann ist $\dfrac{1}{|I_s|} \int_{I_s} g(x) = 1$. Nach einer bekannten Ungleichung gilt — man verwendet sie beim Beweis der Hölderschen Ungleichung —

$$|g(x)| \leqq \frac{1}{p} |g(x)|^p + 1 - \frac{1}{p}$$

für alle $x \in [0, 1]$ und somit

$$|I_s| \leqq \int_{I_s} |g(x)| \leqq \frac{1}{p} \int_{I_s} |g(x)|^p + |I_s| \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Daraus folgt sofort (3.6) und der Hilfssatz.

Hilfssatz 3.4 (s. [7]). *Es seien $F_i(y)$ $(i = 1, 2)$ die Verteilungsfunktionen von $f_i \in L_2$ $(i = 1, 2)$, d. h.*

$$F_i(y) = \mu(S_i(y)) = P\{x \colon f_i(x) < y\} .$$

Dann hat $\|f_1 - f_2\| < \varepsilon^2$ die Beziehung zur Folge

$$F_1(y - \varepsilon) - \varepsilon^2 < F_2(y) < F_1(y + \varepsilon) + \varepsilon^2 .$$

Beweis. Wir schreiben $E = \{x \colon |f_1(x) - f_2(x)| \geqq \varepsilon\}$. Dann gilt

$$\varepsilon^4 > \|f_1 - f_2\|^2 = \int |f_1 - f_2|^2 \geqq \varepsilon^2 \mu(E)$$

oder $\mu(E) < \varepsilon^2$ und daher — $\widetilde{E}$ bezeichnet das Komplement von E —

$$F_1(y) \leqq \mu(\widetilde{E} \cap S_1(y)) + \mu(E) < \mu(\widetilde{E} \cap S_1(y)) + \varepsilon^2 .$$

Doch aus $x \in \widetilde{E} \cap S_1(y)$ folgt $f_1(x) < y$ und $f_2(x) < f_1(x) + \varepsilon$. Daher gilt $x \in S_2(y+\varepsilon)$ und somit

$$F_1(y) < F_2(y+\varepsilon) + \varepsilon^2 .$$

Wir können nun folgenden Satz beweisen:

Satz 3. *Es sei $f \in K$ mit $\mu(f) = 0$. Dann existiert $\sigma^2(f)$ nach Korollar zu Hilfssatz* 3.2. *Ist $\sigma^2(f) \neq 0$, so gilt*

$$P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{n \leqq N} f(T^n x) < y\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\, dt + r_N ,$$

wobei in den Fällen A *und* C

$$r_N = (1+|y|)\, O\left(\left(\frac{\log_2 N}{\log N}\right)^{1/2}\right)$$

und im Fall B*

$$r_N = (1+|y|)\, O(\log_2^{-1/2} N) .$$

Die Konstanten in O hängen nur von T und f ab.

Beweis. Wir beweisen zuerst Satz 3 in den Fällen A und C. Nach Hilfssatz 3.2 gibt es stets ein $s_i \geqq (\log N/\log_2 N)^2$, das (3.1) befriedigt. Man überlegt sich aber leicht, daß man sogar

$$\left(\frac{\log N}{\log_2 N}\right)^2 \leqq s_i \leqq \log^2 N \tag{3.7}$$

wählen kann. Daraus und aus den Hilfssätzen 1.1 und 3.2 folgt

$$\sigma^2(f) - \sigma^2(\varphi_{s_i}) = O(s_i^{-1}) , \tag{3.8}$$

also $\sigma^2(\varphi_{s_i}) \neq 0$ für hinreichend großes N. Wegen Hilfssatz 3.3 können wir auf die φ_{s_i} Korollar zu Hilfssatz 2.9 anwenden und erhalten für die Verteilungsfunktion $\Phi_N^{(i)}(y)$ von $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \leqq N} \varphi_{s_i}(T^n)$

$$\Phi_N^{(i)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha_1(y)} e^{-t^2/2}\, dt + R_N ,$$

wobei $\alpha_1(y) = \frac{y}{\sigma^2(\varphi_{s_i})}$ ist und in R_N stets m durch s_i zu ersetzen ist. Von nun an lassen wir wieder den Index i weg. Wir setzen in Hilfssatz 3.4 $\varepsilon = c s^{-1/4}$ und erhalten für die Verteilungsfunktion $F_N(y)$ von $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \leqq N} f(T^n)$ aus (3.8)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha_2(y)} e^{-t^2/2}\, dt + R_N - c s^{-1/2} \leqq F_N(y),$$

wobei $\alpha_2(y) = \frac{y - c s^{-1/4}}{\sigma^2(f) + c s^{-1}}$ und c die Konstante in O bedeutet und nur von T

abhängt. Nun ist

$$\left| \int_{-\infty}^{\alpha_2(y)} e^{-t^2/2}\,dt - \int_{-\infty}^{\alpha_3(y)} e^{-t^2/2}\,dt \right| \leqq \frac{y}{\sigma^2} - \frac{y - c s^{-1/4}}{\sigma^2 + c s^{-1}} \leqq c\, s^{-1/4}\,\frac{\sigma^2 + |y|}{\sigma^4}$$

mit $\alpha_3(y) = \frac{y}{\sigma^2(f)}$.

Die Abschätzung von $F_N(y)$ nach oben ist analog. Daraus folgt

$$r_N = R_N + O(s^{-1/4}) = (|y| + 1)\, O\left(\left(\frac{\log_2 N}{\log N}\right)^{1/2}\right).$$

Im Fall B* ersetzen wir (3.7) durch $\log_2^2 N \leqq s_i \leqq \log_2^3 N$. Dann wird

$$\begin{aligned} r_N &= (|y| + 1)\, O(\log_2^{-1/2} N) + \exp\left(-\frac{1}{16}\log N + B \log_2^3 N \log^{1/2} N\right) \\ &= (|y| + 1)\, O(\log_2^{-1/2} N). \end{aligned}$$

Literatur

1. Doeblin, W.: Remarques sur la theorie metrique de fractions continues. Compositio Math. **7**, 353—371 (1940).
2. Gál, I. S., et J. F. Koksma: Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. Proc. Akad. Amsterdam **53**, 638—653 (1950).
3. Gel'fond, A. O.: Über eine allgemeine Eigenschaft von Zahlensystemen [Russisch]. Isvestija Akad. Nauk. **23**, 809—814 (1959).
4. Gnedenko, B. W., u. A. N. Kolmogorov: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Größen. Berlin: Akademie-Verlag 1959.
5. Ibragimov, I. A.: Einige Grenzverteilungssätze für stationäre Prozesse [Russisch]. Teorija Veroj. **7**, 361—392 (1962).
6. — Asymptotische Verteilung von Werten gewisser Summen [Russisch], S. 55—69. Westnik, Leningrad. Univ. 1960.
7. Kac, M.: On the distribution of values of sums of the type $f(2^k t)$. Annals of Mathematics **47**, 33—49 (1946).
8. Philipp, W.: Some metrical theorems in numbertheory. Pacific J. Mathematics **20**, 109—127 (1967).
9. Postnikov, A. G.: Ergodische Probleme in der Theorie der Kongruenzen und in der Theorie der Diophantischen Approximationen [Russisch]. Trudy Mat. Inst. Steklov. **82** (1966).
10. Rohlin, V. A.: Exact endomorphisms of a Lebesgue space. Izvest. Akad. Nauk. **25**, 499—530 (1961); AMS Translations, Ser. 2, **39**, 1—36 (1964).
11. Roos, P.: Iterierte Resttransformationen von Zahlendarstellungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **4**, 45—63 (1965).
12. Rosenblatt, M.: A central limit theorem and a mixing condition. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, 43—47 (1956).
13. —, and J. R. Blum: A class of stationary processes and a central limit theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, 412—413 (1956).
14. Stackelberg, O. P.: On the law of the iterated logarithm for continued fractions. Duke Math. J. **33**, 801—820 (1966).
15. de Vroedt, C.: Measure theoretical investigations concerning contined fractions. Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A, **65**, 583—591 (1962).

Mathematisches Institut der Universität
1010 Wien
Hanuschgasse 3

Ab 1. Sept. 1967:
Department of Mathematics
University of Illinois
Urbana, Illinois USA