Probab. Th. Rel. Fields 75, 291-316 (1987)

Probability Theory and Related Fields

Structure des cocycles markoviens sur l'espace de Fock

J.-L. Journé

Université de Strasbourg, Departement de Mathématique, 7 rue René Descartes, F-67 Strasbourg, France

Structure of Markov Cocycles on Fock Space

Summary. We show that strongly continuous unitary Markov cocycles on Fock space are solutions of a quantum stochastic Schrödinger equation and give their explicit form through a decomposition of Fock space on the eigenspaces of the number operator. We also give necessary and sufficient conditions for a generalized Hamiltonian to be the generator of such a cocycle. This generalizes the work of Hudson and Parthasarathy in the norm-continuous case.

Le Théorème de Stone affirme que l'équation de Schrödinger $dU_t = iU_t H dt$, $U_0 = I$, H auto-adjoint, permet de décrire tous les semi-groupes fortement continus d'opérateurs unitaires. Des familles d'opérateurs $(U_t)_{t>0}$ possédant une propriété de covariance par rapport au shift dans le temps et de localisation ont été introduites par Accardi dans [A], sous le nom de cocycle markovien, et exploitées dans [A-F-L] pour la construction de processus non-gaussiens. Notons que dans le cas de l'espace de Fock un cocycle markovien $(U_t)_{t>0}$ est associé par espérance conditionnelle à un semi-groupe $(P_t)_{t>0}$. Hudson et Parthasarathy ont développé un calcul stochastique d'opérateurs sur l'espace de Fock qui leur permet de construire des cocycles markoviens comme solutions de l'équation de Schrödinger stochastique

$$dU_t = U_t(dS_t + Z\,dt), \tag{0}$$

où Z est le générateur du semi-groupe $(P_t)_{t>0}$, supposé continu en norme, et dS_t est la différentielle d'un processus quantique stationnaire à accroissements indépendants [H-P]. Le processus $(S_t)_{t>0}$ est caractérisé par trois opérateurs bornés $\{L_1, L_2, W\}$, de sorte que (Z, L_1, L_2, W) est un hamiltonien genéralisé qui engendre $(U_t)_{t>0}$ par le biais de (0). Plus récemment Hudson et Lindsay on montré, dans le cas extremal universellement invariant, que les cocycles de

Markov unitaires associés à un semi-groupe continu en norme sont nécessairement solutions d'une équation de Schrödinger stochastique [H-L]. Ce résultat est un corollaire d'un théorème de représentation de martingales, qui n'a pas d'équivalent sur l'espace de Fock [J-M]. Il constitue une première étape dans l'extension du Théoreme de Stone au cadre des cocycles qu'ils considèrent.

Le Théorème de Stone pour les cocycles markoviens sur l'espace de Fock serait donc celui-ci: Tout cocycle unitaire $(U_t)_{t>0}$ fortement continu est solution d'une équation du type (0), où Z est le générateur de $(P_t)_{t>0}$ et $(S_t)_{t>0}$ est déterminé par trois opérateurs L_1, L_2, W, tels que Z, L_1, L_2, W verifient certaines relations. Réciproquement si ces relations sont satisfaites (Z, L_1, L_2, W) engendrent un cocycle markovien unitaire unique au moyen de (0).[1]

La première assertion est à nouveau liée à la représentation de certaines martingales d'opérateurs comme sommes d'intégrales stochastiques et nous l'avons démontrée. Egalement nous donnons des conditions nécessaires sur (Z, L_1, L_2, W) pour que ce soit le générateur d'un cocycle unitaire. Ces conditions sont suffisantes pour engendrer un cocycle mais le caractère unitaire n'est plus automatique, sauf dans des cas particuliers comme celui où Z est de la forme $iH+B$, où H est auto-adjoint et B borné négatif. Notons qu'en général lorsque Z n'est pas borné la méthode de résolution par itération appliquée dans [H-P] ne peut plus fonctionner et doit être remplacée par une résolution explicite utilisant la décomposition de l'espace de Fock sur les sous-espaces propres de l'opérateur de nombre.

En section 1 nous rappelons quelques définitions. Nous utilisons le langage du mouvement brownien. Insistons sur le fait qu'il ne s'agit que d'une commodité de langage et que les propriétés du mouvement brownien que nous utilisons sont celles qui permettent d'établir l'isomorphisme canonique entre l'espace de Fock et l'espace de Wiener. La section 2 consiste de préliminaires techniques. En section 3 nous montrons en quel sens un cocycle fortement continu $(U_t)_{t>0}$ possède un générateur (Z, L_1, L_2, W) et donnons un algorithme permettant de calculer $(U_t)_{t>0}$ à partir de son générateur. En section 4 nous donnons, la forme la plus générale possible pour le générateur d'un cocycle unitaire fortement continu. Signalons que la formule d'Ito quantique de [H-P] n'est plus applicable, même formellement, lorsque les formes quadratiques $u \to \operatorname{Re}\langle u, Zu\rangle$ et $u \to \operatorname{Re}\langle u, Z^* u\rangle$ ne sont pas fermables. En section 5 nous montrons que les générateurs décrits en section 4 engendrent effectivement des cocycles de Markov. Nous obtenons leur unitarité dans le cas où $Z=iH+B$ et, en section 6, dans le cas du semi-groupe des translations uniformes sur $L^2[0,1]$. Cet exemple, qui nous a été communiqué par H. Brezis est le plus simple pour lequel aucune des deux formes $u \to \operatorname{Re}\langle u, Zu\rangle$ et $u \to \operatorname{Re}\langle u, Z^* u\rangle$ n'est fermable. Enfin en section 7 nous montrons que les cocycles décrits en section 5 ne sont pas nécéssairement unitaires. Ceci exclut l'existence d'un Théorème de Stone stochastique simple sur l'espace de Fock.

Nous remercions H. Brezis pour nous avoir indiqué l'exemple de la section 6, P.A. Meyer pour ses explications orales et écrites sur le calcul de

[1] Nous avons reçu un travail de Hudson et Lindsay donnant une autre approche dans le cas continu en norme.

Hudson et Parthasarathy et les probabilités quantiques en général, [M], et L. Accardi pour son aide dans la présentation de ce travail.

I. Le mouvement brownien et les cocycles

Soit $(B_t)_{t>0}$ un mouvement brownien standard à une dimension, muni de sa filtration naturelle dûment complétée $(\mathscr{F}_t)_{t\geqq 0}$ et soit $(\mathscr{F}^t)_{t\geqq 0}$ la famille de tribus $(\sigma(B_{t'}-B_t), t'>t))_{t\geqq 0}$, également complétée. Pour toute tribu $\mathscr{G}$ complétée incluse dans $\mathscr{F}=\bigvee\limits_{t>0}(\mathscr{F}_t)$, $L^2(\mathscr{G})$ désigne l'espace des variables aléatoires de carré intégrable par rapport à la mesure de Wiener dW, et $\mathscr{G}$-mesurables. On notera E_t, E^s les espérances conditionelles par rapport à $\mathscr{F}_t$ et $\mathscr{F}^s$ respectivement.

Soit $\mathscr{H}_0$ un espace de Hilbert complexe séparable. L'espace $\mathscr{H}_0\otimes L^2(\mathscr{F})$ est l'espace des variables aléatoires de carré intégrable, à valeurs dans $\mathscr{H}_0$. Lorsque $u\in\mathscr{H}_0$ et $X\in L^2(\mathscr{F})$, nous noterons $u\otimes X$ simplement uX. Ainsi, lorsque $u\in\mathscr{H}_0$, u sera identifié à $u\otimes \mathfrak{k}$, où $\mathfrak{k}$ est la variable aléatoire constante égale à 1. Les notions de processus adapté, d'intégrale stochastique, etc., s'étendent trivialement au cas des processus à valeurs dans $\mathscr{H}_0$, de même que le théorème de représentation des martingales. Pour toute martingale $(M_t)_{t\geqq 0}$, on notera $(m_t)_{t\geqq 0}$ sa dérivée stochastique, c'est à dire le processus tel que, pour tout $t\geqq 0$, $M_t=M_0+\int_0^t m_s\,dB_s$. Une martingale $(M_t)_{t\geqq 0}$ est dite *étagée* si, pour un certain $k_0\geqq 0$ (appelé *l'entier* de la martingale) et tout $j\geqq 0$, $(m_s)_{s>0}$ est constant sur tout intervalle de la forme $\left[\frac{j}{2^{k_0}}, \frac{j+1}{2^{k_0}}\right[$ et si m_s est nul pour s suffisamment grand. Les martingales étagées sont denses dans $L^2(\mathscr{F})$.

Pour tout $t>0$ on définit l'opérateur de shift Γ_t de la façon suivante. Pour tout élément $M=\int\limits_{t_1<\ldots<t_m}\int f(t_1,\ldots,t_m)\,dB_{t_1}\ldots dB_{t_m}$ du m-ieme chaos de Wiener,

$$\Gamma_t M=\int\limits_{t_1<\ldots<t_m}\int f(t_1,\ldots,t_m)\,dB_{t+t_1}\ldots dB_{t+t_m}.$$

L'opérateur Γ_t est une isometrie sur $L^2(\mathscr{F})$, et on l'identifie à $I\otimes\Gamma_t$, agissant sur $\mathscr{H}_0\otimes L^2(\mathscr{F})$. Il permet de définir une transformation sur l'espace $\mathscr{B}(L^2(\mathscr{F}))$ de la façon suivante. Soit A un opérateur borné sur $L^2(\mathscr{F})$ et $M\in L^2(\mathscr{F}^t)$. Alors $\Gamma_t A\Gamma_t^* M\in L^2(\mathscr{F}^t)$. Comme $L^2(\mathscr{F})$ est isomorphe à $L^2(\mathscr{F}_t)\otimes L^2(\mathscr{F}^t)$, l'opérateur $\Gamma_t A\Gamma_t^*$ agissant sur $L^2(\mathscr{F}^t)$ peut-être identifié à $I_{[0,t]}\otimes\Gamma_t A\Gamma_t^*$. On le notera $\overline{\Gamma_t A\Gamma_t^*}$, pour le distinguer de $\Gamma_t A\Gamma_t^*$, considéré comme opérateur sur $L^2(\mathscr{F})$. On remarque que si A est unitaire, alors $\overline{\Gamma_t A\Gamma_t^*}$ est unitaire, alors que $\Gamma_t A\Gamma_t^*$ ne l'est pas.

Une famille $(U_t)_{t>0}$ d'opérateurs sur $\mathscr{H}_0\otimes L^2(dW)$ est adaptée si pour tout $t>0$, tout $X\in\mathscr{H}_0\otimes L^2(\mathscr{F}_t)$ et $Y\in L^2(\mathscr{F}^t)$, $U_t(X\otimes Y)=(U_tX)\otimes Y$. Nous rappelons maintenant la définition d'un cocycle de Markov. Dorénavant nous dirons: cocycle.

Définition 1. Une famille adaptée $(U_t)_{t>0}$ de contractions sur $\mathscr{H}_0 \otimes L^2(\mathscr{F})$ est un *cocycle* si pour tous $s>0$ et $t>0$,

$$U_{t+s} = U_t \overline{\Gamma_t U_s \Gamma_t^*}. \tag{1.1}$$

Pour tout $t>0$ on définit l'opérateur P_t sur $\mathscr{H}_0$ de la façon suivante. Pour tous u et $v \in \mathscr{H}_0$, $\langle u, P_t v\rangle = \langle u \otimes \mathbb{1}, U_t v \otimes \mathbb{1}\rangle$. Il est facile de voir que $(P_t)_{t>0}$ est un semi-groupe. On le supposera fortement continu et on notera Z son générateur. Il en découle que $(U_t)_{t>0}$ est également fortement continu.

Nous allons rappeler la notion de cocycle dual. Pour tout t le processus X^t défini par $X_x^t = -B_{t-x} + B_t$ pour $x \leqq t$ et $X_x^t = B_x$ pour $x \geqq t$ est un mouvement brownien standard. Comme $(X_x^t)_{x \geqq 0}$ engendre $\mathscr{F}$, il existe un opérateur unitaire $\mathscr{U}_t$ sur $L^2(dW)$, qui transforme les fonctions $f(B_{x_1}, B_{x_2}, \ldots, B_{x_n})$ en $f(X_{x_1}^t, X_{x_2}^t, \ldots, X_{x_n}^t)$ pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

Proposition 1. *Soit* $(U_t)_{t>0}$ *un cocycle. Alors* $(\mathscr{U}_t U_t^* \mathscr{U}_t^{-1})_{t>0}$ *est un cocycle, appelé le cocycle dual de* $(U_t)_{t>0}$.

La démonstration de cette proposition repose sur deux remarques:

1) Soit $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_0) \otimes \mathscr{B}(L^2(\mathscr{F}_s))$ et $Y = \overline{\Gamma_t X \Gamma_t^*}$. Alors $\overline{\mathscr{U}_s X \mathscr{U}_s^{-1} = \mathscr{U}_{t+s} Y \mathscr{U}_{t+s}^{-1}}$.

2) Soit $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_0) \otimes \mathscr{B}(L^2(\mathscr{F}_t))$, alors: $\mathscr{U}_{t+s} V \mathscr{U}_{t+s}^{-1} = \overline{\Gamma_s \mathscr{U}_t V \mathscr{U}_t^{-1} \Gamma_s^*}$. On en déduit, en utilisant (1.1)

$$\mathscr{U}_{t+s} U_{t+s}^* \mathscr{U}_{t+s}^{-1} = \mathscr{U}_s U_s^* \mathscr{U}_s^{-1} \overline{\Gamma_s \mathscr{U}_t U_t^* \mathscr{U}_t^{-1} \Gamma_s^*},$$

qui est la proprieté de cocycle. La proposition 1 est démontrée.

Comme la fonction $\mathbb{1}$ est invariante par $\mathscr{U}_t$, pour tout $t>0$, il est clair que le semi-groupe associé à $(\mathscr{U}_t U_t^* \mathscr{U}_t^{-1})_{t>0}$ est $(P_t^*)_{t>0}$.

Nous passons à la notion de générateur d'un cocycle. Soit $(U_t)_{t>0}$ un cocycle et Z le générateur du semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ associé. Soit $u \in \mathscr{D}(Z)$ et $v \in \mathscr{H}_0$. Alors $P_t u = E(U_t u)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{t}\langle v B_t, U_t u\rangle\right| &= \left|\frac{1}{t}\langle v B_t, (U_t - P_t) u\rangle\right| \\ &\leqq \|v\| \left(\frac{\|u\|^2 - \|P_t u\|^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq \sqrt{2}\, \|v\| (\|u\| + \|Z u\|). \end{aligned}$$

Soit $L_{2,t}$ l'opérateur défini de $\mathscr{D}(Z)$ dans $\mathscr{H}_0$ par $\langle v, L_{2,t} u\rangle = \frac{1}{t}\langle v B_t, U_t u\rangle$. D'après le calcul précédent les $L_{2,t}$ sont uniformément bornés. Nous verrons en section II qu'ils convergent faiblement vers une limite L_2. De même il existe un opérateur L_1 de domaine $\mathscr{D}(Z^*)$ tel que pour $v \in \mathscr{D}(Z^*)$ et $u \in \mathscr{H}_0$ $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\langle v, U_t u B_t\rangle = \langle L_1 v, u\rangle$.

Définition 2. Un cocycle $(U_t)_{t>0}$ est *régulier* s'il existe une contraction W sur $\mathscr{H}_0$, telle que pour u et $v \in \mathscr{H}_0$

$$\lim_{k \to \infty} 2^k \langle uB_{2^{-k}}, U_{2^{-k}} vB_{2^{-k}} \rangle = \langle u, Wv \rangle.$$

Soit $(U_t)_{t>0}$ un cocycle régulier. Le quadruplet (Z, L_1, L_2, W) est appelé le générateur de $(U_t)_{t>0}$. Il est clair que le cocycle dual de $(U_t)_{t>0}$ est également régulier et que son générateur est (Z^*, L_2, L_1, W^*).

La question de savoir si tout cocycle est régulier est ouverte. Nous verrons que la réponse est affirmative moyennant une hypothèse sur le semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ associé, que nous explicitons dans la prochaine section.

II. Les opérateurs L_1 et L_2

Nous allons rassembler quelques lemmes techniques. Dans cette section $(U_t)_{t>0}$ est un cocycle et Z est le générateur du semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ qui lui est associé.

Lemme 2.1. *Il existe un opérateur L_2 de domaine $\mathscr{D}(Z)$ tel que pour tout $u \in \mathscr{D}(Z)$ et $v \in \mathscr{H}_0$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle vB_t, U_t u \rangle = \langle v, L_2 u \rangle.$$

D'après le calcul précédant la définition 2, et comme $\mathscr{D}(Z)$ et $\mathscr{H}_0$ sont deux espaces de Hilbert séparables, on peut choisir une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 et un opérateur L_2 de domaine $\mathscr{D}(Z)$, tel que pour $u \in \mathscr{D}(Z)$ et $v \in \mathscr{H}_0$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{t_n} \langle vB_{t_n}, U_{t_n} u \rangle = \langle v, L_2 u \rangle$. Il suffit de montrer que L_2 ne dépend pas de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $(M_t)_{t>0}$ une martingale étagée d'entier k_0. Nous allons montrer que si $u \in \mathscr{D}(Z)$, la fonction $F: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ définie par $F(t) = \langle M_t, U_t u \rangle$, est lipschitzienne. Comme F est continue, il suffit d'évaluer $|\langle M_t, U_t u \rangle - \langle M_s, U_s u \rangle|$ lorsque $s < t$ et $[s, t] \subseteq [j2^{-k_0}, (j+1)2^{-k_0}]$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
&|\langle M_t, U_t u \rangle - \langle M_s, U_s u \rangle| \\
&\quad \leqq |\langle M_t - M_s, U_t u \rangle| + |\langle M_s, (U_t - U_s) u \rangle| \\
&\quad = |\langle m_s (B_t - B_s), U_t u \rangle| + |\langle M_s, (U_t - U_s) u \rangle| \\
&\quad = |\langle U_s^* m_s (B_t - B_s), \overline{\Gamma_s U_{t-s} \Gamma_s^* u} \rangle| + |\langle U_s^* M_s, (\overline{\Gamma_s U_{t-s} \Gamma_s^*} - I) u \rangle|.
\end{aligned}$$

Le second terme est égal à $|\langle U_s^* M_s, (P_{t-s} - I) u \rangle|$ et le premier, d'après le calcul qui précède la définition 2, est dominé par

$$\sqrt{2}(t-s) \| U_s^* m_s \| (\|u\| + \|Zu\|).$$

Donc F est lipschitzienne. La dérivée F' existe presque partout. Lorsqu'elle existe elle est égale à $\langle U_s^* m_s, L_2 u \rangle + \langle U_s^* M_s, Zu \rangle$. On en déduit que

$$\langle M_t, U_t u\rangle = \langle M_0, u\rangle + \int_0^t \langle m_s, U_s L_2 u\rangle\, ds + \int_0^t \langle M_s, U_s Z u\rangle\, ds,$$

pour tout $t>0$. Cela entraine

$$U_t u = u + \int_0^t U_s L_2 u\, dB_s + \int_0^t U_s Z u\, ds. \tag{2.1}$$

Il est clair que L_2 est uniquement déterminé par cette égalité et le lemme 2.1 est démontré. De l'identité (2.1), et de la forte continuité de $(U_s)_{s\geqq 0}$ on déduit

$$\begin{aligned} \|L_2 u\|^2 &\leqq \varliminf_{t\to 0} \frac{1}{t}(\|u\|^2 - \|P_t u\|^2) \\ &= -2\,\mathrm{Re}\langle u, Zu\rangle. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nous allons montrer que l'équation (2.1) permet de calculer explicitement la décomposition de $U_t u$ sur les chaos de Wiener pour tout $t>0$ et $u\in\mathscr{H}$.

Lemme 2.2. *Soit $(T_t)_{t>0}$ une famille faiblement mesurable d'opérateurs uniformément bornés. Si pour $u\in\mathscr{D}(Z)$ et $v\in\mathscr{H}_0$ et $t>0$,*

$$\langle v, T_t u\rangle = \int_0^t \langle v, T_s Z u\rangle\, ds,$$

alors $T_t=0$ pour tout $t>0$.

Pour vérifier ce lemme classique, on fixe t et on remarque que pour $u\in\mathscr{D}(Z)$, et $v\in\mathscr{H}_0$, la fonction $s\to\langle v, T_s P_{t-s} u\rangle$, définie sur $[0,t]$, est nulle en 0, dérivable et à dérivée nulle.

Ce lemme sera souvent employé avec un espace de Hilbert autre que $\mathscr{H}_0$, généralement de la forme $\mathscr{H}_0\otimes\mathscr{K}$, où $\mathscr{K}$ est un sous-espace de $L^2(\mathscr{F})$. Le contexte précisera alors quel est $\mathscr{K}$.

Dans le lemme qui suit $N\in\mathscr{D}(Z)\otimes L^2(\mathscr{F})$ et $N_t=E_t N$ pour tout $t>0$. De plus L_2 est identifié à $L_2\otimes I$.

Lemme 2.3. *Soit $(V_t)_{t>0}$ une famille adaptée d'opérateurs sur $\mathscr{H}_0\otimes L^2(\mathscr{F})$, faiblement mesurable et uniformément bornée. Pour tout $t>0$, on définit T_t sur $\mathscr{D}(Z)$ par $T_t N = \int_0^t V_s L_2 P_{t-s} N_s\, dB_s$. Alors $(T_t)_{t>0}$ est l'unique famille fortement continue uniformément bornée telle que pour tout $N\in\mathscr{D}(Z)$*

$$T_t N - \int_0^t T_s Z N\, ds = \int_0^t V_s L_2 N_s\, dB_s. \tag{2.3}$$

Remarquons que (2.2) entraine pour tout $s<t$

$$\begin{aligned} \|L_2 P_{t-s} N_s\|^2 &\leqq \|L_2 P_{t-s} N_t\|^2 \\ &\leqq \left(\frac{d}{dx}\,\|P_{t-x} N_t\|^2\right)_{x=s}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

On en déduit que $\|T_t N\|^2 \leqq (\sup_{s\leqq t} \|V_s\|^2)\,\|N_t\|^2$, de sorte que $(T_t)_{t>0}$ est uniformément bornée.

Prenons $N \in \mathscr{D}(Z^2)$. On peut échanger l'ordre des integrations dans $\int_0^t \left(\int_0^s V_x L_2 P_{s-x} Z N_x \, dB_x\right) ds$. En utilisant que $\int_x^t P_{s-x} Z \, ds = P_{t-x} - I$ on obtient (2.3). La forte continuité de $(T_t)_{t>0}$ résulte de (2.3) et l'unicité, du lemme 2.2. Le Lemme 2.3 est démontré.

Signalons une variante de ce lemme,

Lemme 2.4. *Soit $(V_t)_{t>0}$ une famille adaptée faiblement mesurable uniformément bornée et soit W un opérateur borné sur $\mathscr{H}_0$, identifié à son extension $W \otimes I$ sur $\mathscr{H}_0 \otimes L^2(\mathscr{F})$. Soit pour tout $t>0$ T_t l'opérateur borné défini par $T_t N = \int_0^t V_s W P_{t-s} n_s \, dB_s$. La famille $(T_t)_{t>0}$ est fortement continue et pour tout $N \in \mathscr{D}(Z)$*

$$T_t N - \int_0^t T_s Z n_s \, ds = \int_0^t V_s W n_s \, dB_s. \tag{2.5}$$

De plus $(T_t)_{t>0}$ est l'unique famille faiblement mesurable satisfaisant à (2.5).

La démonstration est semblable à la précédente et nous l'omettons.

Pour tout $n \geqq 0$ on note Π_n la projection de $L^2(\mathscr{F})$ sur le $n^{\text{ième}}$ chaos de Wiener, et on l'identifie à son extension $I \otimes \Pi_n$ sur $\mathscr{H}_0 \otimes L^2(\mathscr{F})$. Pour tous $m \geqq 0$ et $n \geqq 0$ on note $(U_t)_{m,n} = \Pi_m U_t \Pi_n$.

Lemme 2.5. *Les $(U_t)_{m,0}$ satisfont à la relation de récurrence suivante: pour $u \in \mathscr{D}(Z)$ et $m \geqq 1$*

$$(U_t)_{m,0}\, u = \int_0^t (U_s)_{m-1,0} L_2 P_{t-s} u \, dB_s. \tag{2.6}$$

Ce lemme découle de l'équation (2.1) projetée sur le $m^{\text{ième}}$ chaos, et du lemme 2.3. Comme $(U_t)_{0,0} = P_t$, on obtient l'expression de $(U_t)_{m,0}$ pour tout $m \geqq 0$. En particulier si $u \in \mathscr{D}(Z)$ et $v \in \mathscr{H}_0$,

$$\langle v B_t, U_t u\rangle = \int_0^t \langle v, P_s L_2 P_{t-s} u\rangle \, ds. \tag{2.7}$$

Par dualité on obtient l'existence d'un opérateur L_1 de domaine $\mathscr{D}(Z^*)$ tel que $\|L_1 v\|^2 \leqq -2 \operatorname{Re}\langle v, Z^* v\rangle$ et $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \langle v, U_t u B_t\rangle = \langle L_1 v, u\rangle$. De plus

$$\langle v, U_t u B_t\rangle = \int_0^t \langle P_{t-s}^* L_1 P_s^* v, u\rangle \, ds. \tag{2.8}$$

Nous poursuivons notre liste de lemmes préliminaires. Nous rencontrerons le problème suivant. Soit $(g_t)_{t>0}$ un processus adapté et soit $(N_t)_{t>0}$ une martingale étagée d'entier k_0. Pour $k > k_0$ on définit

$$G(k, g, N) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle g_{t_i}, \overline{\Gamma_{t_i} U_{2^{-k}} \Gamma_{t_i}^*}\, n_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\rangle$$

où $t_i = i2^{-k}$, et où la somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. On veut alors pouvoir prendre la limite de $G(k, g, N)$ lorsque $k \to +\infty$, pour tout N du type considéré. De plus on veut qu'il existe une variable aléatoire M_g dans $\mathscr{H}_0 \otimes L^2(\mathscr{F})$, telle que $\lim_{k \to +\infty} G(k, g, N) = \langle M_g, N\rangle$ pour tout N étagée. Une classe évidente de processus $(g_t)_{t>0}$ pour lesquels M_g existe est celle des processus continus par morceaux dans $\mathscr{D}(Z^*) \otimes L^2(\mathscr{F})$ et à support compact. Dans ce cas $G(k, g, N)$ s'écrit

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle L_1 P_{x-t_i}^* g_{t_i}, P_{t_{i+1}-x} n_{t_i}\rangle\, dx,$$

d'après (2.8). Donc M_g existe et vaut $\int_0^{+\infty} L_1 g_s \, dB_s$.

Nous allons introduire une notation. Soit $s > 0$ et $g_s \in \mathscr{D}(Z^*) \otimes L^2(\mathscr{F}_s)$. Par analogie avec (2.4) on voit que $\|L_1 P_{t-s}^* g_s\|^2 \leqq -\frac{d}{dt} \|P_{t-s}^* g_s\|^2$, d'où

$$\left\| \int_s^{+\infty} L_1 P_{t-s}^* g_s \, dB_t \right\| \leqq \|g_s\|.$$

L'opérateur qui à g_s associe $\int_s^{+\infty} L_1 P_{t-s}^* g_s \, dB_t$, a donc une extension bornée T sur $\mathscr{H}_0 \otimes L^2(\mathscr{F}_s)$. Il est clair que $E_s(T(g_s)) = 0$ et donc $T(g_s) = \int_s^{+\infty} h_t \, dB_t$ où $(h_t)_{t \geqq 0}$ est un processus adapté de carré intégrable. Nous noterons $(h_t)_{t>s} = (\{L_1 P_{t-s}^* g_s\})_{t>s}$. Avec cette notation $G(k, g, N)$ s'écrit

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \{L_1 P_{x-t_i}^* g_{t_i}\}, P_{t_{i+1}-x} n_{t_i}\rangle\, dx.$$

Définition 3. Soit $(g_s)_{s>0}$ un processus adapté tel que, pour k_0 suffisamment grand

$$\sup_{k \geqq k_0} \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\{L_1 P_{x-t_i}^* g_{t_i}\}\|^2 \, dx \right) < +\infty. \tag{2.9}$$

Le processus $(g_s)_{s>0}$ est un L_1-*processus* si

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \{L_1 P_{x-t_i}^* g_{t_i}\} \, dB_x \right)$$

existe au sens faible. Dans ce cas la limite est notée $M_g = \int_0^{+\infty} \{L_1 g_t\} \, dB_t$ et $\|M_g\|$ est la *norme* de g, notée $|||g|||$. Si la limite existe au sens fort $(g_s)_{s>0}$ est un L_1-*processus fort*.

On vérifie aisément que cette notation est cohérente avec la précédente. D'autre part si $(g_s)_{s>0}$ est un L_1-processus faible et N est étagée, alors

$\lim_{k\to+\infty} G(k,g,N)=\left\langle \int_0^{+\infty} \{L_1 g_t\}\, dB_t, N\right\rangle$. Le lemme suivant fournit une première classe de L_1-processus. Pour toute martingale $(M_u)_{u>0}$ et $t>0$ on définit $M^t = \int_0^t P^*_{t-s} m_s\, dB_s$ et on appelle X le processus $(M^t)_{t>0}$.

Lemme 2.6. *Pour toute martingale $(M_u)_{u>0}$, X est un L_1-processus fort. De plus $\|M_X\| \leqq \|M\|$.*

Dans le cas où $(m_s)_{s>0}$ est continu dans $\mathscr{D}(Z^*)$ et à support compact, $(X_t)_{t>0}$ est également continu dans $\mathscr{D}(Z^*)$ et de la forme $P^*_{t-x}\left(\int_0^x P^*_{x-s} m_s\, dB_s\right)$ pour un certain x fixe et $t \geqq x$. Il est alors clair que $(X_t)_{t>0}$ est un L_1-processus fort. Pour avoir le lemme dans le cas général, et l'inégalité $\|M_X\| \leqq \|M\|$, il suffit de montrer

$$\sup_{k\geqq 0} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\{L_1 P^*_{x-t_i} M^{t_i}\}\|^2\, dx\right) \leqq \|M\|^2,$$

ou encore

$$\sup_{k\geqq 0} \sum_{i\in\mathbb{N}} (\|M^{t_i}\|^2 - \|P^*_{2^{-k}} M^{t_i}\|^2) \leqq \|M\|^2. \tag{2.10}$$

Soit $i\in\mathbb{N}$. On a

$$\|M^{t_{i+1}}\|^2 = \|P^*_{2^{-k}} M^{t_i}\|^2 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|P^*_{t_{i+1}-x} m_x\|^2\, dx,$$

de sorte que

$$\|M^{t_i}\|^2 - \|P^*_{2^{-k}} M^{t_i}\|^2 \leqq \|M^{t_i}\|^2 - \|M^{t_{i+1}}\|^2 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|m_x\|^2\, dx.$$

Comme $M^0=0$, on en déduit (2.10) par sommation. Le lemme 2.6 est démontré.

Avant d'exhiber une seconde classe de L_1-processus indiquons comment apparaissent les processus du type $X=(M^t)_{t>0}$.

Lemme 2.7. *Soit $(M_t)_{t>0}$ une martingale. Alors $(M^t)_{t>0}$ est l'unique processus mesurable borné tel que pour tous $N\in\mathscr{D}(Z)$ et $t>0$,*

$$\langle M^t, N_t\rangle = \int_0^t \langle M^s, Z N_s\rangle\, ds + \langle M_t, N_t\rangle. \tag{2.11}$$

La démonstration de ce lemme est analogue, en plus simple, à celle du lemme 2.3 et nous l'omettons.

Nous allons maintenant décrire une autre classe de L_1-processus. Pour tout $t>0$ et $N\in\mathscr{D}(Z)$, on définit $S_t N = \int_0^t L_2 P_{t-s} N_s\, dB_s$. D'après (2.4) S_t a une extension sur $\mathscr{H}_0 \otimes L^2(\mathscr{F})$, telle que pour tout N, $\|S_t N\| \leqq \|N_t\|$. On considère alors pour tout M le processus $(S_t^* M)_{t>0}$.

Lemme 2.8. *Soit $(M_t)_{t>0}$ une martingale. Alors pour tout $h>0$ et $t>0$,*

$$\|S_t^* M\|^2 - \|P_h^* S_t^* M\|^2 \leqq 2(\|S_t^* M\|^2 - \|S_{t+h}^* M\|^2) + 6(\|M_{t+h}\|^2 - \|M_t\|^2). \tag{2.12}$$

Pour démontrer (2.12) on remarque que si $N \in \mathscr{D}(Z)$, $(S_t P_h - S_{t+h}) N = -\int_t^{t+h} L_2 P_{t+h-s} N_s dB_s$. On en déduit que $\|(S^*_{t+h} - P^*_h S^*_t) M\| \leqq \|M_{t+h} - M_t\|$. On écrit alors

$$\begin{aligned}\|S^*_t M\|^2 - \|P^*_h S^*_t M\|^2 &= \|S^*_t M\|^2 - \|S^*_{t+h} M\|^2 + \|(S^*_{t+h} - P^*_h S^*_t) M\|^2 \\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\,\langle P^*_h S^*_t M, (S^*_{t+h} - P^*_h S^*_t) M\rangle \\ &\leqq \|S^*_t M\|^2 - \|S^*_{t+h} M\|^2 + \|M_{t+h}\|^2 - \|M_t\|^2 \\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\,\langle (S_{t+h} - S_t P_h) P^*_h S^*_t M, M_{t+h} - M_t\rangle.\end{aligned}$$

D'aprés (2.4), pour tout $x \in \mathscr{H}_0 \otimes L^2(\mathscr{F}_t)$,

$$\|(S_{t+h} - S_t P_h) x\|^2 \leqq \|x\|^2 - \|P_h x\|^2.$$

Remarquons également que pour $y \in \mathscr{H}_0 \otimes L^2(\mathscr{F})$

$$\|P^*_h y\|^2 - \|P_h P^*_h y\|^2 \leqq \|y\|^2 - \|P^*_h y\|^2. \tag{2.13}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\|S^*_t M\|^2 - \|P^*_h S^*_t M\|^2 &\leqq \|S^*_t M\|^2 - \|S^*_{t+h} M\|^2 + \|M_{t+h}\|^2 - \|M_t\|^2 \\ &\quad + 2(\|S^*_t M\|^2 - \|P^*_h S^*_t M\|^2)^{\frac12} (\|M_{t+h}\|^2 - \|M_t\|^2)^{\frac12}\end{aligned}$$

en posant $x = P^*_h y = P^*_h S^*_t M$.

L'inégalité (2.12) en découle et le lemme 2.8 est démontré. On en déduit une inégalité analogue à (2.10).

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (\|S^*_{t_i} M\|^2 - \|P^*_{2^{-k}} S^*_{t_i} M\|^2) \leqq 6 \|M\|^2. \tag{2.14}$$

Pour conclure que $(S^*_t M)_{t>0}$ est un L_1-processus pour toute martingale $(M_t)_{t>0}$, il nous faut un argument de densité. Par exemple si L_2 est fermable, il est facile de voir que lorsque M est telle que sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathscr{D}(L^*_2)$, alors $(S^*_t M)_{t>0}$ est un L_1-processus fort. Le cas général en découle par densité grace à (2.14). Lorsque L_2 n'est pas fermable nous n'avons pas trouvé d'argument analogue. Nous allons donc avoir recours à des sous-suites. Si $\sigma = (\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite-croissante d'entiers on dira qu'un cocycle est *σ-régulier* s'il existe une contraction W_σ telle que pour tous $u \in \mathscr{H}_0$ et $v \in \mathscr{H}_0$, et en notant $\alpha_n = 2^{-\sigma_n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\alpha_n} \langle u B_{\alpha_n}, U_{\alpha_n} v B_{\alpha_n}\rangle = \langle u, W_\sigma v\rangle. \tag{2.15}$$

On définit de facon analogue les *σ-L_1-processus*. La martingale limite est alors notée $\int_0^{+\infty} \{L_1 g_t\}_\sigma dB_t$. Enfin une suite σ est *adaptée* à (Z, L_1, L_2) si pour toute martingale $(M_t)_{t>0}$, $(S^*_t M)_{t>0}$ est un σ-L_1-processus.

Lemme 2.9. *Tout triplet (Z, L_1, L_2) admet une suite adaptée σ.*

Ce lemme est une conséquence immédiate de (2.14).

Il est naturel de se demander si ce recours aux sous-suites est réellement nécéssaire. Nous verrons que si le cocycle $(U_t)_{t>0}$ est unitaire alors $\|L_1 u\|^2 = -2\,\mathrm{Re}\langle u, Z^* u\rangle$ pour $u \in \mathscr{D}(Z^*)$ et $\|L_2 u\|^2 = -2\,\mathrm{Re}\langle u, Zu\rangle$ pour $u \in \mathscr{D}(Z)$. De plus une suite σ est adaptée à (Z, L_1, L_2) si et seulement si pour tout $u \in \mathscr{D}(Z)$ et $v \in \mathscr{D}(Z^*)$ la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\langle u, \dfrac{P_{\alpha_n} - I}{\alpha_n} v \right\rangle$ existe, en notant $\alpha_n = 2^{-\sigma_n}$. En particulier cette condition ne dépend que de Z, ce qui est évident a priori puisque L_1 et L_2 sont déterminés à isométrie près par Z.

III. Représentation des cocycles

Nous avons vu qu'à tout cocycle $(U_t)_{t>0}$ on pouvait associer un semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ de générateur Z et deux opérateurs L_1 et L_2 de domaines $\mathscr{D}(Z^*)$ et $\mathscr{D}(Z)$ tels que pour $u \in \mathscr{D}(Z^*)$ et $v \in \mathscr{H}_0$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \langle u, U_t v B_t\rangle = \langle L_1 u, v\rangle$ et pour $u \in \mathscr{D}(Z)$ et $v \in \mathscr{H}_0$ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \langle v B_t, U_t u\rangle = \langle v, L_2 u\rangle$. On suppose que σ est adaptée à (Z, L_1, L_2).

Théorème 1. *Un cocycle associé à (Z, L_1, L_2) est σ-régulier. De plus il est déterminé par (Z, L_1, L_2, W_σ) et σ.*

Nous commencons, comme dans la démonstration du lemme 2.1, par choisir une sous-suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de σ, telle que les opérateurs W_{k_n} définis sur $\mathscr{H}_0$ par $\langle u, W_{k_n} v\rangle = 2^{k_n} \langle u B_{2^{-k_n}}, U_{2^{-k_n}} v B_{2^{-k_n}}\rangle$, convergent faiblement, lorsque $n \to +\infty$, vers une contraction W_σ. Pour montrer que $(U_t)_{t>0}$ est σ-régulier il suffit de montrer que W_σ ne dépend pas de la sous-suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci résultera de l'expression de $(U_t)_{1,1}$, en termes de $(P_t)_{t>0}$, L_1, L_2, W_σ et σ.

Nous allons montrer que $(U_t)_{t>0}$ satisfait à une équation qui, lorsque Z est borné, est équivalente à l'équation de Hudson-Parthasarathy [H-P].

Soient $(M_t)_{t>0}$ et $(N_t)_{t>0}$ deux martingales étagées d'entier k_0, avec $N \in \mathscr{D}(Z)$. Soit $k \geqq k_0$, $i \in \mathbb{N}$, $t_i = \dfrac{i}{2^k}$. On écrit

$$\langle M_{t_{i+1}}, U_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}}\rangle - \langle M_{t_i}, U_{t_i} N_{t_i}\rangle$$

sous la forme

$$\begin{aligned}&\langle M_{t_i}, (U_{t_{i+1}} - U_{t_i}) N_{t_i}\rangle + \langle (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}), U_{t_{i+1}} N_{t_i}\rangle \\ &\quad + \langle M_{t_i}, U_{t_{i+1}} (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\rangle + \langle (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}), U_{t_{i+1}} (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\rangle\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}&\langle U_{t_i}^* M_{t_i}, (\overline{\Gamma_{t_i} U_{2^{-k}} \Gamma_{t_i}^*} - I) N_{t_i}\rangle \\ &\quad + \langle U_{t_i}^* m_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \overline{\Gamma_{t_i} U_{2^{-k}} \Gamma_{t_i}^*} N_{t_i}\rangle \\ &\quad + \langle U_{t_i}^* M_{t_i}, \overline{\Gamma_{t_i} U_{2^{-k}} \Gamma_{t_i}^*} n_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\rangle \\ &\quad + \langle U_{t_i}^* m_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \overline{\Gamma_{t_i} U_{2^{-k}} \Gamma_{t_i}^*} n_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\rangle.\end{aligned}$$

Soit $T>0$ tel que $2^k T\in\mathbb{N}$. En sommant cette expression de $i=0$ à $i=2^k T-1$, on obtient $\langle M_T, U_T N_T\rangle - \langle M_0, N_0\rangle$ sous la forme $\Sigma_k^1+\Sigma_k^2+\Sigma_k^3+\Sigma_k^4$, où chaque Σ_k^j, $j\in\{1,2,3,4\}$ est une somme de $2^k T$ termes. Notons que les fonctions $t\to(U_t^* m_t)$ et $t\to(U_t^* M_t)$ sont continues par morceaux. Comme $N\in\mathscr{D}(Z)$ on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \Sigma_k^1=\int_0^T \langle M_s, U_s Z N_s\rangle\, ds,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \Sigma_k^2=\int_0^T \langle m_s, U_s L_2 N_s\rangle\, ds,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_{k_n}^4=\int_0^T \langle m_s, U_s W_\sigma n_s\rangle\, ds.$$

Le problème pour Σ_k^3 vient de ce que nous ne savons pas a priori que $(U_s^* M_s)_{s>0}$ est un σ-L_1-processus auquel cas nous aurions $\lim_{n\to+\infty} \Sigma_{k_n}^3 =\int_0^T \langle\{L_1 U_s^* M_s\}_\sigma, n_s\rangle\, ds$. En fait nous allons montrer par récurrence sur n que, pour tout n, $\Pi_n(U_s^* M_s)_{s>0}$ est un σ-L_1-processus.

Lemme 3.1. *Soient $m\geqq 0$ et $n\geqq 0$, $(M_t)_{t>0}$ une martingale du $m^{\text{ième}}$ chaos et $(N_t)_{t>0}\in\mathscr{D}(Z)$ une martingale du $n^{\text{ième}}$ chaos. Alors*

i) *$(U_s)_{m,n}^* M_s$ est un σ-L_1-processus de norme dominée par $\|M\|$.*

ii) *Si $m+n>0$, $(U_t)_{m,n}$ est la somme de trois opérateurs $(U_t^j)_{m,n}$, $j\in\{1,2,3\}$ où*

$$(U_t^1)_{m,n}^* M_t=\int_0^t P_{t-s}^*\{L_1(U_s)_{m,n-1}^* M_s\}_\sigma\, dB_s \tag{3.1}$$

$$(U_t^2)_{m,n} N_t=\int_0^t (U_s)_{m-1,n} L_2 P_{t-s} N_s\, dB_s \tag{3.2}$$

$$(U_t^3)_{m,n} N_t=\int_0^t (U_s)_{m-1,n-1} W_\sigma P_{t-s} n_s\, dB_s. \tag{3.3}$$

Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur m et n. Lorsque $m=n=0$, il n'y a que i) à vérifier et c'est trivial. Soient $m\geqq 0$, $n\geqq 0$ tels que $m+n>0$ et supposons le lemme vérifié pour $m'\leqq m$, $n'\leqq n$ et $m'+n'<m+n$. On remarque que le terme

$$\langle U_{t_i}^* M_{t_i}, \overline{\Gamma_{t_i} U_{2^{-k}} \Gamma_{t_i}^*}\, n_{t_i}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\rangle$$

qui apparait dans Σ_k^3, peut être réécrit

$$\langle (U_{t_i})_{m,n-1}^* M_{t_i}, \overline{\Gamma_{t_i} U_{2^{-k}} \Gamma_{t_i}^*}\, n_{t_i}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\rangle.$$

Par hypothèse de récurrence $(U_t)_{m,n-1}^* M_t$ est un σ-L_1-processus, ce qui entraine

$$\lim_{k_n\to+\infty} \Sigma_{k_n}^3=\int_0^T \langle\{L_1(U_s)_{m,n-1}^* M_s\}_\sigma, n_s\rangle\, ds.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\langle M_T, U_T N_T\rangle - \langle M_0, N_0\rangle \\
&\quad = \int_0^T \langle M_s, (U_s)_{m,n} Z N_s\rangle\, ds + \int_0^T \langle m_s, (U_s)_{m-1,n} L_2 N_s\rangle\, ds \\
&\quad + \int_0^T \langle \{L_1 (U_s)^*_{m,n-1} M_s\}_\sigma, n_s\rangle\, ds + \int_0^T \langle m_s, (U_s)_{m-1,n-1} W_\sigma n_s\rangle\, ds.
\end{aligned}$$

Cette égalité reste vraie par densité lorsque M et N ne sont pas étagées, et, par continuité, lorsque T est un nombre quelconque. En appliquant les lemmes 2.2, 2.3, 2.4 et 2.7 on obtient ii). Pour finir la démonstration du lemme 3.1, il faut encore montrer que pour $j \in \{1, 2, 3\}$, $(U_t^j)^*_{m,n} M_t$ est un σ-L_1-processus de norme dominée par $\|M\|$. Pour $j=1$ cela résulte du lemme 2.6, ainsi que pour $j=3$ car

$$(U_t^3)^*_{m,n} M_t = \int_0^t P^*_{t-s} W^*_\sigma (U^*_s)_{m-1,n-1} m_s\, dB_s.$$

Pour traiter le cas $j=2$ remarquons que

$$(U_t^2)^*_{m,n} M_t = \left(S^*_t \int_0^{+\infty} (U_s)^*_{m-1,n} m_s\, dB_s\right). \tag{3.4}$$

Comme l'espace des σ-L_1-processus est stable par Π_n, et comme σ est adaptée à (Z, L_1, L_2), $(U_t^2)^*_{m,n} M_t$ est un σ-L_1-processus de norme dominée par $\|M\|$. Le lemme 3.1 est démontré. On en déduit que W_σ est uniquement déterminé par $(U_t)_{t>0}$ et σ et donc $(U_t)_{t>0}$ est σ-régulier. Réciproquement $(U_t)_{t>0}$ est déterminé par Z, L_1, L_2 W_σ et σ au moyen de (3.1), (3.2) et (3.3). Le théorème 1 est démontré.

La démonstration du lemme 3.1 a la conséquence suivante. Soit $(P_t)_{t>0}$ un semi-groupe de contractions sur $\mathscr{H}_0$ de générateur Z, L_1 et L_2 deux opérateurs de domaines $\mathscr{D}(Z^*)$ et $\mathscr{D}(Z)$ respectivement tels que pour $u \in \mathscr{D}(Z^*)$ $\|L_1 u\|^2 \leqq -2\,\mathrm{Re}\langle u, Z^* u\rangle$ et pour $u \in \mathscr{D}(Z)$ $\|L_2 u\|^2 \leqq -\mathrm{Re}\langle u, Zu\rangle$. Soit σ une suite adaptée à (Z, L_1, L_2) et W_σ une contraction. Alors les formules (3.1), (3.2) et (3.3) permettent de définir par récurrence des familles $(U_t)_{m,n}$ d'opérateurs bornés, avec $(U_t)_{0,0} = P_t$. La question est alors de savoir quand la série double $\sum\limits_{m,n}\sum (U_t)_{m,n}$ converge faiblement pour tout t vers une contraction U_t de sorte que $(U_t)_{t>0}$ soit un cocycle. En d'autres termes on voudrait caractériser les générateurs (Z, L_1, L_2, W_σ) des cocycles. Dans cette direction nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Si pour tout $t>0$, $\sum\limits_m \sum\limits_n (U_t)_{m,n}$ converge faiblement vers une contraction U_t, alors $(U_t)_{t>0}$ est un cocycle.*

Comme dans le cas où Z est borné [H-P], [H-L], ce lemme résulte d'un argument d'unicité. Nous remarquons que les relations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) et les hypothèses du lemme permettent de demontrer par récurrence sur n que pour toute martingale $(M_t)_{t>0}$ et tout $n\geqq 0$, $(\Pi_n U_t^* M_t)_{t\geqq 0}$ est un σ-L_1-processus de norme dominée par $C_n\|M\|$. Soit $(N_t)_{t>0}$ une martingale du $n^{\text{ième}}$ chaos, dans $\mathscr{D}(Z)$. D'après (3.1), (3.2) et (3.3), on a pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned}&\langle M_t, U_t N_t\rangle - \langle M_0, P_t N_0\rangle\\ &\quad=\int_0^t \langle m_s, U_s L_2 P_{t-s} N_s\rangle\, ds + \int_0^t \langle m_s, U_s W_\sigma P_{t-s} n_s\rangle\, ds\\ &\qquad+\int_0^t \langle \{L_1 \Pi_{n-1} U_s^* M_s\}_\sigma, P_{t-s} n_s\rangle\, ds.\end{aligned}$$

D'après les lemmes 2.3, 2.4 et 2.7 cela entraine

$$\begin{aligned}(3.5)\qquad&\langle M_t, U_t N_t\rangle - \langle M_0, N_0\rangle\\ &\quad=\int_0^t \langle M_s, U_s Z N_s\rangle\, ds + \int_0^t \langle m_s, U_s L_2 N_s\rangle\, ds\\ &\qquad+\int_0^t \langle \{L_1 \Pi_{n-1} U_s^* M_s\}_\sigma, n_s\rangle\, ds + \int_0^t \langle m_s, U_s W_\sigma n_s\rangle\, ds.\end{aligned}$$

Fixons s. Il est facile de voir que

$$\langle M_t, U_t N_t\rangle - \langle M_s, U_s N_s\rangle \quad \text{et} \quad \langle M_t, U_s \overline{\Gamma_s U_{t-s} \Gamma_s^*}\, N_t\rangle - \langle M_s, U_s N_s\rangle$$

sont deux solutions d'une équation analogue à la précédente. La démonstration du lemme 3.1 entraine que ce type d'équation a une solution unique. Donc pour tout $s>0$ et $t>0$ et $t>s$ $U_t = U_s \overline{\Gamma_s U_{t-s} \Gamma_s^*}$.

Le lemme 3.2 est démontré.

IV. Conditions sur les générateurs des cocycles unitaires

Un cocycle $(U_t)_{t>0}$ est *unitaire* si pour tout $t\geqq 0$ U_t est unitaire.

Nous nous proposons de donner des conditions nécessaires sur (Z, L_1, L_2, W_σ) pour que ce soit le σ-générateur d'un cocycle unitaire, σ étant adaptée à (Z, L_1, L_2). Rappelons que dans le cas où Z est borné des conditions nécessaires et suffisantes ont été trouvées par Hudson et Parathasarathy [H-P]. Il faut et il suffit que W_σ soit unitaire, que pour tout $u\in\mathscr{H}_0$, $\|L_2 u\|^2 = -\langle u, Z + Z^* u\rangle$ et $L_1 = -W_\sigma^* L_2$. Nous verrons que dans le cas non borné W_σ n'est plus nécessairement unitaire.

Soit $(U_t)_{t>0}$ un cocycle unitaire et soit (Z, L_1, L_2, W_σ) son σ-générateur. D'après (2.1) il est nécessaire que pour $u\in\mathscr{D}(Z)$

$$(4.1)\qquad \|L_2 u\|^2 = -\left(\frac{d}{dt}\|P_t u\|^2\right)_{t=0} = -2\,\mathrm{Re}\langle u, Zu\rangle.$$

Par dualité il est nécessaire que pour $u\in\mathscr{D}(Z^*)$

$$(4.2)\qquad \|L_1 u\|^2 = -\left(\frac{d}{dt}\|P_t^* u\|^2\right)_{t=0} = -2\,\mathrm{Re}\langle u, Z^* u\rangle.$$

Nous supposons (4.1) et (4.2) satisfaits. Nous allons faire quelques remarques sur les suites adaptées.

Lemme 4.1. *Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on définit l'opérateur $L_{1,k}$ de domaine $\mathcal{D}(Z)$ par*

$$L_{1,k}u=L_1\left(2^k\int_0^{2^{-k}} P_x^*\,u\,dx\right).$$

Alors les $L_{1,k}$ sont uniformément bornés sur $\mathcal{D}(Z)$.

On remarque que $\|L_{1,k}u\|^2\leqq 2^k(\|u\|^2-\|P_{2^{-k}}^*u\|^2)$. On utilise l'identité suivante, valable pour tous $t>0$ et $u\in\mathcal{H}_0$:

$$\|u\|^2-\|P_t u\|^2+\|u-P_t u\|^2=\|u\|^2-\|P_t^*u\|^2+\|u-P_t^*u\|^2, \tag{4.3}$$

qui entraine clairement le lemme 4.1.

Lemme 4.2. *Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $l'\infty$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(4.4) *La suite L_{1,k_n} a une limite faible lorsque $n\to+\infty$.*

(4.5) *Pour tout $u\in\mathcal{D}(Z)$ et $v\in\mathcal{D}(Z^*)$.*

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{k_n}\langle v,(P_{2^{-k_n}}^*-I)\,u\rangle$$

existe.

En effet (4.4) est équivalent à

(4.6) Pour tout $v\in\mathcal{D}(Z^*)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle L_1 v, L_{1,k_n}u\rangle$ existe.

Or pour v et $w\in\mathcal{D}(Z^*)$, $\langle L_1 v, L_1 w\rangle=-\langle v, Z^*w\rangle-\langle Z^*v,w\rangle$. Donc

$$\langle L_1 v, L_{1,k_n}u\rangle=-\langle v, 2^{k_n}(P_{2^{-k_n}}^*-I)\,u\rangle-\left\langle Z^*v, 2^{k_n}\int_0^{2^{-k_n}} P_x^*\,u\,dx\right\rangle.$$

Il est donc clair que (4.4) et (4.5) sont équivalents. On définit également $L_{2,k}$ sur $\mathcal{D}(Z^*)$ par $L_{2,k}v=L_2\left(2^k\int_0^{2^{-k}}P_x\,u\,dx\right)$. Le calcul précédent montre que pour $u\in\mathcal{D}(Z)$ et $v\in\mathcal{D}(Z^*)$

$$\lim_{k\to+\infty}\{\langle L_2 u, L_{2,k}v\rangle-\langle L_{1,k}u, L_1 v\rangle\}=0. \tag{4.7}$$

En particulier si $\sigma=(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que L_{1,σ_n} converge faiblement lorsque $n\to+\infty$ vers une limite $L_{1,Z}^\sigma$ alors L_{2,σ_n} converge également vers une limite L_{2,Z^*}^σ. De plus d'après (4.1), (4.2) et (4.3) pour $u\in\mathcal{D}(Z)$ et $v\in\mathcal{D}(Z^*)$, $\|L_{1,Z}^\sigma u\|^2\leqq\|L_2 u\|^2$ et $\|L_{2,Z^*}^\sigma v\|^2\leqq\|L_1 u\|^2$. Il existe donc deux contractions C_σ et C'_σ respectivement définies de $\overline{\operatorname{Im} L_1}$ dans $\overline{\operatorname{Im} L_2}$ et de $\overline{\operatorname{Im} L_2}$ dans $\overline{\operatorname{Im} L_1}$ telles que pour $u\in\mathcal{D}(Z)$ et $v\in\mathcal{D}(Z^*)$, $L_{1,Z}^\sigma u=C'_\sigma L_2$ et $L_{2,Z^*}^\sigma v=C_\sigma L_1 v$. D'après (4.7), $\langle L_2 u, L_{2,Z^*}^\sigma v\rangle=\langle L_{1,Z}^\sigma u, L_1 v\rangle$, de sorte que $C'_\sigma=C_\sigma^*$.

Lemme 4.3. *Une suite σ est adaptée à (Z_1, L_1, L_2) si et seulement si elle satisfait aux conclusions du lemme 4.2.*

Remarquons que si $u \in \mathscr{D}(Z)$,

$$S_t^*(L_2 u B_t) = -\int_0^t P_s^* Z u\, ds - (P_t^* - I) u. \tag{4.8}$$

On en déduit que $(S_t^*(L_2 u B_t) - u)_{t>0}$ est un L_1-processus fort. Or le processus constant $(u)_{t>0}$ est un σ-L_1-processus si et seulement si σ satisfait aux conclusions du lemme (4.2). D'autre part on montre facilement par densité, linéarité et en utilisant le shift, que σ est adaptée si et seulement si pour tout $u \in \mathscr{D}(Z)$, $(S_t^*(L_2 u B_t))_{t>0}$ est un σ-L_1-processus. Le lemme 4.3 est démontré.

Nous allons maintenant donner la forme générale du générateur d'un cocycle unitaire.

Proposition 2. *Soit $(U_t)_{t>0}$ un cocycle unitaire, associé à (Z, L_1, L_2) et soit σ adaptée à (Z, L_1, L_2). Alors W_σ est de la forme $(-C_\sigma) \oplus D$, où D est un isomorphisme unitaire entre* $\operatorname{Im} L_2^\perp$ *et* $\operatorname{Im} L_1^\perp$ *indépendant de σ.*

Rappelons que C_σ a été défini avant le lemme 4.3. Pour démontrer cette proposition nous procédons comme dans [H-P], et utilisons (3.5). Soit n_0 un entier fixe. Nous avons vu que l'opérateur F_{t,n_0} qui à M associe $\int_0^t \{L_1(\sum_{n \leq n_0} \Pi_{n_0}) U_x^* M_x\}_\sigma dB_x$ est borné. On note F_{t,n_0}^* de la façon suivante: lorsque N est dans la somme des (n_0+1) premiers chaos,

$$F_{t,n_0}^* N = \int_0^t \} U_x L_1^* n_x \{_\sigma dx. \tag{4.9}$$

Insistons sur le fait que $\mathscr{D}(L_1^*)$ peut être réduit à $\{0\}$ et que l'integrant $\} U_x L_1^* n_x \{_\sigma$ n'a a priori aucun sens pour x fixé. Toutefois on peut manipuler les expressions apparaissant dans (4.3) comme des intégrales ordinaires. Avec cette notation (3.5) devient, pour $N \in \mathscr{D}(Z) \cap \sum_{n \leq n_0+1} \mathscr{H}_0 \otimes K_n$.

$$\begin{aligned} U_t N_t = N_0 &+ \int_0^t U_s Z N_s\, ds + \int_0^t U_s L_2 N_s\, dB_s \\ &+ \int_0^t U_s W n_s\, dB_s + \int_0^t \} U_s L_1^* n_s \{_\sigma ds. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Le processus $\left(\int_0^t \} U_s L_1^* n_s \{_\sigma ds\right)_{t>0}$ est à variation quadratique bornée pour tout N dans $\sum_{n \leq n_0+1} \mathscr{H}_0 \otimes K_n$. Si L_1 est fermable, $\mathscr{D}(L_1^*)$ est dense et lorsque $N \in \mathscr{D}(L_1^*)$ $\left(\int_0^t \} U_s L_1^* n_s \{ ds\right)_{t>0}$ est égal à $\left(\int_0^t U_s L_1^* n_s\, ds\right)_{t>0}$ qui a une variation quadratique nulle. Cela reste vrai par densité si $N \notin \mathscr{D}(L_1^*)$. Dans le cas où L_1 n'est pas fermable le processus $\left(\int_0^t \} U_s L_1^* n_s \{ ds\right)_{t>0}$ n'est en général pas à variation quadratique nulle. Par contre son crochet avec toute martingale est nul.

Soit T un nombre dyadique. Pour tout $k \in \{(\sigma_n), n \in \mathbb{N}\}$ tel que $2^k T$ soit entier et $i \leqq 2^k T$ on note $t_i = \frac{i}{2^k}$.

Lemme 4.4. *Pour toutes martingales M et N,*

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{i \leqq 2^k T - 1} \left\langle M_{t_{i+1}} - M_{t_i}, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \}U_s L_1^* n_s\{_\sigma \, ds \right\rangle \right) = 0. \tag{4.11}$$

Il est facile de se ramener au cas où $T=1$, $M = vB_1$ et $N = uB_1$. L'expression apparaissant dans (4.11) s'écrit alors

$$\sum_{i \leqq 2^k - 1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \{L_1 (U_s)_{1,0}^* u(B_s - B_{t_i})\}_\sigma, v \rangle \, dx,$$

ou encore

$$\sum_{i \leqq 2^k - 1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \left\{ L_1 S_s^* \left(\int_0^1 P_x^* \, u dB_s \right) \right\}_\sigma, v \right\rangle ds$$
$$- \sum_{i \leqq 2^k - 1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \left\{ L_1 P_{s-t_i}^* S_{t_i}^* \left(\int_0^1 P_x^* \, u dB_s \right) \right\}, v \right\rangle ds.$$

Cette expression tend vers 0 lorsque $k = \sigma_n$ et $n \to +\infty$. Le lemme 4.4 est démontré.

Soit k fixé et $N \in \mathscr{D}(Z)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ $t_i = \frac{i}{2^k}$. Nous écrivons (4.12)

$$\begin{aligned} &\| U_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} \|^2 - \| U_{t_i} N_{t_i} \|^2 \\ &\quad = \| U_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - U_{t_i} N_{t_i} \|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle U_{t_i} N_{t_i}, U_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - U_{t_i} N_{t_i} \rangle. \end{aligned}$$

On somme en i de 0 à $2^k - 1$ et on fait tendre k vers l'∞. D'après (4.10) et le lemme précédent, le terme quadratique donne quatre termes: les trois premiers sont

$$\int_0^1 \| L_2 N_s \|^2 \, ds + \int_0^1 \| W_\sigma n_s \|^2 \, ds + 2 \operatorname{Re} \int_0^1 \langle L_2 N_s, W_\sigma n_s \rangle \, ds.$$

Pour exprimer le quatrième terme nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 4.5. *Il existe un opérateur borné X_σ sur $\mathscr{H}_0$ et une soussuite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout nombre dyadique T et toute martingale N,*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i \leqq 2^{k_n} T - 1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \}U_s L_1^* n_s\{ \, ds \right\|^2 = \int_0^T \| X n_s \|^2 \, ds. \tag{4.13}$$

Pour démontrer le lemme il suffit de remarquer que les opérateurs $\tilde{X}_k$ définis sur $\mathscr{H}_0$ par

$$\langle u, \tilde{X}_k v \rangle = 2^k \left\langle \int_0^{2^{-k}} \}U_s L_1^* u\{ \, ds, \int_0^{2^{-k}} \}U_s L_1^* v\{ \, ds \right\rangle,$$

sont uniformément bornés. Soit $\hat{X}_\sigma$ une valeur d'adhérence des $\tilde{X}_k$, alors $\tilde{X}_\sigma$ est positif et il suffit de prendre $X_\sigma = \sqrt{\tilde{X}_\sigma}$. L'égalité (4.13) résulte d'un argument de densité à partir du cas où N est étagée.

Le terme $2\operatorname{Re}\langle U_{t_i} N_{t_i}, U_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - U_{t_i} N_{t_i}\rangle$ dans (4.12), donne deux termes: le premier est $2\operatorname{Re}\int_0^1 \langle N_s, ZN_s\rangle\, ds$. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite du lemme 4.5. Le deuxième terme s'exprime comme

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i<2^{k_n}} 2\operatorname{Re}\left\langle U_{t_i} N_{t_i}, \int_{t_i}^{t_{i+1}} \}U_s L_1^* n_s\{_\sigma\, ds\right\rangle,$$

on encore, lorsque N est étagée

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i<2^{k_n}} 2\operatorname{Re}\left\langle \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{L_1 P^*_{x-t_i} N_{t_i}\}\, dx, n_{t_i}\right\rangle.$$

Cette limite vaut simplement $2\operatorname{Re}\int_0^1 \langle L^\sigma_{1,Z} N_x, n_x\rangle\, dx$.

Nous avons obtenu

$$\begin{aligned}\|N_1\|^2 - \|N_0\|^2 = &\int_0^1 (\|L_2 N_s\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle N_s, ZN_s\rangle)\, ds\\ &+\int_0^1 (\|X_\sigma n_s\|^2 + \|W_\sigma n_s\|^2)\, ds\\ &+\int_0^1 2\operatorname{Re}\langle (L^\sigma_{1,Z} + W_\sigma^* L_2) N_s, n_s\rangle\, ds.\end{aligned}$$

Nous savons déjà que la première intégrale est nulle. On en déduit que pour $u\in\mathscr{H}_0$, $\|X_\sigma u\|^2 + \|W_\sigma u\|^2 = \|u\|^2$ et enfin que $L^\sigma_{1,Z} = -W_\sigma^* L_2$. Par dualité on voit que $L^\sigma_{2,Z^*} = -W_\sigma L_1$. Donc $W_\sigma|_{\overline{\operatorname{Im} L_1}} = -C_\sigma$ et $W_\sigma^*|_{\overline{\operatorname{Im} L_2}} = -C_\sigma^*$. Enfin $W_\sigma|_{\operatorname{Im} L_1^\perp}$ et $W_\sigma^*|_{\operatorname{Im} L_2^\perp}$ sont isométriques. Donc W_σ doit etre de la forme $(-C_\sigma)\oplus D$ comme annoncé. Le fait que D soit indépendant de σ est une conséquence de (3.1) (3.2) et (3.3). On peut en effet montrer que lorsque $u\in\operatorname{Im} L_1^\perp$ et $v\in\operatorname{Im}_2^\perp$, $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\langle vB_t, U_t^{(j)} uB_t\rangle = 0$ pour $j=1,2$ de sorte que $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\langle vB_t, U_t uB_t\rangle$ existe et vaut $\langle v, W_\sigma u\rangle$. La proposition 2 est démontrée.

On peut montrer que $((-C_\sigma)\oplus D)|_{\overline{\mathscr{D}(L_1^*)}}$ et $((-C_\sigma^*\oplus D)|_{\overline{\mathscr{D}(L_2^*)}}$ sont également isométriques et indépendants de σ. En particulier si les formes quadratiques $u\to\operatorname{Re}\langle u, Zu\rangle$ et $u\to\operatorname{Re}\langle u, Z^* u\rangle$ sont fermables, alors $\mathscr{D}(L_1^*)$ et $\mathscr{D}(L_2^*)$ sont denses et W_σ est unitaire et indépendant de σ.

V. Le problème réciproque

La proposition 2 donne, sous certaines hypothèses sur $(P_t)_{t>0}$, la forme la plus générale possible d'un générateur d'un cocycle unitaire associé à $(P_t)_{t>0}$. Le problème réciproque est alors de savoir parmi ces générateurs possibles, lesquels engendrent effectivement un cocycle unitaire. La réponse, dans le cas où Z est borné, donnée par Hudson et Parthasarathy [H-P] est rappelée en section 4. Nous allons généraliser leur résultat.

Théorème 2. *Soit $(P_t)_{t>0}$ un semi-groupe de contractions de générateur Z. Soit L_2 de domaine $\mathscr{D}(Z)$ et L_1 de domaine $\mathscr{D}(Z^*)$ tels que $\|L_2 u\|^2 = -2\operatorname{Re}\langle u, Zu\rangle$ et $\|L_1 v\|^2 = -2\operatorname{Re}\langle u, Z^* u\rangle$. Soit σ une suite adaptée à (Z, L_1, L_2). Si W_σ verifie la conclusion de la proposition 2, alors (Z, L_1, L_2, W_σ) σ-engendre un cocycle, déterminé par Z, L_1, L_2 et D.*

Théorème 3. *Soit $(P_t)_{t>0}$ un semigroupe tel que pour tout t, P_t a un inverse borné. Soient Z, L_1, L_2, σ, C_σ, D et W_σ comme dans le théorème 2. Alors (Z, L_1, L_2, W_σ) est le σ-générateur d'un cocycle unitaire.*

Remarquons que l'hypothèse du théorème est trivialement vérifée si les formes $u \to \operatorname{Re}\langle u, Zu\rangle$ et $u \to \operatorname{Re}\langle u, Z^* u\rangle$ sont bornées. Ceci correspond au cas où Z est de la forme $iH + B$, $\mathscr{H}$ étant auto-adjoint et B dissipatif borné.

Nous démontrerons le théorème 3 à la fin de la section.

Nous allons démontrer le théorème 2. D'après le lemme 3.2, pour démontrer que (Z, L_1, L_2, W_σ) est le σ-générateur d'un cocycle $(U_t)_{t>0}$, il suffit de vérifier que pour tous m et n, et tout $t>0$ $\sum\limits_{m' \leqq m} \sum\limits_{n' \leqq n} (U_t)_{m', n'}$ est une contraction, $((U_t)_{m,n})_{t>0}$ étant défini par les relations (3.1), (3.2) et (3.3). On notera

$$\sum_{m' \leqq m} \sum_{n' \leqq n} (U_t)_{m', n'} = (U_t)_{\bar{m}, \bar{n}}, \qquad \sum_{m' \leqq m} (U_t)_{m', n} = (U_t)_{\bar{m}, n}$$

et

$$\sum_{n' \leqq n} (U_t)_{m, n'} = (U_t)_{m, \bar{n}}.$$

Nous allons procéder par recurrence sur m et n et montrer l'identité, valable pour toute martingale M:

$$\|(U_t)^*_{\bar{m}, \bar{n}} M_t\|^2 = \|M_0\|^2 + \int_0^t \|(U_s)^*_{\overline{m-1}, \bar{n}} m_s\|^2 \, ds - \mathscr{R}(t), \tag{5.1}$$

où $\mathscr{R}(t)$ est égal à

$$\int_0^t \|\{L_1 (U_s)^*_{\bar{m}, n} M_s\}_\sigma + W^*_\sigma (U_s)^*_{\overline{m-1}, n} m_s\|^2 \, ds. \tag{5.2}$$

Cela montrera que pour tous m et n, $(U_t)_{\bar{m}, \bar{n}}$ est une contraction. Nous aurons besoin de deux lemmes préliminaires.

Lemme 5.1. *Soit $(V_s)_{s>0}$ un L_1-processus fort. Alors*

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ k \in \sigma}} \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{L_2 P_{t_{i+1}-s} P^*_{2^{-k}} V_{t_i}\} \, dB_s = -W_\sigma \int_0^{+\infty} \{L_1 V_s\} \, dB_s, \tag{5.3}$$

au sens faible.

Pour démontrer ce lemme on remarque que pour un L_1-processus fort la norme $|||V|||$ est donnée par $\varliminf\limits_{k \to +\infty} (\sum\limits_i \|V_{t_i}\|^2 - \|P^*_{2^{-k}} V_{t_i}\|^2)^{\frac{1}{2}}$. D'après (2.13), l'égalité (5.3) sera vraie si et seulement si elle est vraie pour un ensemble dense de L_1-processus. Nous prendrons comme classe dense les processus du type suivant:

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{k_0} T \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \leqq 2^{k_0} T - 1$ soit $a_i \in \mathscr{D}(Z^*) \otimes L^2(\mathscr{F}_{i 2^{-k_0}})$. Soit enfin $(W_y)_{y \geqq 0}$ le processus défini de la façon suivante: pour $y \in [i 2^{-k_0}, (i+1) 2^{-k_0}[$, $W_y = P^*_{y - i 2^{-k_0}} a_i$ et $W_y = 0$ pour $y \geqq T$. Pour un tel processus (5.4) résulte de $L_{2, Z^*} = -W_\sigma L_1$. Enfin la densité de ces processus lorsque k_0, T et $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ varient, est une conséquence de la densité de $\mathscr{D}(Z^*)$, et de la définition des L_1-processus forts.

Lemme 5.2. *Pour toute martingale* $(M_t)_{t>0}$,

$$\|S_t^* M_t\|^2 + \int_0^t \|\{L_1 S_s^* M_s\}_\sigma + W_\sigma^* m_s\|^2 \, ds = \|M_t\|^2 - \|M_0\|^2. \tag{5.4}$$

Dans le cas où $(M_t)_{t>0}$ est à valeurs dans $\operatorname{Im} L_2^\perp$, (5.4) est évident car $S_t^* M_t = 0$ pour tout t et $\|W_\sigma^* m_s\|^2 = \|m_s\|^2$ pour tout s. Comme lorsque $u \in \operatorname{Im} L_2^\perp$ et $v \in \overline{\operatorname{Im} L_2}$, $\langle W_\sigma^* u, W_\sigma^* v\rangle = 0$, il suffit d'étudier le cas où $(M_t)_{t>0}$ est à valeurs dans $\overline{\operatorname{Im} L_2}$. Par densité on peut supposer que $(M_t)_{t>0} = (L_2 N_t)_{t>0}$ où $(N_t)_{t>0}$ est une martingale de $\mathscr{D}(Z)$, étagée d'entier k_0.

Soit T un nombre dyadique et $k \geqq k_0$ tel que $2^k T$ soit entier. En utilisant une variante de (4.8) on voit que $(S_t^* L_2 N_t - n_t)_{t>0}$ est un L_1-processus fort. De plus $\{L_1(S_t^* L_2 N_t - n_t)\}_{t>0} = (\{L_1(S_t^* L_2 N_t)\}_\sigma + W_\sigma^* L_2 n_t)_{t>0}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} (5.5) \quad & \int_0^T \|\{L_1 S_s^* M_s\}_\sigma + W_\sigma^* m_s\|^2 \, ds \\ & = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i \leqq 2^k T - 1} (\|S_{t_i}^* L_2 N_{t_i} - n_{t_i}\|^2 - \|P_{2^{-k}}^* (S_{t_i}^* L_2 N_{t_i} - n_{t_i})\|^2). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\|S_T^* M_T\|^2 = \sum_{i \leqq 2^k T - 1} (\|S_{t_{i+1}}^* M_{t_{i+1}}\|^2 - \|S_{t_i}^* M_{t_i}\|^2).$$

On écrit

$$S_{t_{i+1}}^* M_{t_{i+1}} = P_{2^{-k}}^* S_{t_i}^* M_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \}P_{t_{i+1}-s}^* L_2^*(L_2 n_{t_i})\{ \, ds.$$

Il suffit maintenant de développer tous les carrés et, après quelques simplifications, on voit que (5.4) se ramène à vérifier que pour $u \in \mathscr{D}(Z)$

$$\lim_{k \to \infty} 2^k \left(\|u\|^2 - \|P_{2^{-k}}^* u\|^2 + \left\| \int_0^{2^{-k}} \}P_x^* L_2^*(L_2 u)\{ \, dx \right\|^2 \right) = \|L_2 u\|^2,$$

ce qui résulte de (4.3) et de $\lim\limits_{k \to +\infty} 2^k(\|u\|^2 - \|P_{2^{-k}} u\|^2) = \|L_2 u\|^2$. Le lemme 5.2 est démontré.

Indiquons maintenant comment (5.1) peut être prouvé. Par continuité il suffit de le montrer lorsque $t = T$ est un nombre dyadique. Soit k tel que $2^k T$ soit entier. On écrit

$$\|(U_T)_{\bar{m}, \bar{n}}^* M_T\|^2 = \|M_0\|^2 + \sum_{i \leqq 2^k T - 1} \{\|(U_{t_{i+1}})_{\bar{m}, \bar{n}}^* M_{t_{i+1}}\|^2 - \|(U_{t_i})_{\bar{m}, \bar{n}}^* M_{t_i}\|^2\},$$

puis

$$(U_{t_{i+1}})^*_{\bar{m},\bar{n}} M_{t_{i+1}} = P^*_{2^{-k}}(U_{t_i})^*_{\bar{m},\bar{n}} M_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \} P^*_{t_{i+1}-s} L^*_2 (U^1_s)^*_{\overline{m-1},\bar{n}} m_s \{ \, ds$$
$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} P^*_{t_{i+1}-s} [\{L_1 (U_s)^*_{\bar{m},\overline{n-1}} M_s\}_\sigma + W^*_\sigma (U_s)^*_{\overline{m-1},\overline{n-1}} m_s] \, dB_s.$$

On écrit alors $(U_{t_i})^*_{\bar{m},\bar{n}} M_{t_i}$ comme somme de trois integrales, on développe les carrés et on fait tendre k vers l'∞, $k \in \sigma$. Les lemmes 5.1 et 5.2 fournissent alors (5.1). Nous omettons les détails, fastidieux mais triviaux.

Pour finir la démonstration du théorème 2 il suffit de voir que d'après la remarque précédant (5.5), pour toute martingale $(M_t)_{t>0}$, $(\{L_1 S^*_t M_t\}_\sigma + W^*_\sigma m_t)_{t>0}$ ne dépend pas de σ. On en déduit aisément que le cocycle σ-engendré par (Z, L_1, L_2, W_σ) ne dépend que de Z, L_1, L_2 et D. Le théorème 2 est démontré.

D'après (5.1) et (5.2), il est clair que U^*_t sera isométrique pour tout $t>0$ si et seulement si, pour tous $m \in \mathbb{N}$, $t>0$ et $M \in \mathscr{H}_0 \otimes L^2(dW)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^t \|\{L_1 (U_s)^*_{m,n} M_s\}_\sigma\|^2 \, ds = 0. \tag{5.6}$$

En fait il suffit de vérifier (5.6) lorsque $m=0$.

Proposition 3. *Soit (Z, L_1, L_2, W_σ) et σ satisfaisant aux hypothèses du théorème 3 et soit $(U_t)_{t>0}$ le cocycle engendré. Alors U_t est isométrique pour tout $t>0$ si sa restriction à $\mathscr{H}_0 \otimes \mathfrak{1}$ l'est.*

Lemme 5.3. *Pour tout $u \in \mathscr{D}(Z^*)$ et toute martingale $(M_t)_{t>0}$ et tout $t>0$,*

$$\left\langle \int_0^t (\{L_1 S^*_s M_s\}_\sigma + W^*_\sigma m_s) \, ds, L_1 u \right\rangle \tag{5.7}$$
$$= -\left\langle M_t, \int_0^t S_s Z^* u \, ds + \int_0^t \{L_2 P_s u\} \, dB_s \right\rangle.$$

Pour démontrer ce lemme on se ramène à $t=1$ et $M=vB_1$, où $v \in \mathscr{H}_0$. Pour $k \in \sigma$ soit l'expression

$$A_k = \sum_{i \leq 2^{-k}-1} \left\langle \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{L_1 P^*_{s-t_i} S^*_{t_i} v B_{t_i}\} \, ds, L_1 u \right\rangle - \sum_{i \leq 2^{-k}-1} \left\langle v, \int_0^{2^{-k}} L_2 P_x u \, dx \right\rangle.$$

Il est clair que le membre de gauche de (5.7) est égal à la limite de A_k lorsque $k \to +\infty$. Il suffit de montrer qu'il en est de même pour le membre de droite. A cet effet on réécrit A_k sous la forme

$$+ \sum_{i \leq 2^k-1} \left\langle \int_{t_i}^{t_{i+1}} P^*_{s-t_i} S^*_{t_i} v B_{t_i} \, ds, Z^* u \right\rangle$$
$$- \sum_{i \leq 2^k-1} \langle (P^*_{2^{-k}} - I) S^*_{t_i} v B_{t_i}, u \rangle$$
$$- \sum_{i \leq 2^k-1} \left\langle v, \int_0^{2^{-k}} L_2 P_x u \, dx \right\rangle.$$

Les deux derniers termes ont pour somme

$$-\int_0^1 \langle v, L_2 P_x u\, dx\rangle.$$

On en déduit que la limite de A_k lorsque $k \to +\infty$ vaut

$$-\int_0^1 \langle vB_s, S_s Z^* u\rangle\, ds - \int_0^1 \langle v, \{L_2 P_s u\}\rangle\, ds.$$

Le lemme est démontré.

Lemme 5.4. *Soit* $(U_t)_{t>0}$ *comme dans la proposition* 3 *et* $u \in \mathscr{H}_0$, *alors*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \|U_t v B_t\|^2 = \|v\|^2. \tag{5.8}$$

On remarque que pour tout $v \in \mathscr{D}(Z)$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\| \int_0^t U_s Z v B_s\, ds + \int_0^t U_s L_2 v B_s\, dB_s \right\|^2 = 0. \tag{5.9}$$

Or cette expression est aussi égale à

$$\frac{1}{t} \left\| U_t v B_t - \int_0^t U_s W_\sigma v\, dB_s - \int_0^t \}U_s L_1^* v\{_\sigma\, ds \right\|^2$$

et est dominée par $\|v\|^2$. Donc (5.9) reste vraie pour tout $v \in \mathscr{H}_0$ et (5.8) est équivalent à

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\| \int_0^t U_s W_\sigma v\, dB_s + \int_0^t \}U_s L_1^* v\{_\sigma\, ds \right\|^2 = \|v\|^2. \tag{5.10}$$

Lorsque $v \in \operatorname{Im} L_1^\perp$, (5.10) est automatique car $\int_0^t \}U_s L_1^* v\{_\sigma\, ds = 0$ et $\|W_\sigma v\| = \|v\|$.
Il reste à vérifier (5.10) lorsque $v = L_1 u$ où $u \in \mathscr{D}(Z^*)$. Remarquons que pour toute martingale $(M_t)_{t>0}$,

$$\left\langle M_t, \int_0^t \}U_s L_1^* v\{_\sigma\, ds \right\rangle = \left\langle M_0, \int_0^t \}P_s L_1^* L_1 u\{\, ds \right\rangle$$
$$+ \left\langle \int_0^t \left\{ L_1 S_s^* \left(\int_0^{+\infty} U_x^* m_x\, dB_x \right) \right\}_\sigma ds, L_1 u \right\rangle.$$

Le lemme 5.3 entraine alors l'identité suivante

$$\int_0^t U_s W_\sigma v\, dB_s + \int_0^t \}U_s L_1^* v\{_\sigma\, ds$$
$$= \int_0^t \}P_s L_1^* L_1 u\{\, ds + \int_0^t S_s Z^* u\, ds + \int_0^t \{L_2 P_s u\}\, dB_s.$$

Rappelons que $\int_0^t \}P_s L_1^* L_1 u\{ \, ds = -\int_0^t P_s Z^* u \, ds + (I - P_t) u$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\| \int_0^t U_s W_\sigma v \, dB_s + \int_0^t \} U_s L_1^* v \{_\sigma \, ds \right\|^2
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\| (I - P_t) u + \int_0^t \{L_2 P_s u\} \, dB_s \right\|^2 \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\|(I - P_t) u\|^2 + \|u\|^2 - \|P_t u\|^2 \right) \\
&= \|L_1 u\|^2 \quad \text{en vertu de (4.3)}
\end{aligned}$$

L'identité (5.10) et le lemme 5.4 sont démontrés.

Nous allons maintenant prouver la proposition 3. Par dualité il suffit de montrer que U_t^* est isométrique pour tout t si sa restriction à $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{1}$ l'est. Nous supposons donc que pour $u \in \mathcal{H}_0$ et $t > 0$, $\|U_t^* u\|^2 = \|u\|^2$ et nous allons montrer que si f est une fonction étagée à support compact, définie sur $\mathbb{R}_+$, $u \in \mathcal{H}_0$ et $t > 0$ et si

$$\psi(f) = \exp\left\{ \int_0^{+\infty} f(s) \, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(s)^2 \, ds \right\},$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left(\|U_{t+s}^* u \psi(f)\|^2 - \|U_t^* u \psi(f)\|^2 \right) = 0. \tag{5.11}$$

Pour tout $x > 0$ nous notons $f_x = f \chi_{[0, x]}$ et $f^x = f - f_x$. Supposons d'abord que $t = 0$. On écrit

$$\|U_s^* u \psi(f)\|^2 = \|U_s^* u \psi(f_s)\|^2 \, \|\psi(f^s)\|^2.$$

Comme U_s^* est une contraction et sa restriction à $\mathcal{H}_0 \otimes \mathbb{1}$ est isométrique,

$$\begin{aligned}
\|U_s^* u \psi(f_s)\|^2 &= \|U_s^* u\|^2 + \|U_s^*(u \psi(f_s) - u)\|^2 \\
&= \|u\|^2 + \|U_s^* u f(0) B_s\|^2 + o(s).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 5.4, et par dualité on obtient

$$\|U_s^* u \psi(f_s)\|^2 = \|u\|^2 + s \, |f(0)|^2 \, \|u\|^2 + o(s).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|\psi(f^s)\|^2 &= \|\psi(f)\|^2 \exp - \int_0^s |f(x)|^2 \, dx \\
&= (1 - s \, |f(0)|^2 + o(s)) \, \|\psi(f)\|^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc $\|U_s^* u \psi(f)\|^2 = \|u \psi(f)\|^2 + o(s)$, ce qui est équivalent à (5.11) lorsque $t = 0$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus il existe une constante $C(f)$, telle que pour tout $s > 0$ et $u \in \mathcal{H}_0$,

$$\left| \|U_s^* u \psi(f)\|^2 - \|u \psi(f)\|^2 \right| \leqq C(f) \, s \, \|u\|^2.$$

Il découle que pour $t > 0$ et $u_t \in \mathcal{H}_0 \otimes L^2(\mathcal{F}_t)$,

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left(\|\overline{\Gamma_t U_s^* \Gamma_t^*} \, u_t \psi(f^t)\|^2 - \|u_t \psi(f^t)\|^2 \right) = 0.$$

La propriété de cocycle entraine alors (5.11) pour tout $t>0$. De (5.11) on déduit que pour $u\in\mathscr{H}_0$ et f étagée $\|U_t^* u\psi(f)\|^2=\|u\psi(f)\|^2$. Comme U_t^* est une contraction, on obtient par linéarité et densité, que U_t^* est isométrique. La proposition 3 est démontrée.

Nous allons maintenant prouver le théorème 3. D'après (5.11), (5.2) et la proposition 3, pour montrer que U_t^* est isométrique pour tout t, il suffit de montrer que pour tout $u\in\mathscr{H}_0$, et $t>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t \|\{L_1(U_s)^*_{0,n}u\}\|^2\,ds=0. \tag{5.12}$$

Or cette limite vaut également

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t\int_0^s \|\{L_1 P^*_{s-x}\{L_1(U_s)^*_{0,n-1}u\}\}\|^2\,dx\,ds.$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^t (\|\{L_1(U_x)^*_{0,n-1}u\}\|^2-\|P^*_{t-x}\{L_1(U_x)^*_{0,n-1}u\}\|^2)\,dx. \tag{5.13}$$

Sous les hypothèses du théorème 3, il existe une constante $\varepsilon_t>0$, telle que pour $x\leqq t$ et $v\in\mathscr{H}_0$, $(\|v\|^2-\|P^*_{t-x}v\|^2)\leqq(1-\varepsilon_t)\|v\|^2$. Cela entraine que la limite (5.12) ou (5.13) est nulle. Par dualité on obtient que U_t est également isométrique pour tout t. Le théorème 3 est démontré.

Nous allons maintenant voir que le théorème 3 n'est pas optimal.

VI. Etude du semi-groupe des translations sur $L^2[0,1]$

Soit $(P_t)_{t>0}$ le semi-groupe des translations sur $L^2[0,1]$. Si $u\in L^2[0,1]$, $(P_t u)(x)=\chi_{\{x\geqq t\}}u(x-t)$. Le générateur Z de $(P_t)_{t>0}$ est égal à $-\dfrac{d}{dx}$ et son domaine est l'espace des fonctions absolument continues u telles que $u'\in L^2$ et $u(0)=0$. La forme $u\to\mathrm{Re}\langle u,Zu\rangle$ est égale à $-\frac{1}{2}|u(1)|^2=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{dt}\|P_t u\|^2\right)_{t=0}$. De même la forme $u\to\mathrm{Re}\langle u,Z^*u\rangle$ est égale à $u\to-\frac{1}{2}|u(0)|^2$. Cet exemple, suggéré par Brezis, est le plus simple pour lequel les formes $\mathrm{Re}\langle u,Zu\rangle$ et $\mathrm{Re}\langle u,Z^*u\rangle$ ne sont pas fermables.

Il est clair que si L_1 et L_2 vérifient (4.1) et (4.2), alors il existe deux élèments unitaires h et h^* de $L^2[0,1]$ tels que pour $u\in\mathscr{D}(Z)$ $L_2 u=h^*u(1)$ et pour $u\in\mathscr{D}(Z^*)$ $L_1 u=hu(0)$. Si $u\in\mathscr{D}(Z)$ et $v\in\mathscr{D}(Z^*)$,

$$\left\langle L_1 v, L_1\frac{1}{t}\int_0^t (P_x^* u)\,dt\right\rangle=v(0)\int_0^t u(x)\,\frac{dx}{t}.$$

Il en découle que le recours aux sous-suites est inutile, et que $L_{1,Z}=0$ et $L_{2,Z^*}=0$. Pour que W satisfasse aux conclusions de la proposition 2, il faut et il suffit que pour tout u,

$$\|Wu\|^2 = \|u\|^2 - \|\langle u, h\rangle\|^2.$$

(6.1) et

$$\|W^* u\|^2 = \|u\|^2 - \|\langle u, h^*\rangle\|^2.$$

Proposition 4. *Pour tous h, $h^* \in L^2[0,1]$ et tout W vérifiant* (6.1), (Z, L_1, L_2, W) *engendre un cocycle unitaire.*

Il suffit de vérifier (5.12) car si $(U_t)^*_{t>0}$ est isométrique, par dualité il sera aussi unitaire.

Remarquons que pour $u \in \mathscr{D}(Z^*)$,

$$\int_0^T \|\{L_1 P_s^* L_1 u\}\|^2 \, ds = \int_0^T \|\{L_1 P_s^* h\}\|^2 \, |u(0)|^2 \, ds$$
$$= \left(\int_0^T |h(s)|^2 \, ds\right) \|L_1 u\|^2.$$

Soit T tel que $\int_0^T |h(s)|^2 \, ds < \frac{1}{2}$. L'argument de la démonstration du théorème 2 montre que pour $t \leqq T$ la limite (5.12) ou (5.13) est nulle. Donc U_t^* est isométrique pour $t \leqq T$ et également pour $t \geqq T$ par la propriété de cocycle. Par dualité, on voit que $(U_t)_{t>0}$ est un cocycle unitaire. La proposition 4 est démontrée.

La proposition 4 peut évidemment être généralisée au cas où $\operatorname{Im} L_1$ et $\operatorname{Im} L_2$ sont de dimensions finies et également au cas où L_1 et L_2 sont sommes d'opérateurs bornés et d'opérateurs de rang fini. Dans ce cas on montre que pour t suffisamment petit, et pour $u \in \mathscr{H}_0$,

$$\int_0^t \int_0^s \|\{L_2 P_{t-s} \{L_2 P_{s-x} u\}\}\|^2 \, ds \, dx \leqq \tfrac{1}{2} \|u\|^2,$$

et on applique le raisonnement précédent.

Ces remarques montrent que le théorème 2 n'est pas optimal, c'est à dire qu'il existe des semi-groupes non inversibles pour lesquels les générateurs de la proposition 2 engendrent des cocycles unitaires. Toutefois le contre-exemple de la section suivante montre que la caractérisation de ces semi-groupes doit être délicate.

VII. Un contre-exemple

Soit $(P_t)_{t>0}$ un semi-groupe ne vérifiant pas l'hypothèse du théorème 2. Quitte à échanger P_t et P_t^*, on peut supposer que pour tout $t>0$, $\inf_{\|u\|=1} \|P_t u\| = 0$. On considére maintenant le semi-groupe $(\tilde{P}_t)_{t>0} = (P_t \otimes I)_{t>0}$ agissant sur $\mathscr{H}_0 \otimes l^2(\mathbb{N})$. On note son générateur $\tilde{Z}$.

Proposition 5. *Il existe un opérateur L_2 de domaine $\mathscr{D}(\tilde{Z})$ et $w \in \mathscr{H}_0 \otimes l^2(\mathbb{N})$ tels que, pour $v \in \mathscr{D}(\tilde{Z})$ $\|L_2 v\|^2 = -2\operatorname{Re}\langle v, \tilde{Z} v\rangle$ et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int \cdots \int_{0 \leqq s_1 + s_2 + \ldots + s_n \leqq 1} \cdot \int \|\{L_2 \tilde{P}_{s_1} \{L_2 \tilde{P}_{s_2} \ldots \{L_2 \tilde{P}_{s_n} w\} \ldots\}\|^2 \, ds_1 \ldots ds_n \neq 0.$$

Il est facile de voir que sous l'hypothèse $\inf_{\substack{\|u\|=1\\ u\in\mathscr{H}_0}} \|P_t u\|=0$, il existe pour tout $n\in\mathbb{N}$ un sous-espace fermé $\mathscr{H}_n$ de $\mathscr{H}_0$, de dimension infinie, tel que pour $u\in\mathscr{H}_n$, $\|P_{s_n} u\|^2 \leqq 2^{-n}\|u\|^2$. Soit L un opérateur agissant de $\mathscr{D}(Z)$ dans $\mathscr{H}_0$ tel que $\|u\|^2 = -2\operatorname{Re}\langle u, Zu\rangle$. Pour tout $n>0$ soit Π_n une isométrie de $\mathscr{H}_0$ dans $\mathscr{H}_n$ et soit τ_n l'opérateur agissant sur $l^2(N)$, tel que $\tau_n(l_{n-1})=l_n$ et $\tau_n(l_j)=0$ si $j\neq n-1$, où $(l_n)_m\in\mathbb{N}$ est la base canonique de $l^2(\mathbb{N})$. On pose

$$L_2=\sum_{n\geqq 1} \Pi_n L\otimes\tau_n,$$

de sorte que $L_2(u\otimes l_n)=\Pi_{n+1} Lu\otimes l_{n+1}$.

Il est alors facile de voir que la limite apparaissant dans (7.1) est supérieure à $\alpha\|w\|^2$ où $\alpha=\prod_{n\geqq 1}(1-2^{-n})>0$. La proposition 5 est démontrée. Elle montre que les cocycles engendrés par des générateurs (Z, L_1, L_2, W_σ) vérifiant les conclusions de la proposition 2 ne sont en général pas unitaires. Les prédictions du calcul stochastique non commutatif sont donc généralement en défaut lorsque Z n'est pas borné.

Références

[A] Accardi, L.: On the quantum Feynman-Kac formula. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano **48**, 135–180 (1978)

[A-F-L] Accardi, L., Frigerio, A., Lewis, J.T.: Quantum stochastic processes. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto University **18**, 97–133 (1982)

[H-L] Hudson, R.L., Lindsay, J.M.: Uses of non-Fock quantum brownian motion and a quantum martingale representation theorem. In: Accardi, L., Waldenfels, W. von (eds.). Proceeding, Heidelberg 1984 (Lect. Notes Math. Vol. 1136, pp. 276–305). Berlin Heidelberg New York: Springer 1986

[H-P] Hudson, R.L., Parthasarathy, K.R.: Quantum Ito's and stochastic evolutions. Commun. Math. Phys. **93**, 301–23 (1984)

[J-M] Journé, J.-L., Meyer, P.-A.: Une martingale d'opérateurs bornés, non representable en intégrale stochastique. Séminaire de Probabilités de Strasbourg 1984–1985. Lect. Notes Math. **1204**, 313–316. Berlin Heidelberg New York: Springer 1986

[M] Meyer, P.-A.: Eléments de probabilités quantiques. Séminaire de Probabilités de Strasbourg 1984–1985. Lect. Notes Math. **1204**, 186–312. Berlin Heidelberg New York: Springer 1986

Received May 15, 1986