Probab. Th. Rel. Fields 80, 119–137 (1988)

Probability Theory and Related Fields

Sur le théoreme d'Atiyah-Singer

Rémi Léandre

Faculté des Sciences, 16, Route de Gray, F-25030 Besancon Cedex, France

Résumé. On donne une version simplifiée de la démonstration probabiliste du théoreme de l'indice pour l'opérateur de Dirac, donnée par J.M. Bismut. Au lieu d'utiliser la construction du mouvement brownien au moyen du fibré des reperes, on utilise la construction de Schwartz en plongeant la variété ambiante dans un espace vectoriel de dimension plus grande. On évite aussi l'utilisation de la décomposition de l'espace de Wiener en deux utilisée par J.M. Bismut, le calcul des variations stochastiques étant notre outil principal. De ce fait, on perd la relation avec la cohomologie de l'espace des lacets.

Summary. We give a simplified version of Bismut's probabilistic proof of the index theorem for the Dirac operator. By using Schwartz's construction of a Brownian motion over a manifold, we expect to give a simpler approach to the computations of stochastic geometry. Our main tool is the calculus of stochastic variations, rather than the splitting of the Wiener space into two pieces. For that reason, we loose the relation with the cohomology of the loop space.

Commençons par rappeler quelques éléments fondamentaux de la théorie de l'indice (il est possible de regarder [Gi] et les références incluses dans [Gi] pour plus de détails). Considérons une variété M d'éléments génériques x riemannienne compacte, et $E_\pm$ deux fibrés hermitiens sur V (c'est-à-dire deux familles d'espaces vectoriels $E_{\pm,x}$ dépendant de façon C^∞ de x). Soit L un opérateur elliptique appliquant les sections de E_+ sur les sections de E_-: la théorie générale nous dit que c'est un opérateur de Fredholm. On voudrait calculer son indice $\dim \operatorname{Ker} L - \dim \operatorname{Coker} L$, et si possible en fonction d'intégrales sur la variété M contenant des expressions construites à partir de L localement. A cette fin, on se ramène au moyen de toute une procédure algébrique au cas d'une variété riemannienne orientable spinorielle et au cas où $L = D_+$ est l'opérateur de Dirac tordu agissant sur le fibré des spineurs tensorisé par un fibré auxiliaire hermitien: $E_+ = S_+ \otimes \xi$, $E_- = S_- \otimes \xi$, ξ est le fibré auxiliaire, D est l'opérateur de Dirac agissant sur $E_+ \oplus E_-$, D_+ est la restriction de D à E_+, D_- est celle de D à E_-; D_+ applique E_+ sur E_-, et $D_- E_-$ sur E_+ et sont mutuellement adjoints.

Rappelons le principe de la méthode de la chaleur: puisque D_+ et D_- sont adjoints l'un de l'autre, on a

$$\operatorname{Ind} D_+ = Tr \exp\left[-\varepsilon^2 \frac{D_- D_+}{2}\right] - Tr \exp\left[-\varepsilon^2 \frac{D_+ D_-}{2}\right]. \tag{0.1}$$

De plus $\exp\left[-\varepsilon^2 \frac{D_- D_+}{2}\right]$ et $\exp\left[-\varepsilon^2 \frac{D_+ D_-}{2}\right]$ sont représentés par des noyaux $Q^+(x, \varepsilon, y)$ et $Q^-(x, \varepsilon, y)$. $Q^+(x, \varepsilon, y)$ est un opérateur qui applique un spineur >0 au-dessus de y sur un spineur >0 au-dessus de x, et qui dépend de façon C^∞ de x et de y et $Q^-(x, \varepsilon, y)$ un opérateur linéaire qui applique un spineur <0 au-dessus de y sur un spineur <0 au-dessus de x. La formule principale est alors:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind} D_+ &= \int_M (Tr\, Q^+(x, \varepsilon, x) - Tr\, Q^-(x, \varepsilon, x))\, d\sigma(x) \\ &= \int_M Tr_s\, Q(x, \varepsilon, x)\, d\sigma(x), \end{aligned} \tag{0.2}$$

$d\sigma(x)$ désignant la mesure riemannienne sur M.

Par des résultats généraux d'analyse, on sait que:

$$\begin{aligned} Tr\, Q^+(x, \varepsilon, x) &= \frac{1}{\varepsilon^d}\left(\sum_{i=0}^{d} a_i^+(x)\, \varepsilon^i + 0(\varepsilon^{d+1})\right) \\ Tr\, Q^-(x, \varepsilon, x) &= \frac{1}{\varepsilon^d}\left(\sum_{i=0}^{d} a_i^-(x)\, \varepsilon^i + 0(\varepsilon^{d+1})\right). \end{aligned} \tag{0.3}$$

La formule (0.2) nous montre que

$$\int_M a_i^+(x)\, d\sigma(x) = \int_M a_i^-(x)\, d\sigma(x) \tag{0.4}$$

pour $i < d$. Il reste donc à calculer $\int_M (a_d^+(x) - a_d^-(x))\, d\sigma(x)$. Mais en fait il se trouve que pour un opérateur de Dirac on a mieux que les annulations globales (0.4): en effet, $a_i^+(x) = a_i^-(x)$ pour $i < d$, et l'on peut calculer explicitement $a_d^+(x) - a_d^-(x)$ ([Gi]).

M. Atiyah et E. Witten ont remarqué que la formule de l'indice était liée à la structure de l'espace des lacets sur la variété. J.M. Bismut a donné une version rigoureuse en utilisant une représentation stochastique adéquate du semi-groupe de la chaleur [B.1]. Grâce à une très bonne approximation de la loi du brownien, il peut évaluer la super-trace de $\exp\left[\frac{-\varepsilon^2 D^2}{2}\right]$ quand $\varepsilon \to 0$. Il est à noter que cette méthode est la plus proche des formules de localisation de Berline-Vergne [B.6, B.7]. Ses calculs sont fondés sur un théorème des fonctions implicites et la théorie des grandes déviations [Az.1]: ils constituent aussi une tentative pour expliquer pourquoi la méthode de la chaleur marche pour certains opérateurs.

R. Azencott a donné ensuite une nouvelle méthode basée sur un mélange de l'analyse et des probabilités [Az.2], où la relation avec l'espace des lacets disparaît (il est à noter que l'esprit de cette méthode est le même que celle suggérée par

T. E. Duncan, qui est sans doute le premier auteur à avoir pensé qu'il existe un rapport entre la théorie de l'indice et les probabilités [Du]).

L'objet de cet article est de donner une nouvelle méthode probabiliste qui évite l'utilisation du pont brownien et l'usage de la théorie des grandes déviations. Elle reprend les principes donnés dans [L] et qui sont utilisés entre autres pour estimer la densité en temps petit d'une diffusion dégénérée. Toutefois, la relation avec l'espace des lacets disparaît dans cette méthode. Ceci étant, les calculs de géométrie stochastique sont à quelques variantes près calqués sur ceux de [B. 1].

Nous remercions D. Bennequin pour l'aide qu'il a bien voulu nous accorder.

I. Le lemme probabiliste essentiel

Considérons un mouvement brownien m dimensionnel $(w_1, \ldots, w_m)$, ε un paramètre appartenant à $[0,1]$ et λ un paramètre appartenant à un ouvert Λ relativement compact de $\mathbb{R}^k$ ou à une variété compacte.

Considérons une fonctionnelle brownienne $F(\lambda, \varepsilon, w)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On dit qu'elle vérifie l'hypothèse H_1 si elle possède les propriétés suivantes:

- elle possède une version C^∞ en (λ, ε)
- elle et toutes ses dérivées en (λ, ε) sont C^∞ au sens de Malliavin [K.S.1]
- pour tout entier j, tout multi-indice (α), la dérivée $i^{\text{ème}}$ au sens de Malliavin de $\frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial \lambda^{(\alpha)}} F(\lambda, \varepsilon, w)$ possède une version C^∞ en (λ, ε). On notera cette dérivée $i^{\text{ème}}$ $D^i \frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial \lambda^{(\alpha)}} F(\lambda, \varepsilon, w)$
- pour tout entier j, tout entier j', tout entier i, tout multi-indice (α) et (α'), on a pour tout réel $p > 1$:

$$\sup_{\varepsilon \in [0,1], \lambda \in \Lambda} E\left[\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} \frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} D^i \frac{\partial^{(\alpha')}}{\partial x^{(\alpha')}} \frac{\partial^{(j')}}{\partial \varepsilon^{(j')}} F(\lambda, \varepsilon, w)\right|^p\right] < C(p) < \infty . \tag{1.1}$$

On dira que $F(\lambda, \varepsilon, w)$ vérifie H_2 si pour tout entier $p > 0$,

$$\sup_{\varepsilon \in [0,1], \lambda \in \Lambda} E[|\langle DF(\lambda, \varepsilon, w), DF(\lambda, \varepsilon, w)\rangle^{-1}|^p] < C(p) < \infty , \tag{1.2}$$

$\langle DF(\lambda, \varepsilon, w), DF(\lambda, \varepsilon, w)\rangle$ désignant la matrice de covariance de Malliavin [K.S.1].

Considérons une autre fonctionnelle $J(\lambda, \varepsilon, w)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui vérifie encore H_1. On dira qu'elle vérifie H_3 si pour tout $j < d$,

$$\frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} J(\lambda, 0, w) = 0 . \tag{1.3}$$

Notons $\mu(\lambda, \varepsilon)$ la mesure sur $\mathbb{R}^d$:

$$f \to E[f(\varepsilon F(\lambda, \varepsilon, w)) \, J(\lambda, \varepsilon, w)] . \tag{1.4}$$

Le «théorème d'Atiyah-Singer» probabiliste est alors le suivant:

Théorème I.1. *Supposons que $F(\lambda, \varepsilon, w)$ vérifie H_1 et H_2, et que $J(\lambda, \varepsilon, w)$ vérifie H_1 et H_3.*

Si $\varepsilon > 0$, $\mu(\lambda, \varepsilon)$ possède une densité $q(\lambda, \varepsilon, y)$ C^∞ en $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \Lambda$, $y \in \mathbb{R}^d$.

De plus la loi de $F(\lambda, \varepsilon, w)$ possède une densité $p(\lambda, \varepsilon, y)$ C^∞ en $\varepsilon \geqq 0$, $\lambda \in \Lambda$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Enfin, on a uniformément sur tout compact de Λ:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} q(\lambda, \varepsilon, 0) = \frac{1}{d!} E\left[\frac{\partial^{(d)}}{\partial \varepsilon^{(d)}} J(\lambda, 0, w) \,\middle|\, F(\lambda, 0, w) = 0 \right] p(\lambda, 0, 0). \tag{1.5}$$

Preuve. Elle est très semblable à celles de [*L*].

Le fait que $q(\lambda, \varepsilon, y)$ existe si $\varepsilon > 0$ et est C^∞ en $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \Lambda$, $y \in \mathbb{R}^d$ résulte du fait que $\langle D(\varepsilon F(\varepsilon, \lambda, w)), D(\varepsilon F(\varepsilon, \lambda, w))\rangle = \varepsilon^2 \langle DF(\varepsilon, \lambda, w), DF(\varepsilon, \lambda, w)\rangle$ qui est inversible si $\varepsilon > 0$ à cause de H_2, et du calcul de Malliavin.

Introduisons la mesure de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}^d$ notée δ_0, et une suite f_n de fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, à support compact, tendant au sens des distributions vers δ_0.

Appliquons le deuxième principe de normalisation [L]. On a:

$$\begin{aligned} q(\lambda, \varepsilon, 0) &= \lim_{n \to \infty} E[f_n(\varepsilon F(\lambda, \varepsilon, w))\, J(\lambda, \varepsilon, w)] \\ &= \lim_{n \to \infty} E[f_n(F(\lambda, \varepsilon, w))\, J(\lambda, \varepsilon, w)/\varepsilon^d]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Or $F(\lambda, \varepsilon, w)$ vérifie H_1 et $J(\lambda, \varepsilon, w)/\varepsilon^d$ vérifie H_1 car $J(\lambda, \varepsilon, w)$ vérifie H_3.

Comme $F(\lambda, \varepsilon, w)$ vérifie H_2, il résulte du calcul de Malliavin [K.S.1] que la mesure $\tilde{\mu}(\lambda, \varepsilon)$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par:

$$f \to E[f(F(\lambda, \varepsilon, w))\, J(\lambda, \varepsilon, w)/\varepsilon^d] \tag{1.7}$$

possède une densité C^∞ *en* $\varepsilon \geqq 0$, $\lambda \in \Lambda$, $y \in \mathbb{R}^d$. Notons $\tilde{q}(\lambda, \varepsilon, y)$ cette densité.

De plus la loi de $F(\lambda, \varepsilon, w)$ possède aussi une densité C^∞, notée $p(\lambda, \varepsilon, y)$: ceci résulte du calcul de Malliavin.

De plus, on a si $\varepsilon \geqq 0$

$$\tilde{q}(\lambda, \varepsilon, y) = E[J(\lambda, \varepsilon, w)/\varepsilon^d \mid F(\lambda, \varepsilon, w) = y]\, p(\lambda, \varepsilon, y). \tag{1.8}$$

Or d'après (1.6), $\tilde{q}(\lambda, \varepsilon, 0) = q(\lambda, \varepsilon, 0)$.

Remarque. En fait, nous n'appliquerons ce résultat que dans une situation bien précise, où l'on peut aussi bien appliquer le formalisme plus élémentaire de [B.2]. Toutefois la méthode que nous utilisons ici possède l'avantage de mieux montrer l'enchaînement des étapes dans la démonstration.

II. Generalites geometriques

Nous ne ferons que rappeler les préliminaires nécessaires, nous bornant à renvoyer à [Gi] ou [B.1] pour une étude plus approfondie.

Considérons une variété riemannienne compacte orientée M de fibré des repères orthonormés directs $N \xrightarrow{\pi} M$. On suppose qu'elle est de dimension paire $d = 2l$.

Introduisons le groupe des spineurs $G \xrightarrow{\sigma} SO(d)$, revêtement universel du groupe des isométries $SO(d)$. Supposons que la variété M soit spinorielle: il existe un fibré principal $\bar{N}$ de groupe structurel G, de projection $\bar{\pi}$, tel que $\bar{\pi} = \pi \circ \bar{\sigma}$.

Appelons $C(M)$ le fibré de Clifford de M: au-dessus de chaque point x de la variété initiale M, on construit l'algèbre de Clifford associée à la métrique riemannienne en x. Si l'on complexifie $C(M)$, $C(M)$ s'identifie à un fibré vectoriel complexe sur M dont la fibre en x est une algèbre de matrices agissant sur un espace complexe S_x au-dessus de x. Considérons le fibré S associé: on l'appelle le fibré des spineurs. Il se décompose en la somme de deux fibrés S^+ et S^-.

Si l'on considère un vecteur de l'espace tangent en x à la variété M, il s'identifie à un élément de la fibre de $C(M)$ en x, et donc à un élément de l'algèbre de matrices sur S_x: ainsi considéré, il permute par multiplication S_x^+ et S_x^-.

Notons $e(x)$ ce vecteur: s'il est de norme 1, il s'identifie à une symétrie de l'espace tangent en x.

Introduisons maintenant un fibré hermitien ξ de dimension k. Sur le fibré des repères unitaires X de ξ, de groupe structurel le groupe unitaire $U(k)$, on choisit une connexion arbitraire Λ. Le fibré produit $\bar{N} \times X$ est alors muni de la connexion produit de la connexion de Levi-Civita sur $\bar{N}$ et de la connexion Λ sur X.

On note ∇ l'opérateur de dérivation covariante sur le fibré produit $S \otimes \xi$ pour la connexion produit.

Dans toute la suite, on notera $\Gamma(Z)$ l'ensemble des sections C^∞ d'un fibré Z au-dessus de M.

Considérons un champ de repères au voisinage d'un point x_0 de M; notons le $e_i(x) \leqq d$. C'est donc une section locale de N, et par suite, chaque $e_i(x)$ est une section locale du fibré de Clifford $C(M)$.

Introduisons l'opérateur de Dirac D qui agit sur les sections C^∞ de $S \otimes \xi$ par la formule:

$$\begin{aligned} D(f \otimes g)(x) = & \sum_{i=1}^{d} e_i(x)\, \nabla_{e_i(x)} f(x) \otimes g(x) \\ & + \sum_{i=1}^{d} e_i(x)\, f(x) \otimes \nabla_{e_i(x)}\, g(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

f étant une section de S et g une section de ξ.

«A priori» D dépend dans la formule (2.1) du champ de repères choisi: toutefois, on vérifie que si l'on change de champ de repères, D reste invariant.

De plus, c'est un opérateur elliptique d'ordre 1 qui permute $\Gamma(S^+ \otimes \xi)$ et $\Gamma(S^- \otimes \xi)$.

Soit D^+ la restriction de D à $\Gamma(S^+ \otimes \xi)$ et D^- la restriction de D à $\Gamma(S^- \otimes \xi)$.

$\Gamma(S^+ \otimes \xi)$ et $\Gamma(S^- \otimes \xi)$ héritent d'une structure d'espace hermitien déduite de la structure riemannienne initiale sur M et de la structure hermitienne sur ξ.

D^+ et D^- sont alors formellement adjoints l'un de l'autre.

Il s'agit de calculer:

$$\operatorname{Ind} D^+ = \dim \operatorname{Ker} D^+ - \dim \operatorname{Ker} D^- . \tag{2.2}$$

Rappelons que cette quantité est bien définie, car D^+ est un opérateur de Fredholm [Gi].

La méthode de la chaleur [Gi] pour calculer $\operatorname{Ind} D^+$ à partir des invariants topologiques de la variété M ([D.F.N.] tome 2) introduit le semi-groupe de Dirac

$\exp[-tD^2]$ associé à D^2, et utilise la relation suivante (voir [Gi] et aussi les références données dans ce livre d'introduction à la théorie de l'indice):

$$\operatorname{Ind} D^+ = Tr_{\Gamma(S^+\otimes\xi)} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\right] - Tr_{\Gamma(S^-\otimes\xi)} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\right], \tag{2.3}$$

$\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\right]$ étant un opérateur qui applique $\Gamma(S^+\otimes\xi)$ sur $\Gamma(S^+\otimes\xi)$, et $\Gamma(S^-\otimes\xi)$ sur $\Gamma(S^-\otimes\xi)$.

Le remplacement dans (2.3) de t par $\frac{\varepsilon^2}{2}$ sera motivé dans la suite.

Or $\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\right]$ possède un noyau $Q(x_0,\varepsilon,y)$, C^∞ en $x_0\in M$, $\varepsilon>0$, $y\in M$. $Q(x_0,\varepsilon,y)$ d'une part applique la fibre de $S^+\otimes\xi$ au-dessus de y sur la fibre de $S^+\otimes\xi$ au-dessus de x_0. Et l'on a la relation:

$$\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\right] h(x) = \int_M Q(x,\varepsilon,y)\, h(y)\, dy. \tag{2.4}$$

Considérons un opérateur σ_x appliquant la fibre de $S^+\otimes\xi$ au-dessus de x sur celle de $S^+\otimes\xi$ au-dessus de x, et la fibre de $S^-\otimes\xi$ au-dessus de x sur la fibre de $S^-\otimes\xi$ au-dessus de x. Appelons supertrace de σ_x la quantité:

$$Tr_s\,\sigma_x = Tr_{S^+\otimes\xi}\,\sigma_x - Tr_{S^-\otimes\xi}\,\sigma_x. \tag{2.5}$$

Il résulte du fait que $\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\right]$ est auto-adjoint et des calculs standards [Gi] que:

$$\operatorname{Ind} D^+ = \int_M Tr_s\, Q(x,\varepsilon,x)\, dx, \tag{2.6}$$

dx étant la mesure riemannienne sur M.

Le principe de la méthode de la chaleur [Gi] consiste à faire tendre $\varepsilon\to 0$ dans (2.6) pour obtenir l'invariant topologique associé à D^+. A cette fin, nous allons donner une interprétation probabiliste de $Q(x,\varepsilon,x)$.

Or il y a un semi-groupe que l'on sait aisément interpréter stochastiquement [B.3]: il s'agit du semi-groupe associé au Laplacien horizontal sur $\Gamma(S\otimes\xi)$ qui agit sur $f\in\Gamma(S\otimes\xi)$ par la formule:

$$\Delta^H f(x_0) = \sum_{1\le i\le d} (\nabla_{e_i(x_0)}(\nabla_{e_i(x_0)} f(x_0))) - \sum_{1\le i\le d} \nabla_{\nabla_{e_i(x_0)} e_i(x_0)} f(x_0), \tag{2.7}$$

$(e_1(x),\dots,e_d(x))$ étant un champ de repères défini sur un voisinage de x_0.

Considérons en effet un mouvement brownien $x_s(x_0)$ sur la variété M, et $\tau_s(x_0)$ le transport parallèle de x_0 à $x_s(x_0)$ suivant la trajectoire de ce brownien.

Si $f\in\Gamma(S\otimes\xi)$, on a au sens de Stratonovitch [B.3], [I.W]

$$d\tau_s^{-1}(x_0)\, f(x_s(x_0)) = \tau_s^{-1}(x_0)\, \nabla_{dx_s(x_0)} f(x_s(x_0)). \tag{2.8}$$

Nous donnerons un peu plus loin une interprétation moins intrinsèque de cette formule.

La représentation stochastique du semi-groupe $\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 \Delta^H}{2}\right]$ s'effectue grâce à la formule suivante:

$$\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 \Delta^H}{2}\right] f(x_0) = E[\tau_{\varepsilon^2}^{-1}(x_0)\, f(x_{\varepsilon^2}(x_0))], \tag{2.9}$$

le remplacement du temps t par ε^2 étant motivé par les calculs qui suivront.

Or il existe *une relation simple* entre Δ^H et D^2.

En effet, considérons la courbure scalaire $K(x)$ en x pour la connexion de Levi-Civita, et le tenseur de courbure L_x pris en x pour le fibré auxiliaire ξ.

Introduisons l'opérateur différentiel d'ordre 0 C (on dit que C est tensoriel dans ce cas) qui applique la fibre de $S^+ \otimes \xi$ au-dessus de x sur elle-même et la fibre de $S^- \otimes \xi$ au-dessus de x sur elle-même au moyen de la formule:

$$C_x = +\frac{1}{4} K_x \otimes I_x + \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i(x)\, e_j(x) \otimes L_x(e_i(x), e_j(x)). \tag{2.10}$$

La relation cherchée est donnée par la formule de Lichnerowitz

$$D^2 = -\Delta^H + C. \tag{2.11}$$

La remarque essentielle est la suivante: C est *tensoriel*, donc $\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 \Delta^H}{2}\right]$ et $\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\right]$ sont liés par une formule de Feynman-Kac matricielle.

En effet, considérons la solution de l'équation différentielle:

$$dU_s(x_0) = -\frac{1}{2}\, U_s(x_0) \sum_{i<j} e_i(x_0)\, e_j(x_0) \otimes \tau_s^{-1}(x_0)\, L_{x_s(x_0)}(\tau_s(x_0)\, e_i(x_0), \tau_s(x_0)\, e_j(x_0))\, \tau_s(x_0)\, ds \quad U_0(x_0) = I. \tag{2.12}$$

$U_s(x_0)$ est un endomorphisme aléatoire qui agit sur la fibre de $S \otimes \xi$ au-dessus de x_0 en conservant $S^+ \otimes \xi$ et $S^- \otimes \xi$.

Enfin, posons:

$$k_s(x_0) = \exp\left[-\frac{1}{8} \int_0^s K(x_u(x_0))\, du\right]. \tag{2.13}$$

On a ([B.1], the 2.5):

$$\exp\left[-\frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\right] f(x_0) = E[k_{\varepsilon^2}(x_0)\, U_{\varepsilon^2}(x_0)\, \tau_{\varepsilon^2}^{-1}(x_0)\, f(x_{\varepsilon^2}(x_0))]. \tag{2.14}$$

Rappelons que la supertrace d'un endomorphisme σ de la fibre de $S \otimes \xi$ au-dessus de x sur elle-même est définie par:

$$Tr_s(\sigma) = Tr_{S^+ \otimes \xi}(\sigma) - Tr_{S^- \otimes \xi}(\sigma)$$

si l'endomorphisme σ conserve $S^+ \otimes \xi$ et $S^- \otimes \xi$.

L'endomorphisme aléatoire $U_{\varepsilon^2}(x_0)\, \tau_{\varepsilon^2}^{-1}(x_0)$ conserve bien la parité des spineurs, mais applique la fibre au-dessus de $x_{\varepsilon^2}(x_0)$ sur la fibre au-dessus de x_0.

Or, si $\varepsilon > 0$, la loi de $x_{\varepsilon^2}(x_0)$ possède une densité, et donc $x_{\varepsilon^2}(x_0)$ est presque sûrement différent de x_0. *On ne peut donc pas en général définir la super-trace de* $U_{\varepsilon^2}(x_0)\,\tau_{\varepsilon^2}^{-1}(x_0)$, sauf si $x_0 = x_{\varepsilon^2}(x_0)$.

On contourne cette difficulté en procédant de la façon suivante: si x et y sont assez proches, on peut relier x à y par une seule géodésique. Appelons $\tau_1(x,y)$ l'opérateur de transport parallèle de x à y suivant cette unique géodésique.

Introduisons une fonction troncatrice $\varphi(x,y)$ C^∞ sur $M \times M$, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 sur un voisinage V_1 de la diagonale de $M \times M$ et nulle en dehors d'un voisinage V_2 de $M \times M$. On peut choisir ce voisinage assez petit pour que $\tau_1(x,y)$ soit bien défini si $\varphi(x,y)$ est non nul.

Si $\varphi(x_0,\ x_{\varepsilon^2}(x_0))$ est non nul, $\tau_1(x_0, x_{\varepsilon^2}(x_0))$ est bien défini et applique la fibre au-dessus de x_0 sur la fibre au-dessus de $x_{\varepsilon^2}(x_0)$. Par suite, $U_{\varepsilon^2}(x_0)\,\tau_{\varepsilon^2}^{-1}(x_0)$ $\tau_1(x_0, x_{\varepsilon^2}(x_0))$ applique *la fibre de* x_0 *sur la fibre au-dessus de* x_0, en conservant le signe des spineurs. On peut donc *définir sa super-trace*, et introduire la mesure $\mu_\varepsilon(x_0)$ définie par:

$$f \to E[f(x_{\varepsilon^2}(x_0))\ \varphi(x_0, x_{\varepsilon^2}(x_0))\ k_{\varepsilon^2}(x_0)\ Tr_s\{U_{\varepsilon^2}(x_0)\ \tau_{\varepsilon^2}^{-1}(x_0)\ \tau_1(x_0, x_{\varepsilon^2}(x_0))\}] \tag{2.15}$$

pour une fonction f borélienne bornée de M dans $\mathbb{R}$.

La proposition capitale pour la suite est la suivante:

Proposition II.1. *On peut choisir la fonction troncatrice φ pour que la mesure $\mu_\varepsilon(x_0)$ possède une densité $q(x_0,\varepsilon,y)$ C^∞ en $\varepsilon > 0$, $x_0 \in M$, $y \in M$.*

De plus, on a dans ce cas:

$$\operatorname{Ind} D^+ = \int_M q(x,\varepsilon,x)\,dx\,. \tag{2.16}$$

Preuve. Soit un entier $\tilde{d} > d$. $\mathbb{R}^d$ s'injecte naturellement dans $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$. Notons π la projection de $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ dans $\mathbb{R}^d$.

On utilise la construction de [Sch] du mouvement brownien sur une variété riemannienne, par plongement dans une variété linéaire $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ de dimension plus grande.

Il existe en effet un plongement $y \to \psi_x(y)$ de M dans $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, dépendant de façon C^∞ de $x \in M$ et $y \in M$, tel que $\psi_x(x) = 0$, et tel que sur un voisinage de la diagonale de $M \times M$, $\psi_x(y)$ constitue le système de coordonnées exponentielles de y issues de x; on peut aussi supposer que $\psi_x(y)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sur ce voisinage.

On peut aussi choisir cette famille de plongement $y \to \psi_x(y)$ pour qu'il soit possible de trouver un entier m, et $(m+1)$ champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ notés $X_i(x,y)$ indexés par $x \in M$, C^∞ en (x,y), dont toutes les dérivées de tout ordre en $x \in M$, $y \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ sont bornées et qui possèdent la propriété suivante:

Introduisons m mouvements browniens indépendants w_i, et considérons la solution de l'équation différentielle de Stratonovitch:

$$\begin{aligned} dx_s(x_0,\varepsilon) &= \varepsilon \sum_{i=1}^{m} X_i(x_0,\ x_s(x_0,\varepsilon))\,dw_i + \varepsilon^2 X_0(x_0, x_s(x_0,\varepsilon))\,ds \\ x_0(x_0,\varepsilon) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Alors $x_{\varepsilon^2}(x_0)$ a même loi que $x_1(x_0, \varepsilon)$.

Remarquons que, contrairement à la construction intrinsèque du Brownien sur M [B.3], on considère ici un Brownien $(w_1, \ldots, w_m)$, *m pouvant être strictement plus grand que d.* Aussi, quitte à adjoindre des Browniens w_i supplémentaires, on peut supposer que les d premiers champs de vecteurs $X_i(x, y)$ $1 \leqq i \leqq d$ sont pour tout y de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et que les champs de vecteurs $X_i(x, y)$ $i > d$ sont nuls si y n'appartient pas à un certain voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$. M étant compacte, on peut supposer que ce voisinage ne dépend pas de x.

Grâce à ce changement de carte exponentielle, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ en $x = 0$ coïncide avec la mesure riemannienne en x sur M.

Essayons maintenant d'interpréter les quantités figurant dans (2.15).

$\varphi(x, y)$ s'interprète comme une fonction C^∞ de $M \times \mathbb{R}^d$ dans $[0, 1]$, égale à 1 sur un voisinage assez petit de $M \times \{0\}$ et nulle en dehors d'un voisinage assez petit de $M \times \{0\}$.

Pour interpréter les opérateurs de transport parallèles, nous avons besoin d'introduire quelques notions. Notons $\tilde{M}_{p,p'}$ l'ensemble des applications *linéaires* de $\mathbb{R}^p$ dans l'espace des matrices complexes à p lignes et p' colonnes.

Considérons une courbe différentiable sur M issue de x_0: notons-la h_s. Soit $\tau_{S,s}(h)$ l'opérateur de transport parallèle suivant h_s associée à la connexion de Levi-Civita: $\tau_{S,s}(h)$ s'interprète comme une matrice à d lignes et d colonnes.

Quitte à choisir convenablement la famille de plongement $y \to \psi_x(y)$, on peut trouver une application $(x, y) \to A_S(x, y)$ C^∞ de $M \times \mathbb{R}^d$ dans $\tilde{M}_{d,d}$ pour que $\tau_{S,s}(h)$ soit la solution de *l'équation linéaire* suivante:

$$d\tau_{S,s}(h) = -(A_S(x, h_s)\, dh_s)\, \tau_{S,s}(h). \tag{2.18}$$

On peut aussi supposer que les dérivées de tout ordre en (x, y) de $A_S(x, y)$ sont bornées (cf. [L1] p. 387 pour plus de précisions).

Appliquons le principe de transfert de [B.3] et [I.W]: le transport parallèle pour la connexion de Levi-Civita suivant la trajectoire de $x_s(x_0, \varepsilon)$ vérifie l'équation linéaire de Stratonovitch:

$$d\tau_{S,s}(x_0, \varepsilon) = -(A_S(x_0, x_s(x_0, \varepsilon))\, dx_s(x_0, \varepsilon))\, \tau_{S,s}(x_0, \varepsilon). \tag{2.19}$$

Considérons maintenant l'opérateur du transport parallèle associé à la connexion Λ; notons-le $\tau_{\xi,s}(h)$. C'est une matrice à $\dim \xi$ lignes et $\dim \xi$ colonnes.

On peut trouver une application $(x, y) \to A_\xi(x, y)$ de $M \times \mathbb{R}^d$ dans $\tilde{M}_{d,\dim\xi}$, C^∞ en (x, y) et de dérivées de tout ordre bornées, telle que $\tau_{\xi,s}(h)$ soit la solution de:

$$\begin{aligned} d\tau_{\xi,s}(h) &= -(A_\xi(x_0, h_s)\, h'_s\, ds)\, \tau_{\xi,s}(h) \\ \tau_{\xi,0}(h) &= Id. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Le principe du transfert implique:

$$d\tau_{\xi,s}(x_0, \varepsilon) = -(A_\xi(x_0, x_s(x_0, \varepsilon)) \cdot dx_s(x_0, \varepsilon))\, \tau_{\xi,s}(x_0, \varepsilon). \tag{2.21}$$

Posons:

$$\tau_s(x_0, \varepsilon) = \tau_{S,s}(x_0, \varepsilon) \otimes \tau_{\xi,s}(x_0, \varepsilon) \tag{2.22}$$

et posons:

$$k_1(x_0,\varepsilon)=\exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{8}\int_0^1 K(x_s(x_0,\varepsilon))\,ds\right]. \tag{2.23}$$

Grâce au plongement, $y\to\psi_x(y)$, L_y s'interprète comme une application C^∞ en $x\in M$, $y\in\mathbb{R}^{\bar d}(x,y)\to L(x,y)$ à valeurs dans l'espace des applications bilinéaires de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ dans l'ensemble des matrices complexes à $\dim\xi$ lignes et $\dim\xi$ colonnes.

Introduisons une base orthonormée e_i de $\mathbb{R}^d$. Considérons la solution $U_s(x_0,\varepsilon)$ de l'équation

$$\begin{aligned}dU_s(x_0,\varepsilon)&=\frac{-\varepsilon^2}{2}\,U_s(x_0,\varepsilon)\sum_{i<j}e_ie_j\otimes\tau_{\xi,s}^{-1}(x_0,\varepsilon)\\ &L(x,x_s(x_0,\varepsilon))\,(\tau_{S,s}(x_0,\varepsilon)\,e_i,\ \tau_{S,s}(x_0,\varepsilon))\,e_j)\ \tau_{\xi,s}(x_0,\varepsilon)\,ds\,.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Moyennant le changement de coordonnées donné par $y\to\psi_{x_0}(y)$, $(x_{\varepsilon^2}(x_0)$, $k_{\varepsilon^2}(x_0),\tau_{\varepsilon^2}(x_0),U_{\varepsilon^2}(x_0))$ a même loi que $(x_1(x_0,\varepsilon),k_1(x_0,\varepsilon),\tau_1(x_0,\varepsilon),U_1(x_0,\varepsilon))$.

Or (2.18), (2.20) et (2.24) sont des équations *linéaires*: de plus dans (2.17), les champs de vecteurs X_i ont des dérivées de tout ordre bornées en $x\in M$ et $y\in\mathbb{R}^{\bar d}\cdot x_1(x_0,\varepsilon)$, $k_1(x_0,\varepsilon)$, $\tau_1(x_0,\varepsilon)$ et $U_1(x_0,\varepsilon)$ vérifient donc l'hypothèse H_1, l'ensemble des paramètres Λ étant la variété M. Notons π la projection orthogonale de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^{\bar d}$.

De plus, $\pi(x_1(x_0,\varepsilon))/\varepsilon$ *considéré comme variable aléatoire dans* $\mathbb{R}^d$ vérifie les hypothèses H_1 et H_2 car

$$\pi(x_1(x_0,\varepsilon)/\varepsilon)=\sum_{i=1}^m\int_0^1\pi X_i(\mathrm{x},\mathrm{x}_s(x_0,\varepsilon))\,dw_i+\varepsilon\int_0^1\pi X_0(x,x_s(x_0,\varepsilon))\,ds\,, \tag{2.25}$$

et car sur un voisinage de $y=0$, les champs de vecteurs $\pi X_i(x,0)$ $i\leqq d$ engendrent $\mathbb{R}^d$.

Donc $\pi(x_1(x_0,\varepsilon))$ possède une densité sur $\mathbb{R}^d$ notée $p'(x_0,\varepsilon,y)$, C^∞ en $x_0\in M$, $\varepsilon>0$, $y\in\mathbb{R}^d$.

Si h est une section de $S\otimes\xi$, à support inclus dans un voisinage assez petit de x_0, on a:

$$\begin{aligned}&\exp\left[-\frac{\varepsilon^2D^2}{2}\right]h(x_0)\\ &\quad=E[\varphi(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\,k_1(x_0,\varepsilon)\,U_1(x_0,\varepsilon)\,\tau_1^{-1}(x_0,\varepsilon)\,h(x_1(x_0,\varepsilon))] \qquad (2.26)\\ &\quad=E[\varphi(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\,k_1(x_0,\varepsilon)\,U_1(x_0,\varepsilon)\,\tau_1^{-1}(x_0,\varepsilon)\,h(\pi x_1(x_0,\varepsilon))]\end{aligned}$$

car si $x_1(x_0,\varepsilon)$ est assez proche de 0, on a $x_1(x_0,\varepsilon)=\pi x_1(x_0,\varepsilon)$.

Comme $\pi x_1(x_0,\varepsilon)/\varepsilon$ vérifie H_2, le calcul de Malliavin [K.S.1] implique que $\exp\left[-\frac{\varepsilon^2D^2}{2}\right]$ se représente au voisinage de x_0 (ici x_0 est identifié à 0) par un noyau C^∞ $Q_\varepsilon(x_0,y)$ d'opérateurs.

De plus, on a:

$$\begin{aligned}Q_\varepsilon(x_0,x_0)&=E[\varphi(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\,k_1(x_0,\varepsilon)\,U_1(x_0,\varepsilon)\,\tau_1^{-1}(x_0,\varepsilon)\,|\\ &\pi(x_1(x_0,\varepsilon))=0]\cdot p'(x_0,\varepsilon,0)\,.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Donc

$$Tr_s Q_\varepsilon(x_0, x_0) \tag{2.28}$$
$$= p'(x_0, \varepsilon, 0) E[\varphi(x_0, x_1(x_0, \varepsilon))\, k_1(x_0, \varepsilon)\, Tr_s\{U_1(x_0, \varepsilon)\, \tau_1^{-1}(x_0, \varepsilon)\} \mid \pi(x_1(x_0, \varepsilon)) = 0]$$

Revenons à la mesure $\mu_\varepsilon(x_0)$. Elle s'interprète comme la mesure sur $\mathbb{R}^d$ $\mu(x_0, \varepsilon)$ définie par:

$$\begin{aligned} f \to E[f(\pi(x_1(x_0, \varepsilon))\ \varphi(x_0, x_1(x_0, \varepsilon))\ k_1(x_0, \varepsilon) \\ \cdot\ Tr_s\{U_1(x_0, \varepsilon)\ \tau_1^{-1}(x_0, \varepsilon)\ \tau_1(x_0, x_1(x_0, \varepsilon))\}]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Si le support de φ est assez petit, elle possède une densité car $\pi(x_1(x_0, \varepsilon)'/\varepsilon)$ vérifie H_2.

Cette densité $\tilde{q}(x_0, \varepsilon, y)$ est C^∞ en $\varepsilon > 0$, $x_0 \in M$, $y \in \mathbb{R}^d$. De plus si $\varphi(x_0, x_1(x_0, \varepsilon)) \neq 0$ et si $\pi(x_1(x_0, \varepsilon)) = 0$, $\tau_1(x_0, x_1(x_0, \varepsilon)) = Id(\tau_1(x, y)$ désignant l'opérateur de transport parallèle le long de l'unique géodésique reliant x à y).

$$\tilde{q}(x_0, \varepsilon, 0) \tag{2.30}$$
$$= p'(x_0, \varepsilon, 0) E[\varphi(x_0, x_1(x_0, \varepsilon)) k_1(x_0, \varepsilon) Tr_s\{U_1(x_0, \varepsilon) \tau_1^{-1}(x_0, \varepsilon)\} \mid \pi(x_1(x_0, \varepsilon)) = 0].$$

Par suite $\tilde{q}(x_0, \varepsilon, 0)$ s'identifie à $q(x_0, \varepsilon, x_0)$ et à $Tr_s Q(x_0, \varepsilon, x_0)$. Il ne reste plus qu'à appliquer (2.6) pour conclure.

Incidemment, on a démontré la proposition suivante:

Proposition II.1. *Considérons une sous-variété M de $\mathbb{R}^d$. Supposons-la compacte et munie d'une structure de variété riemannienne. Soit V un fibré vectoriel sur M, et soit Δ^H le laplacien horizontal associé à une connexion arbitraire sur V.*

Il existe un Brownien m-dimensionnel et un processus $z_0(x, \varepsilon, w)$ sur V, issu de $v \in V$, qui possède les propriétés suivantes:

(i) *$z_1(v, \varepsilon, w)$ est C^∞ au sens ordinaire en (x, ε) et C^∞ au sens de Malliavin en w.*

(ii) *Pour tout entier j, j', i, tout multi-indice $(\alpha), (\alpha')$, tout $p > 1$, et tout compact K de V:*

$$\operatorname*{Sup}_{\varepsilon \in [0,1], x \in X} E\left[\left| \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial v^{(\alpha)}} \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} D^i \frac{\partial^{(\alpha')}}{\partial v^{(\alpha')}} \frac{\partial^{j'}}{\partial \varepsilon^{j'}} x_1(x, \varepsilon, w) \right|^p \right] < \infty. \tag{2.31}$$

(iii) *$z_0(x, \varepsilon, w)$ est une réalisation du mouvement brownien horizontal sur V associé à $(\varepsilon^2 \Delta)^H$.*

On vérifie facilement que ([D.F.N.] tome 1, p. 288)

$$R_{x_0}(y, z) = \left(\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0, 0)\, z\, y\right) - \left(\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0, 0)\, y\, z\right). \tag{2.32}$$

III. Le theoreme d'Atiyah-Singer

La proposition précédente nous permet de nous ramener à l'étude de la densité en 0 de la mesure $\mu(x_0, \varepsilon)$ sur $\mathbb{R}^d$:

$$f \to E[\varphi(x_0, x_1(x_0, \varepsilon))\ k_1(x_0, \varepsilon)\ V(x_0, \varepsilon)\ f(\pi(x_1(x_0, \varepsilon)))] \tag{3.1}$$

avec

$$V(x_0,\varepsilon)=Tr_s\{U_1(x_0,\varepsilon)\,\tau_1^{-1}(x_0,\varepsilon)\,\tau_1(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\}\,. \tag{3.2}$$

L'idée est d'appliquer le théorème I.1 en posant:

$$\begin{aligned} &F(x_0,\varepsilon)=\pi x_1(x_0,\varepsilon)/\varepsilon\,.\\ &J(x_0,\varepsilon)=k_1(x_0,\varepsilon)\;\varphi(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\;V(x_0,\varepsilon)\,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

$F(x_0,\varepsilon)$ vérifie clairement H_1 et H_2. $J(x_0,\varepsilon)$ vérifie aussi H_1. Il ne reste donc qu'a vérifier H_3.

Les calculs sont très semblables à ceux de [Az.2] ou à ceux de [B.1], à la différence près qu'ils ne sont pas intrinsèques.

Considérons un mouvement brownien $\tilde{\gamma}_t$ à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^{\frac{d(d-1)}{2}}$, indépendant des browniens initiaux w_i. $\tilde{P}$ désigne la mesure de Wiener associée. L'introduction de ce mouvement brownien, due à Bismut, va nous permettre de séparer dans $V(x_0,\varepsilon)$ la contribution du fibre auxiliaire ξ et du fibré des spineurs S.

Comme $\mathbb{R}^{\frac{d(d-1)}{2}}$ s'identifie à l'espace des matrices antisymétriques, $\tilde{\gamma}_t$ est aussi un brownien à valeurs dans l'espace des matrices antisymétriques.

Notons P_{x_0} la loi du processus gaussien

$$Z_s(x_0)=\sum_{i=1}^{d}X_i(x_0,0)\,w_{i,s}=\frac{\partial\pi x_s(x_0,0)}{\partial\varepsilon},$$

conditionnée par le fait que $Z_1(x_0)=0$. $Z_s(x_0)$ est donc un pont brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Introduisons la solution $S_t(x_0,\varepsilon,S)$ de l'équation différentielle d'Ito:

$$\begin{aligned} &\delta S_t(x_0,\varepsilon,S)=-\frac{\varepsilon^2}{2}\,S_t(x_0,\varepsilon,S)\sum_{i<j}e_i e_j\,\delta\tilde{\gamma}_t^{i,j}\\ &S_0(x_0,\varepsilon,S)=Id_{S_{x_0}}\,.\end{aligned} \tag{3.4}$$

$S_t(x_0,\varepsilon,S)$ est un opérateur agissant sur la fibre de S au-dessus de x_0.

On peut définir aussi un endomorphisme de la fibre de ξ au-dessus de x_0 qui soit la solution de:

$$\begin{aligned} &\delta S_t(x_0,\varepsilon,\xi)\\ &\quad=S_t(x_0,\varepsilon,\xi)\sum_{i<j}\tau_{\xi,0}^{-1}(x_0,\varepsilon)\,L_{x_s(x_0,\varepsilon)}(\tau_{\xi,s}(x_0,\varepsilon)\,e_i,\;\tau_{\xi,s}(x_0,\varepsilon)e_j)\\ &\qquad\cdot\tau_{\xi,s}(x_0,\varepsilon)\,\delta\tilde{\gamma}_t^{i,j}\;\;S_0(x_0,\xi,\xi)=Id_{x_0}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Notons R_{x_0} le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne [D.F.N.]. $Z_s(x_0)$ est un vecteur tangent à la variété M en x_0. Donc $R_{x_0}(dZ_s(x_0),Z_s(x_0))$ est une matrice antisymmétrique. On peut donc définir son pfaffien. En effet, si A est une matrice antisymétrique, elle s'identifie à un élément de $\Lambda^2(\mathbb{R}^d)$.

Par définition le pfaffien satisfait à:

$$\frac{\hat{A}^l}{d!}=Pf\{A\}\;e_1\wedge\ldots\wedge e_d \tag{3.6}$$

si $d=2l$.

Proposition III.1. *Si* $j<d$, $\frac{\partial^{(j)}}{\partial\varepsilon^{(j)}}\,J(x_0,0)=0$, *De plus,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{d!}\,E\left[\frac{\partial^{(d)}}{\partial\varepsilon^{(d)}}\,J(x_0,0)\mid F(x_0,0)=0\right]\\ =E\left[Pf\left\{-\frac{i}{2}\left(\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0),\,Z_s(x_0))+\tilde{\gamma}_1\right)\right\}\,Tr\,S_1(x_0,0,\xi)\right].\end{aligned}\tag{3.7}$$

Preuve. Comme nous l'avions annoncé, le brownien auxiliaire $\tilde{\gamma}_1$ permet de séparer le rôle des deux fibrés. En effet, d'après la formule d'Ito, ([B.1], 3.16), on a:

$$U_1(x_0,\varepsilon)=E^{\tilde{P}}[S_1(x_0,\varepsilon,S)\otimes S_1(x_0,\varepsilon,\xi)]\tag{3.8}$$

et donc:

$$\begin{aligned}V(x_0,\varepsilon)=E^{\tilde{P}}[Tr_s\{S_1(x_0,\varepsilon,S)\;\tau_{S,1}^{-1}(x_0,\varepsilon)\\ \cdot\,\tau_{S,1}(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\}\;Tr\{S_1(x_0,\varepsilon,\xi)\;\tau_{\xi,1}^{-1}(x_0,\varepsilon)\\ \cdot\,\tau_{\xi,1}(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\}]\end{aligned}\tag{3.9}$$

car

$$\begin{aligned}Tr_s\{(S_1(x_0,\varepsilon,S)\otimes S_1(x_0,\varepsilon,\xi))\;\tau_1^{-1}(x_0,\varepsilon)\;\tau_1(x_0,x_1(x_0,\varepsilon)\}\\ =Tr_s\{S_1(x_0,\varepsilon,S)\;\tau_{S,1}^{-1}(x_0,\varepsilon)\;\tau_{S,1}(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\}\\ \cdot\,Tr\{S_1(x_0,\varepsilon,\xi)\;\tau_{\xi,1}^{-1}(x_0,\varepsilon)\;\tau_{\xi,1}(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Or les valeurs de $x_1(x_0,\varepsilon)$ qui sont trop éloignées de x_0 disparaissent grâce à l'adjonction de la fonction troncatrice $\varphi(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))$. Ceci va justifier les calculs suivants.

Pour la mesure de Wiener P, $k(x_0,\varepsilon)$ tend vers 1 presque sûrement quand $\varepsilon\to 0$. $\varphi(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))$ tend aussi presque sûrement vers 1.

Pour la mesure $P\otimes\tilde{P}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Tr\{S_1(x_0,\varepsilon,\xi)\;\tau_{\xi,1}^{-1}(x_0,\xi)\;\tau_{\xi,1}(x_0,x_1(x_0,\xi))\}=Tr\{S_1(x_0,0,\xi)\}.\tag{3.11}$$

Evaluons maintenant:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Tr_s\{S_1(x_0,\varepsilon,S)\;\tau_{S,1}^{-1}(x_0,\varepsilon)\;\tau_{S,1}(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\}.\tag{3.12}$$

A cette fin, on voudrait utiliser le résultat suivant ([B.1], th. 1.5): soit un chemin C^∞ $\varepsilon\to h_\varepsilon$ à valeurs dans le groupe des spineurs, égal à I en 0. h_0' est un élément de l'algèbre de Lie de G en I, c'est donc une matrice antisymétrique dont on peut calculer le pfaffien. Comme h_ε agit sur S en conservant S^+ et S^-, on peut calculer sa supertrace, et l'on a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-l}\,Tr_s\{h_\varepsilon\}=i^l\,Pf\{h_0'\}.\tag{3.13}$$

Malheureusement, on ne peut appliquer directement ce résultat à (3.11), car $S_1(x_0,\varepsilon,S)$ n'appartient pas au groupe des spineurs, étant donné par une équation d'Ito. Aussi introduisons la solution de l'équation de Stratonovitch:

$$dR_s(x_0,\varepsilon,S)=-\frac{\varepsilon^2}{2}\,R_s(x_0,\varepsilon,S)\sum_{i<j} e_i\,e_j\,d\tilde{\gamma}_s^{i,j}.\tag{3.14}$$

L'intégrale de Stratonovitch ayant un caractère intrinsèque, $R_1(x_0, \varepsilon, S)$ est un élément du groupe des spineurs. De plus, on a la formule:

$$S_1(x_0, \varepsilon, S) = \exp\left[+\frac{d(d-1)}{16}\varepsilon^4\right] R_1(x_0, \varepsilon, S) \tag{3.15}$$

qui provient du fait que $(e_i e_j)^2 = -1$ si $i<j$.

(3.12) revient désormais à calculer:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^d} Tr_s\{R_1(x_0, \varepsilon, S)\, \tau_{S,1}^{-1}(x_0, \varepsilon)\, \tau_{S,1}(x_0, x_1(x_0, \varepsilon))\}. \tag{3.12$'$}$$

Or $\varepsilon \to h_\varepsilon = R_1(x_0, \varepsilon, S)\ \tau_{S,1}^{-1}(x_0, \varepsilon)\ \tau_{S,1}(x_0, x_1(x_0, \varepsilon))$ est un chemin C^∞ à valeurs dans le groupe des spineurs.

Supposons que $x_1(x_0, \varepsilon)$ est assez proche de x_0, de façon à ce que $\varphi(x_0, x_1(x_0, \varepsilon))$ soit non nulle. Puisqu'au voisinage de x_0, nous sommes en coordonnées exponentielles, nous avons:

$$\begin{aligned} &d\tau_{S,s}(x_0, x_1(x_0, \varepsilon)) \\ &\quad = -(A_S(x_0, s x_1(x_0, \varepsilon))\, x_1(x_0, \varepsilon))\, ds\, \tau_{S,s}(x_0, x_1(x_0, \varepsilon))\ \tau_{S,0}(x_0, x_1(x_0, \varepsilon)) = Id \end{aligned} \tag{3.16}$$

car l'unique géodésique reliant x_0 à $x_1(x_0, \varepsilon)$ est dans notre système de coordonnées la courbe $s \to s x_1(x_0, \varepsilon)$.

De plus $A(x_0, 0) = 0$, car les symboles de Chritoffel sont nuls en 0, puisque nous sommes en coordonnées exponentielles. Donc,

$$\tau_{S,1}(x_0, x_1(x_0, \varepsilon)) = Id - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial y}(x_0, 0)\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}(x_0, 0), \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}(x_0, 0)\right) + o(\varepsilon)^2. \tag{3.17}$$

Or $\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) = Z_1(x_0)$. Donc

$$\tau_{S,1}(x_0, x_1(x_0, \varepsilon)) = Id - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial y}(x_0, 0)\, Z_1(x_0), Z_1(x_0)\right) - o(\varepsilon^2). \tag{3.18}$$

Appliquons maintenant le principe du transfert de [B.3] ou [I.W]. $\tau_{S,s}(x_0, \varepsilon)$ est donné par l'équation différentielle stochastique:

$$d\tau_{S,s}(x_0, \varepsilon) = -(A_S(x_0, x_s(x_0, \varepsilon))\, dx_s(x_0, \varepsilon))\ \tau_{S,s}(x_0, \varepsilon)\ \tau_{S,0}(x_0, \varepsilon) = Id. \tag{3.19}$$

Comme $x_s(x_0, 0) = 0$ et comme $A_s(x_0, 0) = 0$, on a:

$$\tau_{S,1}(x_0, \varepsilon) = Id - \varepsilon^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0, 0)\frac{\partial x_s}{\partial \varepsilon}(x_0, 0), d\left(\frac{\partial x_s}{\partial \varepsilon}(x_0, 0)\right)\right) + o(\varepsilon^2). \tag{3.20}$$

Or $\frac{\partial x_s}{\partial \varepsilon}(x_0, \varepsilon) = Z_s(x_0)$, et la formule d'Ito-Stratonovitch montre que:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0, 0)\, Z_s(x_0), dZ_s(x_0)\right) \\ &\quad = \left(\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0, 0)\, Z_1(x_0), Z_1(x_0)\right) - \int_0^1 \left(\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0, 0)\, dZ_s(x_0), Z_s(x_0)\right). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Il résulte alors de la formule (2.32) que:

$$\tau_{S,1}(x_0,\varepsilon) \tag{3.22}$$
$$= Id + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0), Z_s(x_0)) = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0,0), Z_1(x_0), Z_1(x_0)\right) - o(\varepsilon^2)$$

et donc que

$$\tau_{S,1}^{-1}(x_0,\varepsilon) \tag{3.23}$$
$$= Id - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0), Z_s(x_0)) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0,0)\, Z_1(x_0), Z_1(x_0)\right) + o(\varepsilon^2).$$

De (3.14) il résulte que:

$$\dot{R}_1(x_0,\varepsilon,S) = Id - \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i<j} e_i e_j\, \tilde{\gamma}_1^{i,j} + o(\varepsilon^2). \tag{3.24}$$

Dans (3.18) et (3.23), les termes $\frac{\partial A_S}{\partial y}(x_0,0)\, Z_1(x_0), Z_1(x_0)$ disparaissent. De plus $\tilde{\gamma}_1$ s'identifie à une matrice antisymétrique que nous noterons encore $\tilde{\gamma}_1$.

(3.23), (3.18), (3.24) et (3.13) impliquent que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^d}\, Tr_s\{R_1(x_0,\varepsilon,S)\,\tau_{S,1}^{-1}(x_0,\varepsilon)\,\tau_{S,1}(x_0,x_1(x_0,\varepsilon))\}$$
$$= Pf\left\{-\frac{i}{2}\left(\tilde{\gamma}_1 + \int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0), Z_s(x_0))\right)\right\}. \tag{3.25}$$

Revenons maintenant à la formule (3.3). $F(x_0,0) = Z_1(x_0)$ est une gaussienne non dégénérée de covariance I_d. Donc sa densité en 0 est égale à $(\sqrt{2\pi})^{-d}$. Dans (2.16), on peut donc écrire:

$$q(x_0,0,x_0) \tag{3.26}$$
$$= E^{P_{x_0}\otimes\tilde{P}}\left[Pf\left\{-\frac{i}{4\pi}\left(\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0), Z_s(x_0)) + \tilde{\gamma}_1\right)\right\} Tr\, S_1(x_0,0,\xi)\right].$$

ce qui était le résultat du théorème 3.10 de [B.1].

Pour exprimer l'indice à l'aide des invariants topologiques de la variété, nous n'avons désormais qu'à suivre [B.1] pas à pas. Aussi ne ferons-nous que rappeler les grandes étapes du calcul et les notions cohomologiques nécessaires à sa compréhension ([D.F.N.] [K.N]).

Considérons un fibré principal $Z \xrightarrow{\pi} M$ sur une variété de dimension d, de groupe structural G d'algèbre de Lie g. On dit qu'une application k linéaire f $g x \dots x g \to \mathbb{C}$ appartient à $I_k(G)$ si elle est invariante par l'action de G. Par exemple, si $G = GL_d(\mathbb{R})$, l'algèbre de Lie de G est l'ensemble des matrices carrées, l'application trace appartient à $I_1(G)$ tandis que l'application déterminant appartient à $I_d(G)$.

Introduisons une connexion ω sur ce fibré, à valeurs dans l'algèbre de Lie g de G, de tenseur de courbure Ω. Si $f \in I_k(G)$, considérons la $2k$-forme extérieure $(\varphi)_\omega f$ définie par:

$$\varphi_\omega(f)(X_1, \ldots, X_{2k}) = \frac{1}{2k!} \sum_\sigma \varepsilon_\sigma f(\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \ldots, \Omega(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})), \tag{3.27}$$

la somme étant prise sur les permutations σ de $\{1, \ldots, 2k\}$ dont on note la signature ε_σ. La remarque essentielle est que si l'on change de connexion ω, $\varphi_\omega(f)$ ne varie que d'une $2k$ forme exacte. On peut donc définir la classe de cohomologie de $\varphi_\omega(f)$ sans aucune ambiguïté. L'application φ de $I_k(G)$ dans le $2k^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie s'appelle l'homomorphisme de Weil.

On peut étendre φ de la façon suivante, en introduissant $I(G) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(G)$: f est dans $I(G)$ si f s'écrit $\Sigma f_k, f_k \in I_k(G)$. Dans ce cas, $\varphi_\omega(f) = \Sigma \varphi_\omega(f_k)$, la somme étant en réalité finie car il n'y a pas de formes extérieures non nulles de degré $> d$.

Considérons maintenant quelques exemples: supposons que $G = SO(d)$; l'algèbre de Lie g est donc l'ensemble des matrices antisymétriques. Si A est une matrice antisymétrique, A se décompose dans une base orthonormée directe en bloc de la forme $\begin{bmatrix} 0 & x_i \\ -x_i & 0 \end{bmatrix}$. L'ensemble des x_i intervenant dans cette décomposition reste invariant si on change de base orthonormée directe. Le Pfaffien de A est égal à $\prod_{i=1}^{l} x_i$, si $d = 2l$, comme c'est le cas dans cet article. C'est un polynôme homogène symétrique en les x_i: par polarisation, on en déduit une application f de $I_l(G)$. $\varphi_\omega(f)$ est donc une d-forme associée à une classe de cohomologie $\varphi(f)$. C'est la classe d'Euler qui intervient dans le théorème de Gauss-Bonnet.

Si on considère $\prod_{i=1}^{l} \dfrac{\frac{x_i}{2}}{sh\left(\frac{x_i}{2}\right)}$ au lieu de $\prod_{i=1}^{l} x_i$, on obtient une autre classe caractéristique: en effet, $\prod_{i=1}^{l} \dfrac{x_i}{2} \dfrac{1}{sh\left(\frac{x_i}{2}\right)}$ est encore une application invariante par changement de base orthonormée directe: si on la développe en série entière, elle s'écrit $\sum_k f_k(A)$, chaque f_k étant un polynôme homogène de degré k symétrique en les x_i. On en déduit par polarisation un élément $f_k \in I_k(SO_d(\mathbb{R}))$. $\sum_k \varphi(f_k)$ définit donc une classe de cohomologie, appelée classe d'Atiyah-Singer. Si M est une variété riemannienne munie d'une structure spinorielle, et si G est le groupe des spineurs, on peut procéder comme ci-dessus pour le fibré des spineurs sur M, muni de la connexion de Levi-Civita ω.

$\sum_k \varphi_\omega(f_k)$ est alors le genre d'Atiyah-Singer associé à la métrique riemannienne. Nous le noterons $\hat{A}$.

Rappelons enfin la définition du caractère de Chern d'un fibré: considérons un fibré complexe ξ de groupe structurel $GL_{\dim\xi}(\mathbb{C})$. L'algèbre de Lie est l'ensemble des matrices carrées à $\dim\xi$ lignes et $\dim\xi$ colonnes. Si A est dans l'algèbre de Lie, l'ensemble de ses valeurs propres x_i est invariante par changement de base. Considérons l'application $f\colon A\to\sum_i \exp\left[i\frac{x_i}{2\pi}\right]=Tr\exp\left[i\frac{A}{2\pi}\right]$. Elle se développe en une série entière $\sum_k f_k(A)$, chaque f_k étant un polynôme homogène symétrique de degré k en les x_i. Le caractère de Chern ξ noté $ch\,\xi$ est donc la classe de cohomologie de $\varphi_\omega(f)$, ω étant une connexion complexe arbitraire. Si on spécialise le rôle de la connexion ω, on obtient une forme $ch_\omega\,\xi$.

Une remarque essentielle pour la suite est que toutes les formes obtenues par ce procédé sont de degré pair. *Or l'algèbre des formes de degré pair est commutative.* En particulier, si B est une forme de degré pair, on peut poser:

$$\exp B=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overbrace{B\wedge\ldots\wedge B}^{k\text{ fois}}}{k!}\tag{3.28}$$

la somme étant en réalité finie. *Comme l'algèbre est commutative*, on a:

$$\exp(B+B')=\exp B\wedge\exp B'=\exp B'\wedge\exp B.\tag{3.29}$$

Enfin, on dira que $B\overset{d}{\equiv}B'$ si les deux formes extérieures ont mêmes composantes de degré d.

On peut alors énoncer le:

Théorème III.2 (Atiyah-Singer).

$$\operatorname{Ind}D^+=\int_M\hat{A}\wedge <h_\wedge\xi.\tag{3.30}$$

Preuve. On a déjà vu (2.16) que:

$$\operatorname{Ind}D^+=\int_M q(x_0,0,x_0)\,dx_0.\tag{3.31}$$

(3.6) et (3.26) impliquent que:

$$\begin{aligned}&q(x_0,0,x_0)\,dx_0\\&\equiv E^{P_{x_0}\times\tilde{P}}\left[\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\left(\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0),\,Z_s(x_0))+\tilde{\gamma}_1\right)\right]Tr\,S_1(x_0,0,\xi)\right].\end{aligned}\tag{3.32}$$

De (3.29), on tire que:

$$\begin{aligned}&\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\left(\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0),\,Z_s(x_0))+\tilde{\gamma}_1\right)\right]\\&=\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\left(\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0),\,Z_s(x_0))\right)\right]\wedge\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\tilde{\gamma}_1\right].\end{aligned}\tag{3.33}$$

Or $Z_s(x_0)$ et $\tilde{\gamma}_1$ sont indépendants. On a donc:

$$E^{P_{x_0}\times\tilde{P}}\left[\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\left(\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0), Z_s(x_0))+\tilde{\gamma}_1\right)\right] Tr\, S_1(x_0,0,\xi)\right]$$
$$=E^{P_{x_0}}\left[\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0), Z_s(x_0))\right]\right] \tag{3.34}$$
$$\wedge\, E^{\tilde{P}}\left[\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\tilde{\gamma}_1\right] Tr\, S_1(x_0,0,\xi)\right].$$

Ceci permet de séparer la contribution des deux fibrés.

Si on applique la formule d'Aire de Paul-Levy ([Y]), on reconnaît dans

$$E^{P_{x_0}}\left[\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\int_0^1 R_{x_0}(dZ_s(x_0), Z_s(x_0))\right]\right]$$

le genre d'Atiyah-Singer $\hat{A}(R_{x_0})$.

Le calcul d'Ito permet de reconnaître dans

$$E^{\tilde{P}}\left[\exp\left[-\frac{i}{4\pi}\tilde{\gamma}_1\right] Tr\, S_1(x_0,0,\xi)\right]$$

le caractère de Chern pour le fibré ξ par rapport à la connexion Λ.

S. Watanabe possède pour la formule de Gauss-Bonnet et le théorème de Hirzebruch une démonstration analogue ([I.W.1]), ce sont des cas particuliers du théorème précédent ([Gi], [B.1]).

Bibliographie

[A.S.1] Atiyah, M., Singer, I.: Index of elliptic operators I. Ann. Math. **87**, 484–530 (1968)

[A.S.2] Atiyah, M., Singer, I.: Index of elliptic operators II. Ann. Math. **87**, 546–604 (1968)

[Az.1] Azencott, R.: Grandes déviations et applications. In: Hennequin, P.L. (ed.) Cours de Probabilité de Saint-Flour. (Lect. Notes Math., vol. 774, pp. 1–176, Berlin Heidelberg New York: Springer 1978

[Az.2] Azencott, R.: Une approche probabiliste du théorème de l'indice. Séminaire Bourbaki. Exposé 633. :

[B.1] Bismut, J.M.: The Atiyah-Singer theorem: a probabilistic approach. I.J.F. Anal. **57**, 56–98 (1984

[B.2] Bismut, J.M.: Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander condition. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **56**, 469–505 (1981)

[B.3] Bismut, J.M.: Mécanique aléatoire. In: Dugué, D., Lukacs, E., Rohatgi, V.K. (eds.) Proceedings, Oberwolfach 1980. Lect. Notes Math. vol. 861, Berlin Heidelberg New York: Springer 1981

[B.4] Bismut, J.M.: The Witten complex and the degenerate Morse Inequalities. J. Differ. Geom. **23**, 207–240 (1986)

[B.5] Bismut, J.M.: The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs. Invent. Math. **88**, 91–151 (1986)

[B.6] Bismut, J.M.: Index theorem and equivariant cohomology on the loop space. Comm. Math. Phys. **98**, 213–237 (1985)

[B.7] Bismut, J.M.: Localization formulas, superconnections and the index theorem for families. Comm. Math. Phys. **103**, 127–166 (1986)

[B.V] Berline, N., Vergne, M.: A computation of the equivariant index of the Dirac operator. Bull. Soc. Math. Fr. **113**, 305–340 (1985)

[D.F.N] Doubrovine, D., Fomenko, A., Novikov, S.: La géométrie comtemporaine, tome II. Moscow: Editions de Moscow 1979

[Du] Duncan, T.E.: The heat equation, the Kac-Formula and some index formula in partial differential equation and geometry. In: Byrnes, I. (ed.) (Lect. Notes Pure Appl. Math. Vol. 48, pp. 57–76, New York Basel: Dekker 1979

[Get] Getzler, E.: A short proof of the Atiyah-Singer index theorem. Topology **25**, 111–117 (1988)

[Gi] Gilkey, P.B.: Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer theorem. Boston: Publish or Perish 1984

[I.W] Ikeda, N., Watanabe, S.: Stochastic differential equations and diffusion processes. Amsterdam: North Holland.1981

[I.W.1] Ikeda, N., Watanabe, S.: Malliavin calculus for Wiener's functional and it's application. In: Elworthy, D. (ed.) From local times to global geometry. Montreal: Pitman 1986

[K.N] Kobayashi, S., Nomizu, S.: Foundations of differential geometry, tome II. New York: Interscience 1969

[K.S.1] Kusuoka, S., Stroock, D.: Applications of the Malliavin calculus. In: K. Ito (ed.) Part I. Stochastic Analysis. Proceedings Tanaguchi Symposium. Kinokuniyol North Holland 1989

[K.S.2] Kusuoka, S., Stroock, D.: Applications of the Malliavin calculus. Part. II. J. Fac. Sci. Uni. Tokyo. Sect. 1A Math. **32**, 1–76 (1985)

[L] Leandre, R.: Renormalisation et calcul des variations stochastiques. C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. I. **302**, 135–138 (1986)

[L.1] Leandre, R.: Sur le théorème de l'indice des familles. Séminaire de Strasbourg n° XXII. In: Azema, I., Meyer, P.A., Yor, M. (eds.) Seminaire de probabilites. (Lect. Notes Math., vol. 1321, pp. 348–414) Berlin Heidelberg New York: Springer 1988

[Sch] Schwarz, L.: Construction directe d'une diffusion sur une variété. In: Azema, J., Vor, M. (eds.) Séminaire de probabilités, no. XIX. Lect. Notes Math., vol. 1123, pp. 91–113. Berlin Heidelberg New York: Springer 1985

[Y] Yor, M.: Remarques sur une formule de Paul Levy. In: Azema, J., Yor, M. (eds.) Séminaire de probabilités, No. XIV, (Lect. Notes Math., vol. 784, pp. 343–346) Berlin Heidelberg New York: Springer 1980

Received February 1, 1987; in revised form May 10, 1988