Probab. Th. Rel. Fields 81, 29–77 (1989)

Probability Theory and Related Fields

Flots et series de Taylor stochastiques

Gérard Ben Arous

Centre de Mathématiques appliquées, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05 France

Summary. We study the expansion of the solution of a stochastic differential equation as an (infinite) sum of iterated stochastic (Stratonovitch) integrals. This enables us to give a universal and explicit formula for any invariant diffusion on a Lie group in terms of Lie brackets, as well as a universal and explicit formula for the brownian motion on a Riemannian manifold in terms of derivatives of the curvature tensor. The first of these formulae contains, and extends to the non nilpotent case, the results of Doss [6], Sussmann [17], Yamato [18], Fliess and Normand-Cyrot [7], Krener and Lobry [19] and Kunita [11] on the representation of solutions of stochastic differential equations.

Introduction

La solution d'une équation différentielle stochastique à coefficients infiniment differentiables n'est en général qu'une fonction mesurable du mouvement brownien qui définit l'équation stochastique. Si les champs de vecteurs qui définisent l'équation commutent (i.e. leurs crochets de Lie sont nuls) alors Doss [6] et Sussmann [17] ont montré qu'en fait la solution de l'équation stochastique est une fonction continue du mouvement brownien; cette fonction continue étant donnée par le flot d'une équation différentielle ordinaire. Nous allons ici étudier l'application «solution» qui au mouvement brownien fait correspondre la solution de l'équation stochastique; plus précisément le but de cet article est d'étudier, en temps petit, le flot défini par une équation différentielle stochastique en montrant le role de la formule de Taylor stochastique par R. Azencott [1], J.-M. Bismut [4], E. Platen [16].

Sous le nom de paramétrix trajectorielle, un tel développement (à l'ordre 2) de la solution d'une équation différentielle stochastique a été introduit par P. Malliavin dans [12] et [13], où l'on voit apparaître dans le terme d'ordre 2 les commutateurs des champs de vecteurs définissant l'équation multipliés par des intégrales de P. Lévy. On veut ici généraliser ce type de paramétrix trajectorielle et montrer que ce formalisme contient et étend les représentations explicites des solutions d'équations stochastiques obtenues par B. Gaveau [8], Y. Yamato [18], M. Fliess-D. Normand-Cyrot [7], Krener-Lobry [19] et H. Kunita [11]. Cette représentation explicite donne la solution comme une fonctionnelle des intégrales itérées du mouvement brownien.

Nous montrons que *cette représentation n'est rien d'autre qu'un développement de Taylor dans un bon système de cartes.* Cette approche permet d'étendre ces résultats au cas où l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs qui définissent l'équation n'est pas nilpotente mais seulement de dimension finie. Elle permet aussi, dans un autre contexte, de donner une représentation explicite et universelle du mouvement brownien sur une variété riemannienne en fonction des dérivées covariantes du tenseur de courbure et des intégrales itérées du mouvement brownien euclidien.

Passons au plan détaillé de ce qui suit:

La solution d'une équation differentielle stochastique (sour forme Stratonovitch) à coefficients infiniment differentiables se développe, en temps petit, en fonction des intégrales de Stratonovitch itérées du temps et du mouvement brownien qui définit l'équation. Ces intégrales itérés se réduisent, évidemment, aux monomes $t^m/m!$ dans le cas d'une équation différentielle ordinaire.

Dans [1] Azencott obtient une formule de Taylor stochastique précise, à savoir une majoration du reste en probabilité lorsque t tend vers zéro (rappelée ici au §2 théorème 6). Pour les applications aux développements limités de fonctionnelles de la solution voir Azencott [1] et [2].

On commence ici, dans le §1, par étudier la convergence de la série de Taylor stochastique de la solution d'une équation stochastique à coefficients analytiques. On montre (théorème 9) que la solution d'une équation stochastique à coefficients analytiques est la somme de sa série de Taylor stochastique, ceci avant un temps d'arrêt presque surement strictement positif. La preuve de ce résultat est fondée sur un théorème de dépendance analytique des paramètres et de la condition initiale de la solution d'une équation stochastique à coefficients analytiques (théorème 5). Ce type de convergence avant un temps d'arrêt est clairement le mieux que l'on puisse esperer en général. Cependant une étude directe des séries de Taylor stochastiques menée au §1a) permet d'obtenir des critères concrets de convergence de ces séries sur un intervalle de temps déterministe et même pour tout t (théorème 2, corollaire 1 et proposition 3). *Ces critères permettent de voir la famille infinie des intégrales itérées* comme une diffusion à valeurs dans un espace de Banach (théorème 3) et donc, d'une certaine façon, *comme une «diffusion universelle», puisqu'en temps petit la solution d'une équation à coefficients analytiques est une fonctionnelle régulière universelle des champs de vecteurs qui définissent l'équation et de cette diffusion de dimension infinie.*

On montre ensuite que les résultats classiques de Doss [6] et Sussmann [17] qui lient le flot d'une équation stochastique et celui d'une équation différentielle ordinaire (aléatoire et dépendant du temps) lorsque les champs de vecteurs X_i qui définissent l'équation commutent ou ceux de Yamato [18], Kunita [11], Fliess-Norman Cyrot [7], Krener-Lobry [19] dans le cas où les X_i engendrent une algèbre de Lie nilpotente, sont des conséquences directes du développement en série de Taylor stochastique.

Il est non seulement possible de retrouver ces résultats connus mais aussi de montrer que cette technique s'étend au cas où les X_i engendrent une algèbre de Lie quelconque de dimension finie (théorème 19 et corollaires 2 et 3) même si les champs X_i ne sont pas complets (théorème 20).

On montre d'abord sous des hypothèses générales (§3 théorèmes 10 et 11) que le flot défini par l'équation stochastique est le flot au temps $t=1$ d'un champ de vecteurs $X(t, w)$ aléatoire et dépendant du temps, que l'on peut décrire en temps petit au moyen de la formule de Taylor stochastique. Le résultat ainsi obtenu ne contient pas encore les résultas connus dans les cas abélien et nilpotent car la description de ce champ de vecteur $X(t, w)$ n'est pas suffisamment intrinsèque.

Pour préciser ce résultat, sous l'hypothèse supplémentaire de dimension finie de l'algèbre de Lie engendrée par les champs X_i, et obtenir le théorème 19 *on commence par étudier le cas d'une équation invariante sur un groupe de Lie et donner une expression totalement explicite, en carte exponentielle, du développement de Taylor stochastique de la solution* (*théorème* 12) *ce qui constitue le résultat central de cet article.*

Dans le cas d'un groupe nilpotent (§4b) on vérifie (théorème 17) que cette méthode donne la même expression que celle obtenue en appliquant l'idée de Kunita (11) qui consiste à utiliser l'approximation des intégrales multiplicatives (Ibéro [9]) et la formule de Campbell-Hausdorff. Pour cela on fait le lien entre intégrales stochastiques multiples au sens de Meyer [14] qui apparaissent ici naturellement (comme dans Kunita [11]) et la famille des intégrales itérées. La preuve de l'identité de ces deux développements est a priori inutile mais elle est donnée car elle met en jeu *une interaction «miraculeuse» entre des formules purement algébriques sur la série de Campbell-Hausdorff et des identités probabilistes entre intégrales itérées d'Ito et de Stratonovitch* (reste à savoir si ces identités sont vraiment probabilistes; pour les aspects algèbriques et formels voir Fliess et Normand-Cyrot [7]).

Enfin le (c) du §4 fait le lien entre ces formules et la représentation de la solution obtenue dans la cas résoluble par Kunita et on explicite l'exemple du groupe affine sur **R**.

L'application des résultats du §4 valables sur un groupe au cas d'une équation sur une variété et l'obtention des théorèmes 19, 20 et des corollaires 2 et 3 qui étendent les résultats de [7, 11, 15] est alors immédiate par la réciproque du second théorème de Lie pour un résultat en temps petit et par le theorème de Palais [15] pour un résultat global (sous l'hypothèse de complétude des champs X_i).

La question reste ouverte de savoir si dans le cadre général du §3, ie sans l'hypothèse de dimension finie de l'algèbre de Lie engendrée par les champs X_i, le champ de vecteurs $X(t, w)$ admet pour développement de Taylor stochastique celui que le corollaire 2 lui assignerait, ou encore l'hypothèse de dimension finie est elle nécessaire dans le corollaire 2?

Enfin on montre dans le §6 que ces techniques peuvent s'appliquer dans une autre direction pour décrire, en temps petit, le mouvement brownien sur une variété riemannienne. Ainsi on montre (théorème 21) qu'*en carte normale les coefficients du développement de Taylor stochastique du Brownien sont des* *polynomes universels des dérivées covariantes successives du tenseur de courbure; à l'ordre 2 le mouvement brownien sur la variété est euclidien, les corrections due à la courbure n'apparaissant qu'à l'ordre 3.*

1. Intégrales stochastiques itérées et séries de Taylor stochastiques

Considérons un mouvement brownien r-dimensionnel $(B_t^1 \dots B_t^r)$. Notons, pour simplifier, $B_t^0 = t$. Si $J=(j_1 \dots j_m) \in \{0 \dots r\}^m$, nous noterons B_t^J l'intégrale stochastique itérée de Stratonovich

$$\int_{0<t_1<\dots<t_m<t} \dots \int dB_{t_1}^{j_1} \circ \dots \circ dB_{t_m}^{j_m}.$$

Considérons la famille infinie Y_t de toutes ces intégrales itérées $Y_t = (B_t^J)_{J \in \{0 \dots r\}^m}$, $m \in N^*$. Il s'agit d'un processus à valeurs dans l'espace $\mathscr{T}(\mathbb{R}^{r+1}) = \bigoplus_{m=1}^{\infty} (\mathbb{R}^{r+1})^{\otimes m}$.

Pour $y \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{r+1})$, notons $y^{(m)}$ ls composante de y sur $(\mathbb{R}^{r+1})^{\otimes m}$. $y^{(m)}$ s'écrit à son tour $y^{(m)} = (y^J)_{J \in \{0 \dots r\}^m}$ dans la base canonique de $(\mathbb{R}^{r+1})^{\otimes m}$. Ici, évidemment, $Y_t^{(m)} = (B_t^J)_{J \in \{0 \dots r\}^m}$.

Définissons les séries de Taylor stochastiques.

Définition. Si $x \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{r+1})$, on appellera série de Taylor stochastique définie par x l'élément y de $\mathscr{T}(\mathbb{R}^{r+1})$ défini par $y^J = x^J B_t^J \; \forall J \in \bigcup_{1}^{\infty} \{0 \dots r\}^m$.

Dans la suite, nous allons donner des critères pour la convergence des séries $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{|J|=m} y_J$ ou $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\|J\|=m} y_J$, avec $\|J\| = |J| + \operatorname{card}\{i/j_i = 0\}$.

(a) Intégrales d'Ito itérées

Pour cela, commençons par étudier les intégrales itérées au sens d'Ito (Riemann) $I_t^J = \int_{0<t_1<\dots<t_m<t} \dots \int dB_{t_1}^{j_1} \dots dB_{t_m}^{j_m}$. Soit $J=(j_1 \dots j_m) \in \{0 \dots r\}^m$. Notons

$$a_1 = \inf(i, j_i \neq 0)$$
$$b_1 = \inf(i > a_1, j_i = 0).$$

Puis $a_n = \inf(i > b_{n-1}, j_i \neq 0)$, $b_n = \inf(i > a_n, j_i = 0)$ pour les n tels que ces infima soient bien définis.

Définissons alors $p_1^{(J)} = a_1 - 1$ si a_1 défini, $p_1 = m$ sinon. Puis $p_n(J) = a_n - b_{n-1}$ pour les n tels que a_n et b_{n-1} sont définis. Et $P_n(J) = m - b_{n-1}$ si b_{n-1} est défini et a_n ne l'est pas. $p_i(J)$ est alors la longueur du i^{eme} bloc de zéros consécutifs dans J. Soit $k(J)$ le nombre total de tels blocs de zéros consécutifs dans J. On a alors l'égalité:

Théorème 1. $\forall t \geqq 0 \ E|I_t^J|^2 = \frac{t^{\|J\|}}{a(J)}$ *avec* $a(J) = \|J\|! \prod_{i=1}^{k(J)} \frac{p_i!^2}{(2p_i)!}$. La preuve de ce théorème est renvoyée en appendice.

Remarque. On a une description précise de $a(J)$. Si l'on cherche seulement à encadrer $a(J)$, on peut écrire que: $|J|! \leqq a(J) \leqq \|J\|!$ ce qui est clair sur la forme de $a(J)$, mais aurait pu s'obtenir avec bien moins d'efforts. On peut donner un encadrement de $a(J)$ qui sera utile plus loin. On a:

Lemme 1. $(\frac{1}{4})^{\sum_i^k p_i} \|J\|! \leqq a(J) \leqq (\frac{1}{2})^{\sum_i^k p_i} \|J\|!$

Preuve. Pour tout p $C_{2(p+1)}^{p+1} = 2\left(1 + \frac{p}{p+1}\right) C_{2p}^p$. D'où $2^p \leqq C_{2p}^p \leqq 4^p$ et donc $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sum_i^k p_i} \leqq \prod_i^k p_i!^2 (2p_i)! \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_i^k p_i}$ d'où le résultat.

Remarquons que l'exposant $\sum_i^k p_i$ est simplement le nombre total de zéros dans J. $\sum_i^k p_i = \|J\| - |J|$. En particulier, $\sum_i^k p_i \leqq |J|$.

(b) Intégrales de Stratonovich itérées

Il est possible d'utiliser les majorations précédentes pour majorer les intégrales de Stratonovich; en effet, on a de façon générale:

Proposition 1. *Soient* $X^1 \dots X^m$ *m semi-martingales continues. L'intégrale de Stratonovich itérée* $\int_{0<t_1<\dots<t_m<t} \dots \int dX_{t_1}^1 \circ \dots \circ dX_{t_m}^m$ *est une combinaison linéaire d'intégrales d'Ito itérées, précisément:*

$$\int_{0<t_1<\dots<t_m<t} \dots \int dx_{t_1}^1 \circ \dots \circ dx_{t_m}^m = \sum_{k=\left[\frac{m}{2}\right]}^{m} \frac{1}{2^{m-k}} \sum_{v \in A_m^k} I_t(v)$$

où $A_m^k = \left\{ v = (n_1 \dots n_k) \in \{1, 2\}^k \Big/ \sum_i^k n_i = m \right\}$ *et* $I_t(v)$ *est l'intégrale d'Ito(-Stieltjes) itérée définie par*

$$I_t(v) = \int_{0<t_1<\dots<t_k<t} \dots \int dY_{t_1}^1 \dots dY_{t_k}^k \quad avec \quad Y_s^i = X^{p_j} \ si \ n_i = 1 \ et \ p_j = \sum_{i=1}^j n_i$$

$$et$$

$$Y_s^i = \langle X^{p_j - 1^c}, X^{p_j^c} \rangle \ si \ n_i = 2.$$

La preuve de cette proposition est une récurrence évidente à partir de la définition de l'intégrale de Stratonovich.

En particulier, ceci montre que:

$$B_t^J = \sum_{k=m-m(J)}^{m} \frac{1}{2^{m-k}} \sum_{v \in A_m^k} c_v I_t^J(v),$$

où $J(v)=(l_1 \dots l_k)$ et

$$\begin{cases} l_s = j_{p_s} & \text{si } n_s = 1 \\ l_s = 0 & \text{si } n_s = 2 \end{cases}$$

pour $v=(n \dots n_t)$ et $p_s = \sum_i^s n_i$, et

$$\begin{cases} c_v = 1 & \text{si } j_{p_s - 1} = j_{p_s} \neq 0 \ \forall s \\ c_v = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $m(J)$ est le nombre maximal de paires (j_i, j_{i+1}) d'indices de J tels que $j_i = j_{i+1} \neq 0$. $m - m(J)$ est supérieur ou égal à $\left[\frac{|J|}{2}\right]$. On a toujours $|J(v)| = k$ et $\|J(v)\| = \|J\|$.

Remarque. Cette expression des intégrales de Stratonovich comme combinaison linéaire d'intégrales d'Ito itérées d'ordre inférieur ou égal est inversible et montre aussi que toute intégrale d'Ito itérée est une combinaison linéaire d'intégrales de Stratonovich itérées d'ordre inférieur ou égal.

On peut alors majorer en norme L^2 les intégrales de Stratonovich itérées:

Lemme 2.

$$E(|B_t^J|^2) \leqq b(J)^2 \, t^{\|J\|}$$

avec

$$b(J) = \sum_{b=m-m(J)}^{m} \frac{1}{2^{m-k}} \sum_{v \in A_m^k} c_v \frac{1}{\sqrt{a(J(v))}}.$$

Il suffit d'écrire $\|B_t^J\|_{L^2} \leqq \sum_{k=m-m(J)}^{m} \frac{1}{2^{m-k}} \sum_{v \in A_m^k} c_v \|I_t^{J(v)}\|_{L^2}$ et d'utiliser le lemma 1.

L'expression des $a(J)$ permet de majorer les coefficients $b(J)$:

Lemma 3. $b(J) \leqq \left(\frac{5}{2}\right)^{|J|} \frac{1}{\sqrt{\|J\|!}}$

Preuve. Pour tout $v \in A_m^k$, on a vu que $|J(v)| = k$ et $\|J(v)\| = \|J\|$ d'où $a(J(v)) \geqq (\frac{1}{4}))^{|J(v)|} \|J(v)\|! = (\frac{1}{4})^k \|J\|!$ D'où

$$b(J) \leqq \frac{1}{\sqrt{\|J\|!}} \sum_{k=m-m(J)}^{m} \left(\frac{1}{2^{m-k}} \Big(\sum_{v \in A_m^k} c_v \Big) 2^k \right).$$

Or Card $A_m^k = C_m^{m-k}$ d'où, en majorant tous les C_v par 1, on obtient:

$$b(J) \leqq \left(\sum_{k=m-m(J)}^{m} C_m^{m-k} \frac{1}{2^{m-k}} 2^k \right) \frac{1}{\sqrt{\|J\|!}}.$$

En minorant $m-m(J)$ par 0, on a: $b(J) \leqq \left(\frac{1}{2}+2\right)^m \frac{1}{\sqrt{\|J\|!}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{|J|} \frac{1}{\sqrt{\|J\|!}}$.

Remarque. Le coefficient $\frac{5}{2}$ n'est pas optimal, mais une majoration de $b(J)$ par $C \cdot \lambda^{|J|} \frac{1}{\sqrt{\|J\|!}}$ est naturelle avec $\lambda > 1$. Par exemple, si $J=(1 \dots 1)$ alors $B_t^J = \frac{B^{1m}}{m!}$, d'où

$$E(B_t^{J^2}) = \frac{2m!}{m!^3\, 2^m}\, t^{2m}$$

et donc

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{3}\right)^m \frac{t^{2m}}{m!} \leqq E(B_t^{J^2}) \leqq 2^m \frac{t^{2m}}{m!}$$

et donc

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{|J|} \frac{1}{\sqrt{\|J\|!}} \leqq b(J) \leqq \sqrt{2^{|J|}} \frac{1}{\sqrt{\|J\|!}}.$$

(c) Convergence des séries de Taylor stochastiques

On arrive enfin aux théorèmes de convergence des séries de Taylor stochastiques:

Théorème 2. *Soit* $x \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{r+1})$.

(1) *Si* $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_j|\, b(J) \sqrt{t^{\|J\|}} < \infty$ (resp. $\sum_m \left(\sum_{\|J\|=m} |x_J|\, b(J)\right) \sqrt{t^m} < \infty$) *alors la série* $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J B_t^J|_{L^2}$ *converge (resp.* $\sum_m \sum_{\|J\|=m} |x_J B_t^J|_{L^2}$ *converge.*

(2) *Si* $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J|^2\, b(J)^2\, t^{\|J\|} < \infty$ *(resp.* $\sum_m \left(\sum_{\|J\|=m} |x_J|^2\, b(J)^2\right) t^m < \infty$ *alors la série* $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J B_t^J|$ (resp. $\sum_m \sum_{\|J\|=m} |x_J B_t^J|$) *converge ps uniformément sur* $[0, t']$ *pour tout* $t' \leqq \frac{t}{r+1}$.

Preuve. Le (1) est une conséquence évidente du lemme 2. Pour le (2), on a: si $t' < \frac{t}{r+1}$ et $C = \frac{t'}{t}(r+1) < 1$; si $s < t'$:

$$\begin{aligned} P\Big(\sum_{|J|=m} |x_J B_s^J| \geqq C^m\Big) &\leqq \frac{1}{C^{2m}} E\Big(\Big(\sum_{|J|=m} |x_J B_s^J|\Big)^2\Big) \\ &\leqq \frac{(r+1)^m}{C^{2m}} \sum_{|J|=m} |x_J|^2 |B_s^J|_{L^2}^2 \\ &\leqq \sum_{|J|=m} |x_J|^2\, b(J)^2\, s^{\|J\|} \left(\frac{r+1}{C^2}\right)^m. \end{aligned}$$

Or $\left(\frac{s}{t}\right)^{\|J\|} \leqq \left(\frac{s}{t}\right)^m$ d'où $\frac{s^{\|J\|}}{t^{\|J\|}}\left(\frac{r+1}{C^2}\right)^m \leqq \left(\frac{(r+1)\,s}{C^2\,t}\right) < 1.$

D'où $s^{\|J\|}\left(\frac{r+1}{C^2}\right)^m \leqq t^{\|J\|}$ et: $P(\sum_{|J|=m} |x_J B_s^J| \geqq C^m) \leqq \sum_{|J|=m} |x_J|^2 b(J)^2 t^{\|J\|}$.

La serie de droite est convergente. Le lemme de Borel-Cantelli donne le résultat. (Le calcul est analogue pour les séries $\sum_{\|J\|=m} x_J B_t^J$).

Remarque. Si la série de Taylor est déterministe, à savoir si x_J est nul dès que l'un des j_i est non nul, notons $x_m = x_J$ pour $J = (\underbrace{0 \ldots 0}_{m\,\text{fois}})$. Alors $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J B_t^J|_{L^2} = \sum_m |x|_m \frac{t^m}{m!}$. On a alors $b(J) = \frac{1}{\sqrt{a(J)}} = \frac{1}{\sqrt{m!^2}} = \frac{1}{m!}$ et $\|J\| = 2m$ pour un tel J et la condition (1) s'écrit $\sum_m |x_m| \frac{t^m}{m!} < \infty$; elle est donc évidemment optimale.

Les majorations de $b(J)$ obtenues au lemme 3 permettent d'obtenir des critères concrets des séries de Taylor stochastiques.

Corollaire 1. *Soit* $x \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{r+1})$ *tel que:*

$$\exists K > 0 \ \text{ et } \ \exists \alpha \in \mathbb{R} \qquad |x_J| \leqq K^{|J|} \|J\|!^\alpha.$$

(1) *Si* $\alpha < 1/2$.

La série $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J B_t^J|_{L^2}$ *(respectivement* $\sum_m \sum_{\|J\|=m} |x_J B_t^J|_{L^2}$*) converge pour tout* t.

La série $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J B_t^J|$ *(respectivement* $\sum_m \sum_{\|J\|=m} |x_J B_t^J|$*) converge presque surement uniformément sur tout intervalle* $[0, T]$.

(2) *Si* $\alpha = 1/2$.

Il existe des réels $0 < t_0 < t_1$ *tels que: La série* $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J B_t^J|_{L^2}$ *(respectivement* $\sum_m \sum_{\|J\|=m} |x_J B_t^J|_{L^2}$*) converge pour* $t < t_0$.

La série $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J B_t^J|$ *(respectivement* $\sum_m \sum_{\|J\|=m} |x_J B_t^J|_{L^2}$*) converge presque surement uniformément sur* $[0, t_1]$.

Preuve. On se limitera au calcul pour les séries $\sum_m \sum_{|J|=m} x_J B_t^J$. On a

$$\sum_{|J|=m} |x_J|\, b(J) \sqrt{t}^{\|J\|} \leqq \sum_{|J|=m} (\tfrac{5}{2} K(\sqrt{t} \vee t))^m\, 2m!^{\alpha - 1/2}$$

$$\leqq [(r+1)\, \tfrac{5}{2} K(\sqrt{t} \vee t)]^m\, 2m!^{\alpha - 1/2}$$

et

$$\sum_{|J|=m} |x_J|^2\, b(J)^2\, t^{\|J\|} \leqq ((r+1)\, \tfrac{25}{4} K^2\, t \vee t^2)^m\, 2m!^{2\alpha - 1}.$$

Si $\alpha<1/2$, ces séries convergent pour tout t d'où le 1) du corollaire. Si $\alpha=1/2$, la première de ces séries converge pour $(\sqrt{t}\vee t)<\frac{2}{5(r+1)K}=\lambda$ donc pour $t<\inf(\lambda,\lambda^2)=t_0$.

La seconde converge pour $t<\inf(\mu,\mu^2)$ avec $\mu=\frac{2}{5\sqrt{r+1}K}$, ce qui démontre le 2) du corollaire avec $t_1=\frac{1}{r+1}\inf(\mu,\mu^2)$.

Remarque. Les rayons de convergence t_0 et t_1 ne sont pas optimaux. Par contre, l'exposant critique $\alpha=1/2$ l'est.

Pour la convergence p·s, considérons de nouveau le cas extrême d'une série de Taylor déterministe: $x_J=0$ si l'un des j_i est non nul, et notons $x_J=x_m$ pour $J=(\underbrace{0\ldots0}_{m\,\text{fois}})$.

L'hypothèse $|x_J|\leqq K^{|J|}\|J\|!^\alpha$ s'écrit ici $|x_m|\leqq K^m(2m)!^\alpha$. La formule de Stirling montre que la série de Taylor $\sum_m\sum_{|J|=m}|x_J B_t^J|=\sum_m x_m\frac{t^m}{m!}$ converge pour tout t si $\alpha<1/2$ et pour tout $t\in\left[0,\frac{1}{2K}\right[$ si $\alpha=1/2$, mais diverge pour tout t si $\alpha>1/2$ et $|x_m|\geqq K^m(2m)!^\alpha$.

Considérons un cas simple non déterministe en posant:

$$x_J=K^m(m!)^\alpha=K^{|J|}\|J\|!^\alpha \qquad \text{si } J=(\underbrace{1\ldots1}_{m\,\text{fois}})$$
$$x_J=0 \text{ sinon}.$$

Alors, de même la formule de Stirling montre que la série de Taylor stochastique

$$\sum_m\sum_{|J|=m}|x_J B_t^J|_{L^2}=\sum_m K^m(m!)^\alpha\left|\frac{B_t^m}{m!}\right|_{L^2}=\sum_m K^m m!^{\alpha-1}\sqrt{\frac{2m!}{m!\,2^m}}\,t^m$$

converge pour tout t si $\alpha<1/2$, converge pour tout $t<1/2K$ si $\alpha=1/2$ et diverge si $\alpha>1/2$ pour tout t.

Par contre, dans ce cas, la convergence p·s a lieu pour tout t pour $\alpha<1$ mais pour $\alpha=1$, la série $\sum_m|\sum_{|J|=m}x_J B_t^J|$ ne converge *p·s* sur aucun intervalle déterministe $[0,T]$.

Pourtant, cette série converge dans un sens plus faible, elle a un rayon de convergence aléatoire.

Plus précisément, si T est le temps d'arrêt $T=\inf(t,|B_t^1|=1/K)$ alors p·s sur l'intervalle stochastique $[0,T[$ la série $\sum_m\sum_{|J|=m}|x_J B_t^J|$ converge. Nous allons, dans les paragraphes suivants, nous intéresser à ce type de convergence avant un temps d'arrêt.

(d) La famille des intégrales itérées comme diffusion sur un espace de Banach

Soit la famille infinie Y_t des intégrales stochastiques itérées de Stratonovich; nous allons montrer ici qu'il s'agit bien d'un processus de diffusion à valeurs dans un espace de Banach (et pas seulement dans le «gros» espace $\mathcal{T}(\mathbb{R}^{r+1})$).

Soit H le sous-espace de $\mathcal{T}(\mathbb{R}^{r+1})$ donné par:

$$H=\{x\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^{r+1})/\sum_m \sum_{|J|=m} |x^J|<\infty\}$$

H muni de la norme $\|x\|=\sum_m \sum_{|J|=m} |x^J|$ est évidemment un espace de Banach.

On a alors:

Theoreme 3. (1) *Presque surement, pour tout t $Y_t\in H$.*

(2) *(Y_t) est la solution sur H de l'équation stochastique*

$$dY_t=\sum_{j=0}^{r} Q_j(Y_t)\circ dB_t^j$$

où les champs Q_j sont donnés par:

$$Si\ \ J=(j_1\dots j_m)\qquad si\ \ Q_j^J(y)=\begin{cases}0 & si\ \ j\neq j_m\\ y^{j_1\dots j_{m-1}} & j=j_m\end{cases}.$$

Preuve. (1) Y_t est la série de Taylor stochastique donnée par $x_J=1$ pour tout J. Les critères du corollaire assurent que $\sum_m \sum_{|J|=m} |x_J B_t^J|$ converge $p\cdot s$ uniformément sur $[0, T]$ pour tout T d'où le (1).

(2) On vérifie trivialement que les Q_j définissent des champs de vecteurs sur H. L'équation (2) est la définition des intégrales itérées.

Ainsi, la famille (Y_t) est une diffusion de dimension infinie. Les résultats des paragraphes suivants vont montrer dans quelle mesure il s'agit de la «diffusion universelle», à savoir: on va exprimer toute diffusion analytique comme une fonctionnelle régulière de cette diffusion et approximer toute diffusion à coefficients C^∞ par une telle fonctionnelle.

§ 2. Formule de Taylor stochastique

(a) E.D.S. à coefficients C^∞

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, E un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\sigma_0, \dots, \sigma_r$ $r+1$ applications C^∞ de $U\times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Considérons l'équation stochastique de Stratonovich sur U:

$$\begin{aligned} dX_t &= \sum_{i=0}^{r} \sigma_i(\varepsilon, X_t)\circ dB_t^i \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{1}$$

où l'on a noté, pour simplifier, $B_t^0 = t$. Pour un borelien A de U, notons $X_t(\varepsilon, x)$ la solution de (1) et $T_A^{\varepsilon, x}$ le temps de première sortie de $X_t(\varepsilon, x)$ hors de A

$$T_A^{\varepsilon, x} = \inf(t, X_t(\varepsilon, x) \notin A).$$

On a alors le résultat classique suivant:

Théorème 4. (1) *Si $U = \mathbb{R}^m$, $E = \mathbb{R}^p$ et si les champs σ_i sont bornés à dérivées bornées, alors presque surement, pour tout t, $X_t(\cdot, \cdot)$ est C^∞ en (ε, x) sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$.*

(2) *Dans le cas général où σ_i est C^∞ sur $U \times E$, soit K un compact de U et V (respectivement F) un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^m$ (respectivement $\mathbb{R}^p$) tel que $\bar{V} \subset \mathring{K}$. Alors presque surement pour $t < T = \inf\limits_{\substack{\varepsilon \in F \\ x \in V}} T_K^{\varepsilon, x}$, $X_t(\cdot, \cdot)$ est C^∞ sur $F \times V$.*

De plus T est un temps d'arrêt presque surement strictement positif.

Preuve. (1) Ce résultat est classique (cf. Bismut [4]) si les σ_i ne dépendent pas de ε. Il est trivial de se ramener à ce cas. Il suffit de poser:

$$\tilde{\sigma}_i(\varepsilon, x) = (0, \sigma_i(\varepsilon, x))$$
$$\text{et} \quad Y_t(\varepsilon, x) = (\varepsilon, X_t(\varepsilon, x)).$$

alors Y_t est solution sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ de l'équation:

$$Y_0 = (\varepsilon, x)$$
$$dY_t = \sum_{i=0}^{r} \tilde{\sigma}_i(Y_t) \circ dB_t^i.$$

Ainsi, presque surement, pour tout t Y_t est C^∞ sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et donc X_t l'est.

(2) Si l'on remplace les champs σ_i par des champs $\tilde{\sigma}_i$ bornés à dérivées bornées tels que $\tilde{\sigma}_{i|_K} = \sigma_{i|_K}$ et si $\tilde{X}_t$ désigne la solution de l'équation associée aux $\tilde{\sigma}_i$, alors $p \cdot s$ pour tout t $\tilde{X}_t$ est C^∞ en (ε, x) et pour $t < T$ $X_t(\varepsilon, x)$ coïncident pour $(\varepsilon, x) \in F \times V$. D'où le résultat.

Le fait que T soit un temps d'arrêt est évident. En effet, $T = \inf\limits_{(\varepsilon, x) \in F \times V} T_K^{\varepsilon, x} = \inf\limits_{\varepsilon, x \in D} T_K^{\varepsilon, x}$ si D est un dénombrable dense de $F \times V$, donc T est la borne inférieure d'un ensemble dénombrable de temps d'arrêt. Vérifions que presque surement T est strictement positif. On a:

$$T = \inf_{F \times V} T_K^{\varepsilon, x} \geqq \inf_{F \times V} T_{\mathring{K}}^{\varepsilon, x} \geqq \inf_{\overline{F \times V}} T_{\mathring{K}}^{\varepsilon, x}.$$

Or l'application $(\varepsilon, \chi) \to T_{\mathring{K}}^{\varepsilon, x}$ est s.c.i., sa borne inférieure est donc atteinte sur le compact $\overline{F \times V}$, elle est donc strictement positive.

Remarque. Si l'on s'intéresse à la seule régularité en fonction du paramètre ε, à x_0 fixé, on peut remplacer T par $\inf\limits_{\varepsilon \in F} T_K^{\varepsilon, x_0}$ qui, de même, est un temps d'arrêt strictement positif.

(b) E.D.S. à coefficients analytiques

Supposons ici que les champs σ_i soient analytiques réels au voisinage de $(\varepsilon_0, x_0) \in E \times U$; on va montrer la dépendance analytique du paramètre ε et de la condition initiale x pour la solution $X_t(\varepsilon, x)$ de (1).

Plus précisément, soient $P = P_{\varepsilon_0} \times P_{x_0}$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, de centre (ε_0, x_0) (où P_{ε_0} (resp. P_{x_0}) est un pavé ouvert de centre ε_0 (resp. x_0)) tel que $\bar{P}$ soit inclus dans l'intersection des domaines de convergence des séries des Taylor en (ε_0, x_0) des σ_i. On a:

Théorème 5. *Il existe un temps d'arrêt T p·s strictement positif, tel que p·s sur $t < T$ $X_t(\cdot, \cdot)$ est analytique sur P.*

Preuve. Par la réduction pratiquée pour le (1) du théorème précédent, on peut supposer que les champs σ_i ne dépendent pas du paramètre ε. On considère donc l'équation sur U

$$\begin{aligned} dX_t &= \sum_{i=0}^{r} \sigma(X_t)\, dB_t^i \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{1}$$

et l'on veut montrer l'existence d'un temps d'arrêt T $p \cdot s > 0$ tel que sur $t < T$ $X_t(\cdot)$ soit analytique sur P_1 (un pavé de centre x_0 et tel que $\bar{P}_1$ soit inclus dans l'intersection V des domaines de convergence des séries de Taylor en (ε_0, x_0) des σ_i).

On va, pour cela, complexifier l'équation (1). Précisons d'abord les notations:

Soit ϕ la bijection de $\mathbb{R}^{2n}$ sur $\mathbb{C}^n$ suivante

$$\phi(x_1 \dots x_{2n}) = (x_1 + i x_{n+1}, \dots, x_n + i x_{2n}).$$

Si W est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, et f une application C^1 de W dans $\mathbb{R}^n$, alors $\hat{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ définit une application sur l'ouvert $\phi(W)$ de $\mathbb{C}^n$ qui est analytique sur $\phi(W)$ si les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites, à savoir si la matrice jacobienne de f appartient à la sous-algèbre M de $M_{2n}(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right)$ où $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrons maintenant le théorème:

Soit P_2 un pavé ouvert tel que $P_1 \subset P_2 \subset \bar{P}_2 \subset V$. Soient alors Q_i les polydisques ouverts de $\mathbb{C}^n$ tels que $Q_i \cap \mathbb{R}^n = P_i$.

Les séries de Taylor des σ_i en x_0 définissent des applications analytiques $\tau_0 \dots \tau_r$ sur Q_2 telles que $\tau_{i|_{P_2}} = \sigma_i$. Sur l'ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ $\phi^{-1}(Q_2)$ ces applications τ_i définissent donc des applications $\eta_i = \phi^{-1} \circ \tau_i \circ \phi$ de classe C^∞ dont les matrices jacobiennes appartiennent à M.

Prolongeons ces applications η_i en des applications $\tilde{\eta}_i$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ bornées à dérivées bornées et considérons l'équation sur $\mathbb{R}^{2n}$ associée aux $\tilde{\eta}_i$:

$$\begin{aligned} Y_0(y) &= y \in \mathbb{R}^{2n} \\ dY_t(y) &= \sum_{i=0}^{r} \tilde{\eta}_i(Y_t(y)) \circ dB_t^i. \end{aligned}$$

Par les résultats précédents, on sait que $Y_t(\cdot)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$. De plus, si l'on note $Z_t(y)$ la différentielle de $Y_t(\cdot)$ en y, on a l'équation aux variations dans $M_{2n}(\mathbb{R})$:

$$Z_0(y)=I$$

$$dZ_t(y)=\sum_{i=0}^{r} d\tilde{\eta}_i(Y_t(y))\cdot Z_t(y)\circ dB_t^i$$

Considérons $T=\inf_{y\in\phi^{-1}(Q_2)} T^y_{\phi^{-1}(Q_2)}$, alors, par un raisonnement déjà fait, T est un temps d'arret p·s strictement positif. On va montrer que $\forall y\in\phi^{-1}(Q_1)$ $Z_{t\wedge T}(y)\in M$ et donc que, si $t<T$, $Y_t(\cdot)$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann sur $\phi^{-1}(Q_1)$.

Posons $Z_t^T(y)=Z_{t\wedge T}(y)$, Z^T est l'unique solution de

$$\begin{aligned} &Z_0^T(y)=I \\ &dZ_t^T(y)=\sum_{i=0}^{r} A_t^i\cdot Z_t^T(y)\,1_{t\leqq T}\circ dB_t^i, \end{aligned} \tag{$*$}$$

avec $A_t^i=d\tilde{\eta}_i(Y_{t\wedge T}(y))=d\eta_i(Y_{t\wedge T}(y))\in M$, puisque η_i vérifie les conditions de Cauchy-Riemann sur $\phi^{-1}(Q_2)$.

Or M étant une sous-algèbre, l'équation $(*)$ a une solution unique dans M. D'où $\forall y\in\phi^{-1}(Q_1)$ $Z_{t\wedge T}(y)\in M$.

Ainsi, si $t<T$, $Y_t(\cdot)$ définit une application de classe C^∞ sur $\phi^{-1}(Q_1)$ dont la différentielle $Z_t(y)$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. Donc $\hat{Y}_t(\cdot)=\phi\circ Y_t\circ\phi^{-1}$ définie sur l'ouvert Q_1 de $\mathbb{C}^n$ est analytique si $t<T$.

De plus, par le fait que si $x\in P_1$ $\tilde{\eta}_i^{n+k}(x,0)=\eta_i^{n+k}(x,0)=\operatorname{Im}(\tau_i^k(x))=0$ on vérifie que $Y_t^{n+k}(x,0)=0$, donc que $Y_t(x,0)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}$ et donc $Y_{t\wedge T}(x,0)\in\phi^{-1}(Q_2)\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})=P_2\times\{0\}$.

Ainsi,

$$\tilde{\eta}_i(Y_{t\wedge T}(x,0))=\eta_i(Y_{t\wedge T}(x,0)=\sigma_i(Y^1_{t\wedge T},\,\ldots,\,Y^n_{t\wedge T}(x,0))$$

et $(Y^1_{t\wedge T}(x,0)\ldots Y^n_{t\wedge T}(x,0))$ est solution de l'equation stochastique vérifiée par $X_{t\wedge T}(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ et l'on obtient que $\hat{Y}_{t\wedge T}(\cdot)$ coïncide avec $X_{t\wedge T}(\cdot)$ sur P_1.

Ce qui montre que, si $t<T$, $X_t(\cdot)$ est analytique sur P_1. C.Q.F.D.

(c) Formule de Taylor stochastique

Considérons de nouveau l'équation

$$dX_t=\sum_{i=0}^{r}\sigma_i(X_t)\circ dB_t^i$$

$$X_0=x_0$$

où les champs de vecteurs σ_i sont C^∞ sur un ouvert U.

Ici, on va fixer la condition initiale $x_0 \in U$ et étudier la dépendance en fonction de t en temps petit. Si l'on avait affaire à une équation différentielle ordinaire, on pourrait affirmer qu'en temps petit $X_t(x_0)$ est C^∞ en t et écrire une formule de Taylor. Ici, un tel résultat est évidemment absurde; on va pourtant introduire une formule de Taylor stochastique due à Azencott [1] où les intégrales itérées

$$B_t^J = \int_{0<t_1<\ldots<t_m<t} \!\!\!\ldots\int dB_{t_1}^{j_1} \circ \ldots \circ dB_{t_m}^{j_m}.$$

généralisent les monomes $\dfrac{t^m}{m!} = \int_{0<t_1<\ldots<t_m<t} \!\!\!\ldots\int dt_1 \ldots dt_m$.

Notons $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^m} a_\nu^i (x-x_0)^\nu$ la série de Taylor formelle de σ_i en x_0 avec la convention usuelle de notation $x^\nu = x_1^{\nu_1} \ldots x_m^{\nu_m}$, si $\nu = (\nu_1 \ldots \nu_m) \in \mathbb{N}^m$ et $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

Si $g_1, \ldots, g_n$ désignent n éléments de $\mathbb{R}^m$, soit le polynome à coefficients vectoriels $g_1 x + \ldots + g_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ et soit alors $C_i^k(g_1, \ldots, g_n)$ le coefficient de x^k dans la série formelle $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^m} a_\nu^i (g_1 x + \ldots + g_n x^n)^\nu$ obtenue par composition de série formelle de Taylor de σ_i en x_0 et de ce polynome sans terme constant.

Nous pouvons alors introduire le système stochastique donné par:

$$\mathscr{S}_n \begin{cases} dg_1 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(x_0) \circ dB_t^i \\ dg_2 = \sum_{i=1}^{r} C_i^1(g_1(t)) \circ dB_t^i + \sigma_0(x_0) \circ dB_t^0 \\ dg_n = \sum_{i=0}^{r} C_i^{n-1}(g_1 \ldots g_{n-1}) \circ dB_t^i + C_0^{n-2}(g_1 \ldots g_{n-2}) \circ dB_t^0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales: $g_i(0) = 0$.

La proposition suivante décrit les g_k:

Proposition 2. (1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le système stochastique $\mathscr{S}_n$ définit une diffusion $(g_1 \ldots g_n)$ sur $(\mathbb{R}^m)^n$ à temps de vie infini. Chaque g_k se calcule à partir d'intégrales itérées de Stratonovich précisément, si g_k^j désigne la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de g_k; on a:*

$$g_k^j(t) = \sum_{\|J\|=k} P_J^j(a_\nu^i) B_t^J$$

où les P_J^i sont des polynomes universels, à coefficients rationnels positifs, pris sur les coefficients de Taylor a_ν^i des champs σ_i.

(2) *On a la propriété de scaling suivante:*

$$\textit{Pour tout } t \geqq 0 \textit{ les processus } s \to (g_1(st), \ldots, g_n(st)) \quad \textit{et} \quad s \to (t^{1/2} g(s), \ldots, t^{n/2} g_n(s))$$

ont même loi.

Remarque. On vérifie ainsi que les g_k définissent une série de Taylor stochastique au sens précédent. On l'appellera série de Taylor stochastique associée à l'équation (1).

Preuve. (1) Il suffit de constater que $\mathcal{S}_n$ se résoud par quadratures stochastiques successives pour montrer qu'il définit une diffusion à temps de vie infini. Démontrons la deuxième assertion par récurrence en constatant qu'elle est claire pour g_1 car $g_1(t)=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i(x_0)B_t^i$. Supposons que les coordonnées de $(g_1(t), \ldots, g_{n-1}(t))$ soient des combinaisons linéaires d'intégrales stochastiques itérées; alors, puisque la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de $C_i^k(g_1 \ldots g_{n-1})$ est un polynome des coordonnées de $g_1 \ldots g_{n-1}$ dont les coefficients, rationnels positifs, s'obtiennent de façon universelle à partir des coefficients de Taylor (a_ν^i), on vérifie que la $j^{\text{ème}}$ coordonnée $g_n^j(t)$ de $g_n(t)$ s'obtient comme combinaison linéaire d'intégrales du type:

$$\int_{s=0}^{t} (B_s^{J_1})^{n_1} \ldots (B_s^{J_l})^{n_l}\, dB_s^i \qquad \text{avec } \sum_i^l n_k \|J_k\| = n-1 \text{ si } i \neq 0$$

$$\text{et} \quad \sum_i^l n_k \|J_k\| = n-2 \text{ si } i=0$$

qui, par application itérée de la formule d'Ito, se ramène à des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs universels d'intégrales itérées

$$(B_t^J) \text{ telles que: } \|J\| = \Sigma n_k \|J_k\| + 1 \text{ si } i \neq 0$$
$$\text{et: } \|J\| = \Sigma n_k \|J_k\| + 2 \text{ si } i=0,$$

c'est-à-dire telles que: $\|J\| = n$.

Remarque. Si l'on introduit l'équation stochastique dépendant du paramètre ε:

$$dX_t^\varepsilon = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon \sigma_i(X_t^\varepsilon) \circ dB_t^i + \varepsilon^2 \sigma_0(X_t^\varepsilon)\, dB_t^0$$
$$X_0^\varepsilon = x_0.$$

Alors $(g_k(t))$ est la série formelle de Taylor de X_t^ε en $\varepsilon=0$, i.e.

$$g_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\varepsilon^k} X_t^\varepsilon\big|_{\varepsilon=0}.$$

Azencott a montré (théorème 1.6 [1]) que l'on a la formule de Taylor stochastique suivante:

Théorème 6. *Si l'on définit le processus reste R_{N+1} par*

$$X_t = x_0 + \sum_{j=1}^{N} g_j(t) + t^{N+1/2} R_{N+1}(t)$$

pour t strictement inférieur au temps de vie ζ de X_t et $R_{N+1}(t)=\partial$ point à l'infini pour $t\geqq\zeta$; alors R_{N+1} est borné en probabilité lorsque t tend vers 0. C'est-à-dire $\lim\limits_{t\to 0} P(|R_{N+1}|\geqq r)=0$ *pour* $r\geqq r_0$.

La preuve de ce résultat est fondée sur la propriété de scaling, de X_t d'une part, et des $(g_k(t))$ donnée par le (2) de la proposition précédente. Ceci permet de ramener la formule de Taylor stochastique à une formule de Taylor usuelle en ε de X_t^ε. Il reste ensuite à majorer le reste; nous renvoyons à Azencott pour cela.

Remarque. En fait, Azencott prouve le résultat avec une formulation Ito. Mais il est clair que les deux formulations sont équivalentes; en effet, toute équation d'Ito peut se transformer en une équation de Stratonovich et l'on a vu que les intégrales itérées d'Ito et de Stratonovich s'expriment comme combinaisons linéaires les unes des autres.

Rappelons ici que, grace à une majoration des moments du reste R_{N+1}, Azencott obtient les développements limités suivants:

Théorème 7. *Soit f une fonction C^∞ bornée, on a:*

$$E(f(X_t), t<\zeta)=f(x_0)+tLf(x_0)+\sum_{j=2}^{N} a_j t^j+O(t^{N+1})$$

où les a_j sont des polynomes universels en les coefficients de Taylor en x_0 de f, des σ_i et des scalaires $E(B_1^J)$.

Il suffit en effet de combiner la formule de Taylor usuelle pour f et la formule de Taylor stochastique, puis d'utiliser la propriété de scaling des $(g_k(t))$ ainsi qu'une propriété de symétrie évidente (pour vérifier que les coefficients des puissances demi-entières de f s'annulent). Si l'on calcule les premiers termes, on vérifie que le coefficient de $\sqrt{t}$ vaut: $E(f'(x_0)\,g_1(1))$, c'est-à-dire $E(f'(x_0)\sum_{i=1}^{r}\sigma_i(x_0)B_1^i)$ et donc qu'il est nul. Le terme suivant, coefficient de t vaut:

$$E\left(\frac{f''(x_0)}{2}\cdot g_1^2(1)+f'(x_0)\,g_2(1)\right)=\frac{1}{2}Lf(x_0)$$

comme le montre un calcul très simple à partir des expressions de $g_1(t)$ et $g_2(t)$:

$$g_1(t)=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i(x_0)B_t^i;\ E(g_2^i(t))=\sigma_0^i(x_0)\,t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}[\sigma_k'(x_0)\cdot\sigma_k(x_0)]^i.$$

Supposons, pour simplifier, que X_t ait un temps de vie infini; on obtient ainsi un développement du semi-groupe P_t de générateur L agissant sur les fonctions C^∞:

$$\frac{1}{t}(P_t f-f)=Lf+\sum_{j=2}^{N} a_j t^j+O(t^{N+1}).$$

(d) Convergence de la série de Taylor stochastique associée à une e.d.s. analytique

Supposons désormais que dans l'équation (1) les champs de vecteurs σ_i sont analytiques au voisinage de x_0. Peut-on alors conclure à la convergence de la série de Taylor stochastique associée? Quel type de convergence?

Commençons par donner les deux exemples les plus simples d'une telle équation:

(1) Soit l'équation $\begin{cases} dX_t = X_t \circ dB_t \\ X_0 = 1 \end{cases}$ alors, clairement, $X_t = e^{B_t}$, d'où $X_t = 1 + \sum_i^\infty g_m(t)$ avec $g_m(t) = \int_{0<t_1<\ldots<t_m<t} \ldots \int dB_t \circ \ldots \circ dBt_m = \frac{B_t^m}{m!}$. Il est évidemment clair qu'ici la série de Taylor stochastique converge p·s pour tout t et que $\Sigma |g_m(t)|_{L^2}$ converge pour tout t.

(2) Soit l'équation $\begin{cases} dX_t = X_t^2 \circ dB_t \\ X_0 = 1 \end{cases}$ alors $X_t = \frac{1}{1-B_t}$ d'où $X_t = 1 + \sum_i^\infty g_m(t)$ avec $g_m(t) = m! \int_{0<t_1<\ldots<t_m<t} \ldots \int dB_{t_1} \circ \ldots \circ dBt_m = B_t^m$. On a vu qu'alors la série $\sum_1^\infty g_m(t)$ ne converge p·s pour aucun t et que $\Sigma |g_m(t)|_{L^2}$ diverge pour tout t, mais que $\sum_1^\infty |g_m(t)|$ converge p·s sur $\{\omega, t \leqq T(\omega)\}$ si T est le temps d'arrêt $T = \inf(t, |B_t| = 1)$.

Dans le cas général, on aura un résultat du type (2), à savoir convergence p·s avant un temps d'arrêt; les résultats du paragraphe 1 permettront de donner des critères qui assureront une convergence du type (1), à savoir une convergence p·s sur un intervalle déterministe et même une convergence L^2.

Commençons par montrer le résultat abstrait suivant: soit $C > 0$, tel que les séries de Taylor des champs σ_i convergent sur le pavé $]x_0 - C, x_0 + C[^n$. Pour $\rho > 1$, introduisons le temps d'arrêt (éventuellement nul):

$$\tau_C(\rho) = \inf\left(t, \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m |g_m(t)| \geqq C\right).$$

On a alors:

Théorème 8. *Ps sur $t \leqq \tau_C(\rho)$ on a:*

$$X_t = x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(t).$$

Preuve. Si $f(\varepsilon)$ est une fonction analytique sur le disque $\{\varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| < \rho\}$ alors pour $\rho' < \rho$ on a:

$$\forall p, \forall \varepsilon / |\varepsilon| < \rho' \left| f(\varepsilon) - \sum_0^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \varepsilon^k \right| \leqq \frac{M}{\rho'^p}$$

avec $M=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{\rho'}{\rho}\right)}\sup\limits_{|\varepsilon|\leqq\rho'}|f(\varepsilon)|$.

Considérons ici la fonction $f(\varepsilon)=\sigma_i\left(x_0+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m g_m(t)\right)$. Sur $t\leqq\tau_c(\rho)$ $f(\varepsilon)$ est analytique sur $|\varepsilon|<\rho$ et

$$\sup_{|\varepsilon|\leqq\rho'}|f(\varepsilon)|\leqq\sup_{|x|\leqq C}|\sigma_i(x)|.$$

De plus, par définition des $C_i^k(g_1\ldots g_k)$, le développement de Taylor de f en 0 à l'ordre p est donné par $\sigma_i(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{p}C_i^k(g_1\ldots g_k)\,\varepsilon^k$ d'où

$$\left|\sigma_i\left(x_0+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m g_m(t)\right)-\left(\sigma_i(x_0)+\sum_i^p C_i^k(g_1\ldots g_k)\,\varepsilon^k\right)\right|\leqq\frac{K_i}{\rho'^p}$$

pour tout p, tout ε tel que $|\varepsilon|<\rho'$ et $K_i=\dfrac{1}{1-\dfrac{\rho'}{\rho}}\sup\limits_{|x|\leqq C}|\sigma_i(x)|$. Or on a, par définition, des g_m:

$$\begin{aligned}\sum_1^p\varepsilon^m g_m(t)=&\sum_{i=1}^{r}\sum_{n=1}^{p}\varepsilon^m\int_0^t C_i^{m-1}(g_1^{(s)}\ldots g_{m-1}^{(s)})\circ dB_s^i\\&+\sum_{m=2}^{p}\varepsilon^m\int_0^t C_0^{m-2}(g_1^{(s)}\ldots g_{m-2}^{(s)})\circ dB_s^0\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_i^p\varepsilon^m g_m(t\wedge\tau_c(\rho))=\sum_{i=1}^{r}\varepsilon\int_0^{t\wedge\tau_c}H_i^p(s)\circ dB_s^i+\varepsilon^2\int_0^{t\wedge\tau_c(\rho)}H^p(s)\circ dB_s^i\qquad(*)$$

avec

$$H_i^p(s)=\sigma_i(x_0)+\sum_{k=1}^{p-1}\varepsilon^k C_i^k(g_1(s)\ldots g_k(s))$$

$$H_0^p(s)=\sigma_0(x_0)+\sum_1^{p-2}\varepsilon^k C_i^k(g_1(s)\ldots g_k(s)).$$

Or, pour $|\varepsilon|<\rho'$, on a:

$$\left\|\left[H_i^p(s)-\sigma_i\left(x_0+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m g_m(t)\right)\right]1_{t\leqq\tau_c(\rho)}\right\|_{L^2}\leqq\frac{k_i}{\rho'^p}P(t\leqq\tau_c(\rho))^{1/2}$$

$$\left\|\left[H_0^p(s)-\sigma_0\left(x_0+\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m g_m(t)\right)\right]1_{t\leqq\tau_c(\rho)}\right\|_{L^2}\leqq\frac{k_0}{\rho'^{p-1}}P(t\leqq t_c(\rho))^{1/2}.$$

Si l'on a choisi $\rho' > 1$, les termes de droite de ces inégalités tendent vers 0, lorsque $p \to \infty$, d'où on peut passer à la limite dans $(*)$; on obtient pour $|\varepsilon| < \rho'$:

$$x_0 + \sum_1^\infty \varepsilon^m g_m(t \wedge \tau_c(\rho)) = x_0 + \sum_{i=1}^r \varepsilon \int_0^{t \wedge \tau_c(\rho)} \sigma_i\left(x_0 + \sum_{m=1}^\infty \varepsilon^m g_m(s)\right) \circ dB_s^i$$
$$+ \varepsilon^2 \int_0^{t \wedge \tau_c(\rho)} \sigma_0\left(x_0 + \sum_1^\infty \varepsilon^m g_m(s)\right) dB_s^0.$$

Ce qui montre que: $x_0 + \sum_1^\infty g_m(t \wedge \tau_c(\rho)$ est solution de la même équation que $X_{t \wedge \tau_c(\rho)}$, d'où le résultat.

Remarque. Ce résultat montre qu'avant le temps $\tau_c(\rho)$, la somme de la série de Taylor stochastique est bien X_t, mais n'assure pas que $\tau_c(\rho)$ est strictement positif et donc, pour l'instant, il pourrait être sans interet. Remarquons néanmoins que $\tau_c(\rho)$ est strictement positif p·s dès que $\tau(\rho) = \inf\left(t, \sum_1^\infty \rho^k |g_k(t)| = \infty\right)$ l'est.

Les résultats du §1 permettent de donner des critères sur les coefficients P_J pour qu'il en soit ainsi:

Proposition 3. (1) *Si* $|P_J| \leqq K^J \|J\|!^\alpha$ *pour tout* J *tel que* $|J| \geqq k_0$. *Alors*

$$\cdot\,\tau(r) = \infty \qquad si\ \alpha < 1/2$$
$$\cdot\,\exists t_1 > 0\ \ \tau(r) \geqq t_1 \qquad si\ \alpha = 1/2$$

et donc $p \cdot s$: $\tau_c(\rho) > 0$. *Ainsi, le résultat du théorème est valable sur un intervalle stochastique* $p \cdot s$ *non vide.*

(2) *Si, de plus, les* σ_i *sont entières, alors on a:* $X_t = x_0 + \sum_1^\infty g_k(t)$ *pour tout* t *si* $\alpha < 1/2$ *et pour tout* $t \leqq t_1$ *si* $a = 1/2$.

Preuve. (1) Il s'agit simplement du corollaire 1.

(2) Les σ_i étant entières, on a: $X_t = x_0 + \sum_i^\infty g_k(t)$ $p \cdot s$ sur $\{\omega, t \leqq \tau_n(\rho)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $p \cdot s$ sur $\{\omega, \exists n\, t \leqq \tau_n(\rho)\} = \left\{\omega, \sum_i^\infty \rho^k |g_k(t)| \leqq n\right\} = \Omega$ si $\alpha < 1/2$, ou si $\alpha = 1/2$ et $t \leqq t_1$ d'où le résultat.

Ce résultat retrouve ainsi l'exemple 1) de l'équation

$$dX_t = X_t \circ dB_t$$
$$X_0 = 1.$$

Néanmoins, ce résultat fait intervenir les coefficients P_J et non directement ceux des σ_i, et même avec des champs polynomiaux, il se peut que l'hypothèse ne soit pas vérifiée comme le montre l'exemple (2).

Pour montrer qu'en général le résultat du théorème peut s'écrire sur un intervalle stochastique non vide, ou encore que le rayon de convergence aléatoire de la série de Taylor stochastique est p·s non nul, on va utiliser le résultat de dépendance analytique des paramètres.

Théorème 9. *Il existe un temps d'arrêt T p·s strictement positif, tel que sur $[0, T[$ la série $\sum_1^\infty |g_k(t)|$ converge p·s, et*

$$X_t = x_0 + \sum_1^\infty g_k(t).$$

Preuve. Considérons l'équation

$$\begin{aligned} dX_t(\varepsilon) &= \sum_{i=1}^r \varepsilon\sigma_i(X_t(\varepsilon)) \circ dB_t^i + \varepsilon^2 \sigma_0(X_t(\varepsilon))\, dB_t^0 \\ X_0 &= x_0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Le théorème de dépendance analytique des paramètres démontré au §2b montre que, pour tout $\rho > 0$, il existe un temps d'arrêt p·s strictement positif T, tel que sur $[0, T[$ $X_t(\cdot)$ est analytique sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$. Rappelons que l'on peut prendre: $T = \inf_{|\varepsilon|<\rho} T_C^\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$ où T_C^ε est le temps de sortie de la solution de l'équation $(*)$ complexifiée, hors du polydisque $\{z \in \mathbb{C}^n, |z_i| \leqq C\}$ où les séries de Taylor des σ_i en x_0 convergent. La série de Taylor en $\varepsilon = 0$ de $X_t(\varepsilon)$ est donnée par les $g_k(t)$; on vérifie ainsi que si $t < T$ la série $\sum_1^\infty \varepsilon^k g_k(t)$ converge pour $|\varepsilon| < \rho$ et que $X_t(\varepsilon) = x_0 + \sum_1^\infty \varepsilon^k g_k(t)$.

Il suffit de choisir $\rho > 1$ pour conclure que: $\sum_1^\infty |g_k(t)| < \infty$ et que $X_t = X_t(1) = x_0 + \sum_1^\infty g_k(t)$.

Remarque. (1) Ce résultat affine le théorème 8. En effet, on vérifie ici que $T \leqq \tau(\rho)$, donc que $\tau(\rho) > 0$ p·s et donc que $\tau_c(\rho) > 0$ p·s. Mais ici le résultat est meilleur, puisque clairement $\tau_c(\rho) \leqq T$.

(2) Il était impossible sur l'équation stochastique (1) de complexifier le temps comme pour une équation ordinaire, l'introduction du paramètre ε qui, lui, peut se complexifier a permis de tourner cette difficulté.

(3) La question de savoir précisément quel est le rayon de convergence de la série de Taylor stochastique, à savoir sur quel intervalle maximal $[0, T[$ la convergence a lieu est difficile. Ce temps maximal peut aussi bien être strictement plus petit que le temps de sortie de X_t hors du domaine de convergence des σ_i (comme le montre l'exemple 2) que strictement plus grand.

3. Flots stochastiques et ordinaires

Il est bien connu (Bismut [4], Kunita [10]) qu'une équation stochastique à coefficients $C^{\infty}{}_b$ définit un flot de difféomorphismes. Les développements de Taylor stochastiques précédents permettent de relier ces flots stochastiques et les flots d'équations différentielles ordinaires.

Soit M une variété analytique; si X est un champ de vecteur sur M, notons $\exp sX(\cdot)$ le flot associé à X. Soient $X_0, \ldots, X_r$ $r+1$ champs de vecteurs analytiques définis sur un voisinage U de $x_0 \in M$. Pour $x \in U$, considérons le sous-espace vectoriel de $T_x M$ donné par $L(x) = \mathrm{Lie}(X_0, \ldots, X_r)(x)$. Soit alors $k = \dim L(x)$, et $(X^{K_i})_{i=1\ldots k}$ une base de $L(x_0)$, où l'on a noté X^K le crochet des champs X_i donné par $X^K = X_{k_1}, [X_{k_2} \ldots [X_{k_{m-1}}, X_{k_m}] \ldots]]$ si $K = (k_1 \ldots k_m) \in \{0 \ldots r\}^m$.

Théorème 10. *Soit $\xi_t(x_0)$ la solution de l'équation stochastique:*

$$d\xi_t = \sum_{i=0}^{r} X_i(\xi_t) \circ dB_t^i$$

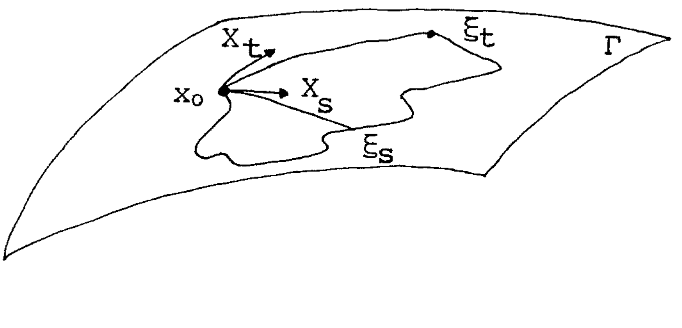
$$\xi_0 = x_0.$$

Alors, il existe un temps d'arrêt T $p \cdot s$ strictement positif et un champ de vecteur aléatoire $X_t(\omega)$ dans $L(x_0)$ tels que, sur $t < T$,

$$\xi_t(x_0) = \exp X_t(x_0).$$

Plus précisément, le champ X_t s'écrit: $X_t = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\|J\|=m} P_J^i B_t^J \right) X^K i$ où les P_J^i sont des polynomes en les dérivées des champs X_i en x_0.

Ainsi, ceci montre qu'en temps petit le flot stochastique est donné par le flot au temps 1 d'un champ de vecteur aléatoire dépendant du temps. Ce champ est une combinaison linéaire de crochets des X_i dont les coefficients sont des sommes de séries de Taylor stochastiques. Résoudre l'équation stochastique revient donc à résoudre une équation différentielle ordinaire aléatoire dépendant du temps.



Preuve du théorème. Le théorème de Nagano [21] montre l'existence d'une variété analytique Γ, la feuille de Nagano de dimension k, telle que $x_0 \in \Gamma$ et telle que $L(x) = T_x \Gamma$ pour $x \in \Gamma$ voisin de x_0.

Remarques. (1) Il n'est pas nécessaire ici de supposer que le rang de $L(x)$ est localement constant. Les différentes feuilles ne sont pas *a priori* de même rang. Le rang de $L(x)$ n'est constant que le long des feuilles.

(2) Il est clair, par le théorème du support de Stroock Varadhan que la diffusion ξ_t issue de x_0 demeure en temps petit dans Γ. Soit l'application φ $V \to \Gamma$,

$$(v_1 \dots v_k) \to \exp(\Sigma v_i X^{K_i})(x_0)$$

définie sur un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^k$ à valeurs dans Γ. Cette application est analytique sur V. De plus, les dérivées de φ en $v=0$ sont des polynomes universels en les dérivées des champs X^{K_i} en x_0. En particulier:

$$\frac{\partial}{|\partial V_j} \varphi|_{v=0} = X^{k_j}(x_0).$$

Ainsi, quitte à restreindre V, ceci montre que φ est un difféomorphisme de V sur $\varphi(V)$.

Considérons alors sur V les champs de vecteurs analytiques $Y_i = \varphi^* X_i$ et la solution ζ_t de l'équation

$$d\zeta_t = \sum_0^r Y_i(\zeta_t) \circ dB_t^i$$

$$\zeta_0 = 0.$$

La formule d'Ito montre que pour $t <$ temps de vie de ζ_t on a:

$$\xi_t = \varphi(\zeta_t) = \exp\left(\sum_1^k \zeta_t^i \cdot X^{K_i}\right)(x_0).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 9 à la diffusion ζ_t pour conclure.

Remarques. (1) L'intervention de flots au temps 1 de champs dépendants du temps (ou transformées de Lie) est naturelle dans ce contexte (cf. Abraham-Marsden [20]).

(2) Le résultat obtenu n'est pas très précis quant à la description des P_J. En particulier, il est difficile de vérifier, par exemple, sous cette form qu'en fait, si l'algèbre de Lie $(X_0 \dots X_r)$ est p-nilpotente, les P_J s'annulent pour $|J| \geqq p$, i.e., que les seules intégrales itérées d'ordre $\leqq p$ interviennent et que les sommes de séries de Taylor stochastiques sont des sommes finies.

(3) Moyennant une hypothèse supplémentaire naturelle, on peut donner une version C^∞ du théorème:

Théorème 11. *Si M est une variété C^∞ et si les champs X_i sont C^∞ et tels que: au voisinage de x_0 le rang de $L(x)$ est constant. On a: $\exists T\, p\cdot s > 0$ tq sur $t < T$.*

$$\xi_t = \exp X_t(\omega)(x_0)$$

avec

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^{k} (\Sigma P_J^i B_\varepsilon^J) X^{k_i} + t^{N+1/2} R_N(t)$$

et R_N borné en probabilité lorsque t tend vers 0.

La preuve est analogue en utilisant le théorème de Frobénius plutôt que celui de Nagano (ce qui est possible par l'hypothèse de rang constant) et le théorème 6 plutôt que le théorème 9.

4. Diffusions invariantes sur un groupe de lie

(a) Le cas general

Dans le cas où la variété analytique M est un groupe de Lie et où les X_i sont des champs invariants, la description du champ aléatoire $X_t(\omega)$ du théorème 10 devient totalement explicite, et l'on va voir qu'un tel résultat recouvre les résultats de Yamato dans le cas nilpotent et se relie naturellement à ceux de Kunita dans le cas résoluble.

Soit G un groupe de Lie connexe.

Soit $\mathscr{G} = T_e G$ son algèbre de Lie et exp l'application exponentielle sur $\mathscr{G}$. Notons $\mathscr{L}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G invariants à gauche. (Tout ce que nous allons voir serait valable avec les champs invariants à droite). L'application $\mathscr{L} \to \mathscr{G}$, $X \to X(e)$ définit un isomorphisme d'algèbre de Lie. Soient $r+1$ champs de vecteurs $X_0, \ldots, X_r \in \mathscr{L}$.

Considérons alors l'équation stochastique invariante sur G:

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \sum_{i=0}^{r} X_i(\xi_i) \circ dB_t^i \\ \xi_0 &= e. \end{aligned} \tag{1}$$

On sait que ξ_t a un temps de vie infini; nous allons résoudre ici explicitement toute équation invariante (1) en temps petit.

Pour cela, introduisons quelques notations (cf. Bourbaki [5]).

Sur l'algèbre de Lie libre sur $\mathbb{Q}$ à m lettres $L_{\mathbb{Q}}(U_1, U_2, \ldots, U_m)$. On introduit la série formelle de Campbell-Hausdorff par:

$$H(U_1, \ldots, U_m) = \sum_{k \geqq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{p \in B_k} \frac{1}{|p|\, p!} U^p$$

où l'on a noté

$$B_k=\left\{(p_i^j)_{\substack{i\in\{1\dots m\}\\ j\in\{1\dots k\}}},\ p_i^j\in\mathbb{N},\ \forall j\in\{1\dots k\}\ \sum_{i=1}^m p_i^j>0\right\}$$

et pour $p\in B_k$:

$$|p|=\sum_{i,j}p_i^j,\ p!=\prod_{i,j}p_i^j!\ \text{ et}$$

$$U^p=(\operatorname{ad}U_1)^{p_1^1}\dots(\operatorname{ad}U_m)^{p_m^1}(\operatorname{ad}U_1)^{p_1^2}\dots(\operatorname{ad}U_m)^{p_m^2}\\ \dots(\operatorname{ad}U_1)^{p_1^k}\dots(\operatorname{ad}U_1)^{p_1^k}\dots(\operatorname{ad}U_m)^{p_m^k-1}\cdot U_m.$$

Considérons alors, si $J=(j_1\dots j_m)\in\{0\dots r\}^m$, le terme β_J m-homogène de degré 1 en chaque variable dans la série $H(u_{j_1},\dots,u_{j_m})$ où $u_i=X_i(e)$. On a clairement:

$$\beta_J=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{p\in\hat{B}_k}U_J^p$$

où $\hat{B}_k=\left\{p\in B_k,\ \forall i\in\{1\dots m\}\ \sum_{j=1}^k p_i^j=1\right\}$ et

$$U_J^p=(\operatorname{ad}U_{j_1})^{p_1^1}\dots(\operatorname{ad}U_{j_m})^{p_m^1}\dots(\operatorname{ad}U_{j_1})^{p_1^k}\dots(\operatorname{ad}U_{j_m})^{p_m^k-1}U_{j_m}.$$

Par exemple, pour $|J|=1$ $J=(j)$, on a $\beta_J=u_j$.
Pour $|J|=2$ $J=(j,k)$, on a $\beta_J=\frac{1}{2}[u_j,u_k]$.
Pour $|J|=3$ $J=(i,j,k)$, on a $\beta_J=\frac{1}{3}[u_k,[u_j,u_i]]-\frac{1}{6}[u_j,[u_k,u_i]]$. On a alors le théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 12. *Il existe un temps d'arrêt T p·s strictement positif, tel que, sur $[\![0,T[\![$ la série $\sum_{m=1}^{\infty}|\sum_{\|J\|=m}\beta_J B_t^J|$ converge presque surement, et:*

$$\xi_t=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\|J\|=m}\beta_J B_t^J\right).$$

Ce théorème donne ainsi une résolution explicite en carte exponentielle de toute équation stochastique invariante sur un groupe de Lie (en temps petit). ξ_t est l'exponentielle d'une fonction universelle de la «diffusion universelle» (B_t^J) et des crochets des X_i. Remarquons le fait important que les coefficients des intégrales d'ordre k sont des crochets du même ordre.

Preuve. Soit U l'ouvert de $\mathscr{G}$ constitué des points où l'exponentielle est régulière. Si $s(x)$ désigne le spectre de ad x (considéré comme endomorphisme de $\mathscr{G}$ complexifiée), on sait que $U=\{x\in\mathscr{G},\ s(x)\cap 2\pi\mathbb{Z}\subset\{0\}\}$.

Soit σ_i le champ de vecteur sur U donné par

$$\sigma_i(x)=\frac{\operatorname{ad}(-x)}{e^{\operatorname{ad}-x}-I}$$

où $\dfrac{\mathrm{ad}(-x)}{e^{\mathrm{ad}(-x)}-I}$ est un abus de notation pour $\left(\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(p+1)!} \mathrm{ad}(-x)^p\right)^{-1}$ (ce qui a bien un sens pour $x \in U$).

On a alors, pour $x \in U$:

$$(T_x \exp)[\sigma_i(x)] = X_i(\exp x). \tag{$*$}$$

En effet, pour $h \in T_x U$ identifié à $\mathscr{G}$, on a

$$T_x \exp(h) = \exp x \cdot \sum_0^{\infty} \frac{1}{(p+1)!} (\mathrm{ad} - x)^p \cdot h.$$

D'où, pour $h = \sigma_i(x)$

$$\begin{aligned} T_x \exp[\sigma_i(x)] &= \exp x \cdot u_i = \exp x \cdot X_i(e) \\ &= X_i(\exp x) \qquad \text{par l'invariance de } X_i. \end{aligned}$$

Soit alors l'équation sur U associée aux σ_i:

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= \sum_{i=0}^{r} \sigma_i(\zeta_t) \circ dB_t^i \\ \zeta_0 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Si T_1 désigne le temps de vie de ζ_t, la formule d'Ito et la relation $(*)$ montrent que, sur $[\![0, T_1[\![$, $\xi_t = \exp \zeta_t$.

D'autre part, les champs σ_i sont analytiques sur U. Plus précisément, la série de Taylor de σ_i en 0 est donnée par:

$$\left(\mathrm{Id} - \frac{\mathrm{ad} - x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n!} b_n (\mathrm{ad} - x)^{2n}\right) \cdot U_i$$

où b_n désigne le $n^{\text{ème}}$ nombre de Bernouilli. Cette série est sommable sur l'ouvert $V \subset U$: $V = \{x \in \mathscr{G}$, le rayon spectral de $\mathrm{ad}\, x < 2\pi\}$. En effet, si W est l'ouvert de $L(\mathscr{G})$ (l'ensemble des endomorphismes de $\mathscr{G}$) donné par $W = \{A \in L(\mathscr{G})$, spectre $(A) \cap 2\pi\, \mathbb{Z} \subset \{0\}\}$ et, si ϕ désigne l'application de W dans $L(\mathscr{G})$ donnée par $\phi(A) = \dfrac{A}{e^A - I}$, ϕ est analytique sur W et sa série de Taylor en 0 est donnée par:

$$\phi(A) = \mathrm{Id} - \frac{A}{2} + \sum_i^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n!} b_n A^{2n}.$$

Cette série est normalement convergente si le rayon spectral de A est strictement inférieur à 2π, car, dans ce cas, pour n assez grand, on a: $\|A^n\| \leqq C^n$ avec $C < 2\pi$ et la série réelle $1 - \dfrac{x}{2} + \Sigma \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n!} b_n x^{2n}$ est convergente pour $|x| < 2\pi$ (et a pour some $\frac{x}{e^x-1}$: ceci pouvant servir de définition aux nombres de Bernouilli $\left.b_n\right)$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème 9 du § 1 pour obtenir le développement de ζ_t en série de Taylor stochastique. Il reste seulement à identifier les termes du développement:

Considérons le système $(\mathscr{S}_m)$ associé à l'équation (2):

$$dg_1(t)=\sum_{i=1}^{r} u_i\, dB_t^i$$

$$\vdots$$

$$dg_m(t)=\sum_{i=1}^{r} C_i^{m-1}(g_1(t)\dots g_{m-1}(t))\circ dB_t^i+C_0^{m-2}(g_1(t)\dots g_{m-2}(t)\circ dB_t$$

où $C_i^k(g_1\dots g_k)$ est le coefficient de x^k dans la série de Taylor en 0 de $\sigma_i\left(\sum_i^k x^l g_l\right)$.

On a alors la description cherchée des g_k qui achève la preuve du théorème: (La preuve de ce lemme est renvoyée en appendice.)

Lemme 4. *Pour tout k:*

(a) $g_k(t)=\sum_{\|J\|=k} \beta_J B_t^J$, *et*

(b) $C_i^k(g_1(t)\dots g_k(t))=\sum_{\|J\|=k} \beta_{J\cup\{i\}} B_t^J$.

en notant $J\cup\{i\}=(j_1\dots j_m, i)$ *si* $J=(j_1\dots j_m)$.

Remarque. Le résultat que nous venons de prouver est local et, comme tel, n'utilise que la structure de groupe de Lie local associé à l'algèbre $\mathscr{G}$. Cette remarque sera utilisée plus loin.

(b) Le cas nilpotent

Dans le cas où l'algèbre engendrée par les champs X_i est nilpotente, le théorème général se simplifie.

Théorème 13. *Si Lie* $(X_0, \dots, X_r)$ *est p-nilpotente, on a, presque surement, pour tout* $t\geqq 0$

$$\xi_t=\exp\left(\sum_{m=1}^{p}\sum_{|J|=m}\beta_J B_t^J\right).$$

Preuve. Dans le cas nilpotent, l'exponentielle est régulière sur $\mathscr{G}$. Les champs σ_i introduits dans la preuve du théorème 12 sont définis sur tout $\mathscr{G}$. Si ζ_t désigne la solution sur $\mathscr{G}$ de l'équation:

$$d\zeta_t=\sum_{i=0}^{r}\sigma_i(\zeta_t)\circ dB_t^i$$

$$\zeta_0=0$$

la série de Taylor stochastique de ζ_t est en fait une somme finie $\sum_{m=1}^{p} \sum_{|J|=m} \beta_J B_t^J$ et, par le théorème 8, du § 2 (ici évident), on vérifie que

$$\forall t \geqq 0 \qquad \zeta_t = \sum_{m=1}^{p} \sum_{|J|=m} \beta_J B_t^J.$$

D'autre part, la formule d'Ito, appliquée à l'exponentielle, montre comme précédemment que $\exp \zeta_t$ est solution de l'équation (1), pour tout t, d'où, par unicité, on obtient le théorème.

Exemples

(1) Le cas abélien

Si Lie $(X_0, \ldots, X_r)$ est abélienne, le résultat se simplifie encore pour donner:

$$\xi_t = \exp\left(\sum_{i=0}^{r} u_i B_t^i\right) \qquad \text{avec } u_i = X_i(e).$$

Dans ce cas, ξ_t est une fonction régulière du mouvement brownien $(B_t^1, \ldots, B_t^r)$ et du temps. On retrouve ainsi les résultats de Doss [6] et Sussmann [17].

Il faut remarquer que la formule ainsi obtenue est triviale, et que le travail précédent n'est pas nécessaire ici. Il suffit en effet d'utiliser la formule d'Ito pour constater que $\exp\left(\sum_0^r u_i B_t^i\right)$ est solution de l'équation (1).

(2) Le groupe d'Heisenberg

Soit $\mathbb{H}_1$ le groupe des matrices triangulaires supérieures, à coefficients réels, avec des 1 sur la diagonale, de taille 3×3:

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

$$\text{Soit } u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

u_1, u_2, u_3 constituent une base de l'algèbre de Lie de $\mathbb{H}_1$ et l'on a $[u_1, u_2] = u_3$ les autres crochets étant nuls.

Si ξ_t désigne la solution sur $\mathbb{H}_1$ de l'équation

$$d\xi_t = \sum_{i=1}^{2} X_i(\xi_t) \circ dB_t^i$$
$$\xi_0 = l$$

où X_i désigne le champ invariant à gauche sur $\mathbb{H}_1$ tel que $X_i(l) = u_i$. On a

$$\xi_t = \begin{pmatrix} 1 & B_t^1 & \int_0^t B_s^1 \, dB_s^2 \\ 0 & 1 & B_t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où:}$$

$$\xi_t = \exp\left(B_t^1 u_1 + B_t^2 u_2 + \left(\int_0^t B_s^1 \, dB_s^2 - \frac{1}{2} B_t^1 B_t^2\right) u_3\right)$$

$$\xi_t = \exp\left(B_t^1 u_1 + B_t^2 u_2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^t B_s^1 \, dB_s^2 - \int_0^t B_s^2 \, dB_s^1\right) [u_1, u_2]\right).$$

On a ainsi retrouvé directement, dans ce cas, le résultat annoncé. Le coefficient de $\int_0^t B_s^1 \, dB_s^2$ $\left(\text{resp. } \int_0^t B_s^2 \, dB_s^1\right)$ est bien comme prévu $\frac{1}{2}[u_1, u_2]$ (resp. $-\frac{1}{2}[u_1, u_2] = \frac{1}{2}[u_2, u_1]$) à savoir $\beta_{(1,2)}$ (resp. $\beta_{(2,1)}$).

Ce résultat est bien sûr bien connu (cf. Gaveau [8]).

Dans le cas nilpotent, il est possible de donner une autre preuve du théorème en suivant l'idée de Kunita [11], qui consiste à appliquer directement la formule de Campbell-Hausdorff à la suite des approximations de ξ_t dite des intégrales stochastiques multiplicatives (cf. Ibéro [9]).

Nous allons donner ici cette preuve pour montrer comment aboutir à un développement de ξ_t exactement identique à celui obtenu.

Pour cela, précisons certains faits sur la série de Campbell-Hausdorff. On a déjà introduit la série de Campbell-Hausdorff à n variables: $H(U_1 \dots U_n)$ dans l'algèbre de Lie libre $L_{\mathbb{Q}}(u_1, \dots, u_n)$. Le commutateur $U^I = [U_{i_1}[U_{i_2} \dots U_{i_{n-1}}, U_{i_n}]]$ apparaît plusieurs fois dans la série $H(U_1, \dots, U_n)$. Regroupons les termes où il apparaît et appelons C_I le coefficient affectant U^I, de telle sorte que:

$$H(U_1, \dots, U_n) = \sum_{m=1} \sum_{I \in \{1 \dots n\}^m} C_I \, U^I.$$

Nous allons montrer que, pour de nombreux I, les C_I coïncident. Soient $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{+*})^m$ et $(y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}^{+*})^m$; on dira que $(x_1, \dots, x_m) \sim (y_1, \dots, y_m)$ s'il existe une bijection strictement croissante ϕ de $\{x_1, \dots, x_m\}$ dans $\{y_1, \dots, y_m\}$ telle que $\phi(x_i) = y_i \, \forall i$. Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $(\mathbb{R}^{+*})^m$. On peut décrire précisément l'ensemble quotient $\Lambda_m = (\mathbb{R}^{+*})^m / \sim$: Si $n_1, \dots, n_k$

sont k entiers, tels que $\sum_1^k n_i = m$, notons $\sigma_{n_1 \dots n_k}$ le sous-groupe du groupe symétrique σ_m isomorphe à $\sigma_{n_1} \times \dots \times \sigma_{n_k}$ donné par

$$\sigma_{n_1 \dots n_k} = \{\tau \in \sigma_m / \forall i \ \ \tau(\{n_i + 1, \dots, n_{i+1}\}) = \{n_i + 1, \dots, n_{i+1}\}\}.$$

Si $\sigma \in \sigma_m$, on notera $\mathring{\sigma}$ sa classe modulo $\sigma_{n_1 \dots n_k}$.

Et on posera:

$$\lambda(n_1 \dots n_k, \mathring{\sigma}) = \{(t_1 \dots t_m) \in \mathbb{R}^{+*m} / t_{\sigma(1)} = \dots = t_{\sigma(n)} < t_{\sigma(n+1)}$$

$$= \dots = t_{\sigma(n_2)} < \dots < t_{\sigma\left(\sum_1^{n-1} n_i + 1\right)} = \dots = t_{\sigma(m)}\}.$$

Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix du représentant de $\mathring{\sigma}$. Alors tout λ de Λ_m s'écrit de façon unique comme un $\lambda(n_1 \dots n_k, \mathring{\sigma})$. On appellera degré de $\lambda(n_1 \dots n_k, \mathring{\sigma})$ l'entier $\max_{1 \leq i \leq k} (n_i)$. Les éléments λ de Λ_m de degré 1 sont les cones ouverts de $(\mathbb{R}^{+*})^m$:

$$\lambda(\sigma) = \{(t_1 \dots t_m) \in \mathbb{R}^{+*m} / t_{\sigma(1)} < \dots < t_{\sigma(m)}\}.$$

Les éléments de degrés supérieurs sont des cones obtenus par intersection de la frontière de ces $\lambda(\sigma)$ avec des sous-espaces de $\mathbb{R}^m$ de dimension strictement inférieure à m.

On a alors:

Proposition 4. (1) *Si* $\lambda \in \Lambda_m$ *et si* $\begin{cases} I \in \{1 \dots n\}^m \cap \lambda \\ I' \in \{1 \dots n'\}^m \cap \lambda \end{cases}$ *alors* $C_I = C_{I'}$ *que l'on notera* C_λ.

(2) *Si* $\lambda(n_1 \dots n_k), \mathring{\sigma})$ *est de degré* 2, *on a*

$$C_{\lambda(n_1 \dots n_k, \mathring{\sigma})} = \frac{1}{2^{m-k}} \sum_{\sigma \in \dot{\sigma}} C_{\lambda(\sigma)}.$$

Preuve. Le (1) est évident.

(2) La preuve se fait par récurrence sur le nombre $l = m - k$ de n_i égaux à 2. L'identité est évidente avec $l = 0$. Pour $l > 0$, ou $k < m$, supposons (sans restreindre la généralité) que la classe d'équivalence $\mathring{\sigma}$ soit celle du neutre, soit $I = (i_1, \dots, i_m) \in \lambda(n_1 \dots n_k, \mathring{\sigma})$ on a donc:

$$i_1 = i_2 = \dots = i_{n_1} = l_1 < i_{n_1+1} = \dots = i_{n_1+n_2+1} = l_2 < \dots < i_{n_1+\dots+_{k-1}+1} = \dots = i_m = l_k.$$

Considérons la série $H(\underbrace{U_{l_1} \dots U_{l_1}}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{U_{l_2} \dots U_{l_2}}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{U_{l_k} \dots U_{l_k}}_{n_k \text{ fois}})$. Par l'hypothèse de récurrence, on sait que, dans cette série, le crochet U^I apparaît muni du coefficient:

$$n_1! \dots n_k! \left(C_{\lambda(n_1 \dots n_k, \mathring{\sigma})} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{m-k}}\right) \sum_{\sigma \in \mathring{\sigma}} C_{\lambda(\sigma)} \right)$$

qui vaut:

$$2^{m-k} C_{\lambda(n_1 \dots n_k, \check{\sigma})} + (2^{m-k}-1) \sum_{\sigma \in \check{\sigma}} C_{\lambda(\sigma)},$$

car $n_1! \dots n_k! = 2^{m-k}$, puisque $n_i \in \{1, 2\}$.

Or la série $H(U_{l_1} \dots U_{l_1}, \dots, U_{l_k} \dots U_{l_k})$ est égale à la série $H(n_1 U_{l_1}, \dots, n_k U_{l_k})$ où le crochet U^I apparaît avec le coefficient:

$$n_1^{n_1} \dots n_k^{n_k} C_{\lambda(n_1 \dots n_k, \check{\sigma})} = 2^{2(m-k)} C_{\lambda(n_1 \dots n_k, \check{\sigma})}.$$

D'où l'on tire

$$2^{2(m-k)} C_{\lambda(n_1 \dots n_k, \check{\sigma})} = 2^{m-k} C_{\lambda(n_1 \dots n_k, \check{\sigma})} + (2^{m-k}-1) \sum_{\sigma \in \check{\sigma}} C_{\lambda(\sigma)}.$$

d'où le résultat.

On peut alors prouver le

Théorème 14. *Si Lie $(X_0 \dots X_r)$ est p-nilpotente, on a, presque surement, pour tout t*

$$\xi_t = \exp \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{|J|=m} \alpha_t^J U^J,$$

où l'on a posé

$$\alpha_t^J = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_m \\ d^0 \lambda \leq 2}} C_{\lambda(n_1 \dots n_k, \check{\sigma})} I_t(B^{j\sigma(1)} \dots B^{j\sigma(m)}, (n_1 \dots n_k)).$$

Rappelons que la définition de l'intégrale itérée d'Ito I_t, obtenue en remplaçant, dans l'intégrale itérée $\int_{0<t_1<\dots<t_m<t} \dots \int dB_t^{j\sigma(1)} \dots dB_{t_m}^{j\sigma(m)}$, certains des $dB^j dB^k$ par des $d\langle B^j, B^k \rangle$, est donnée au § 1.

Preuve. Considérons la suite $\xi_t^{(n)}$ qui définit ξ_t comme une intégrale stochastique multiplicative (Ibéro [9]),

$$\xi_t^{(n)} = \exp V_{2^n}^{(n)} \dots \exp V_1^{(n)}$$

où $V_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{r} \delta^{(n)} B_k^j U_j$ avec $\delta^{(n)} B_k^j = B_{t_{k+1}}^j - B_{t_k}^j$ et $t_k = \frac{k}{2^n} t$. On sait que $\xi_t^{(n)}$ converge en probabilité vers ξ_t.

Or sur l'algèbre nilpotente $\mathscr{G}$, on a la formule de Campbell-Hausdorff $\forall V_1 \dots V_m \in \mathscr{G}$ $\exp V_m \dots \exp V_1 = \exp H(V_1 \dots V_m)$. Or,

$$\begin{aligned} H(V_1^{(n)}, \dots, V_{2^n}^{(n)}) &= \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{\lambda \in \Lambda_m} C_\lambda \Big(\sum_{I \in \{1 \dots 2n\}^m \cap \lambda} V^I \Big) \\ &= \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{\lambda \in \Lambda_m} C_\lambda \sum_{J \in \{0 \dots r\}^m} \sum_{I \in \{1 \dots 2^n\}^m \cap \lambda} (\delta^{(n)} B_{i_1}^{j_1} \dots \delta^{(n)} B_{i_m}^{j_m}) U^J. \end{aligned}$$

Or le lemme suivant est élémentaire:

Lemme 5. (1) *Si $\lambda = \lambda(n_1 \dots n_k, \check{\sigma})$ est de degré inférieur ou égal à 2, la quantité $\sum_{I \in \{1 \dots 2^n\}^m \cap \lambda} \delta^{(n)} B_i^j \dots \delta^{(n)} B_{i_m}^{j_m}$ converge L^2 vers l'intégrale itérée d'Ito: $I_t(B^{j\sigma(1)} \dots B^{j\sigma(m)}, n_1 \dots n_k)$.*

(2) *Si λ est de degré supérieur ou égal à 3, la même quantité converge vers* 0.

D'où l'on tire que $H(V_1^{(n)}\dots V_{2^n}^{(n)})$ converge en probabilité vers:

$$\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{J\in\{0\dots r\}^m} U^J \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda m\\ d^\circ\lambda\leqq 2}} C_\lambda I_t(B^{j\sigma(1)}\dots B^{j\sigma(m)}, n_1\dots n_k).$$

c'est-à-dire vers:

$$\sum_{m=1}^{p-2}\sum_{J\in\{0\dots r\}^m} \alpha_t^J U^J. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque. Meyer a introduit ([14] p. 324–325) une notion très générale d'intégrales stochastiques multiples; il constatait alors que cette notion n'avait jamais servi. En fait ici, ces intégrales apparaissent naturellement.

Théorème 15. *Le coefficient α_t^J du commutateur U^J dans le développement précédent est l'intégrale multiple au sens de Meyer* [14] *de la fonction déterministe $\sum_{\lambda\in\Lambda_m} C_\lambda 1_\lambda(t_1\dots t_m)$ sur $[0,t]^m$ par rapport à la mesure produit $dB_{t_1}^{j_1}\dots dB_{t_m}^{j_m}$.*

Preuve. On renvoie ici aux pp. 324–325 du cours de Meyer, pour la définition de ces intégrales multiples. La partition de $[0,t]^m$ induite par notre relation d'équivalence $\sim$ correspond exactement aux dégénérescences que considère Meyer et, pour chaque λ de degré inférieur ou égal à 2, l'intégrale $I_t(B^{j\sigma(1)}\dots B^{j\sigma(m)}, n_1\dots n_k)$ correspond à l'intégrale introduite par Meyer. Les λ de degré supérieur ou égal à 3 n'interviennent pas, du fait de la continuité des B_t^j. D'où le résultat.

Le développement obtenu au théorème ne constitue pas encore un développement en série de Taylor stochastique; pour cela, il faut exprimer les intégrales multiples α_t^J à partir d'intégrales itérées de Stratonovich. Précisément, on a:

Théorème 16.

$$\alpha_t^J = \sum_{\sigma\in\sigma_m} C_{\lambda(\sigma)} \int\dots\int_{0<t_1<\dots<t_m<t} dB_{t_1}^{j\sigma(1)}\circ\dots\circ dB_{tm}^{j\sigma(m)}.$$

Dans la preuve de ce théorème qui permettra d'identifier les développements de ξ_t obtenus par nos deux preuves (théorème 13 et théorème 14), il se produit un «miracle», à savoir la combinaison parfaite de la proposition 4 entièrement algébrique et la relation de la proposition 1 entre intégrales itérées d'Ito et de Stratonovich purement probabiliste.

Preuve. $\lambda(n_1\dots n_k,\check\sigma)$ est de degré au plus 2 si $n_1+\dots+n_k=m$ et $n_i\in\{1,2\}$ ou encore, avec les notations du paragraphes 1, si $n_1\dots n_k\in A_m^k$ d'où,

$$\alpha_t^J = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda m\\ d^0\lambda\leqq 2}} C_\lambda I_t(B^{j\sigma(1)}\dots B^{j\sigma(m)}, n_1\dots n_k)$$

$$\sum_{k=[m/2]}^{m}\sum_{n_1\dots n_k\in A_m^k}\sum_{\check\sigma\in\sigma m/\sigma n_1\dots n_k} C_{\lambda(n_1\dots n_k,\check\sigma)} I_t(B^{j\sigma(1)}\dots B^{j\sigma(m)}, n_1\dots n_k).$$

D'où, par le lemme, on a:

$$\alpha_t^J = \sum_{k=\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{2^{m-k}} \sum_{n_1 \dots n_k \in A_m^k} \sum_{\mathring{\sigma} \in \sigma m / \sigma n_1 \dots n_k} \sum_{\sigma \in \mathring{\sigma}} C_{\lambda(\sigma)} I_t(B^{j\sigma(1)} \dots b^{j\sigma(m)}, n_1 \dots n_k)$$

$$= \sum_{\sigma \in \sigma m} C_{\lambda(\sigma)} \sum_{k=\left[\frac{m}{2}\right]}^{m} \frac{1}{2^{m-k}} \sum_{n_1 \dots n_k \in A_m^k} I_t(B^{j\sigma(1)} \dots B^{j\sigma(m)}, n_1 \dots n_k),$$

ce qui est précisément égal, par la proposition 1, à

$$\alpha_t^J = \sum_{\sigma \in \sigma_m} C_{\lambda(\sigma)} \int_{0<t_1<\dots<t_m<t} \dots \int dB_{t_1}^{j\sigma(1)} \circ \dots \circ dB_{t_m}^{j\sigma(m)}.$$

Ceci permet donc d'écrire le développement obtenu au théorème 14, sous la forme:

$$\xi_t = \exp \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{J \in \{0 \dots r\}^m} \beta^J \cdot B_t^J.$$

avec $\beta^J = \sum_{\sigma \in \sigma_m} C_{\lambda(\sigma)} [u_{j_\sigma - 1_{(1)}}, [u_{j_\sigma - 1_{(2)}} \dots u_{j_\sigma - 1_{(m-1)}}, u_{j_\sigma - 1_{(m)}}] \dots]$. Or, ce β^J est précisément le terme m homogène de degré 1 en chacune des variables dans la série $H(u_{j_1 \dots u j_m})$.

Ceci montre que:

Théorème 17. *Les développements de ξ_t obtenus par la méthode de Kunita (théorème 14) et les développements en série de Taylor stochastique (théorème 13) coïncident.*

Remarque. Ce fait était clair *a priori*, mais on a voulu exhiber les calculs pour montrer la surprenante intéraction des formules algébriques et probabilistes. Remarquons que ces calculs permettent aussi de décrire le développement de ξ_t dans le cas général (non nilpotent) à partir des intégrales multiples α_t^J.

(c) Le cas résoluble

Dans le cas où l'algèbre de Lie est engendrée par $X_0 \dots X_r$ est résoluble, Kunita [11] obtient une représentation d'un type différent de la solution ξ_t:

Théorème 18. *Si Lie $(X_0 \dots X_r)$ est résoluble,* soit $(Y_1 \dots Y_n)$ *une base de l'algebre Lie $(X_0, \dots, X_r)$ il existe $(N_t^1 \dots N_t^n)$ n semi-martingales continues telles que*

$$\xi_t = \exp N_t^1 Y_1 \dots \exp N_t^n Y_n$$

où les N_t^i sont obtenues par répétition des opérations:

(1) *Combinaisons linéaires et produits des (B_t^j)*

(2) *Intégration stochastique de Stratonovich contre dB_t^j*

(3) *Exponentiation.*

Ce théorème est simple; il suffit, par le théorème de Lie, de trigonaliser les ad Y_k (cf. Kunita).

Le lien entre cette représentation et celle obtenue au théorème 12 est le lien usuel entre coordonnées canoniques de lère et de 2ème espèce. Pour passer de la forme du théorème 18, à savoir coordonnées de seconde espèce à celle du théorème 12, à savoir coordonnées de première espèce, il suffit d'appliquer une fois de plus la formule de Campbell-Hausdorff. Mais bien sûr, ceci n'est possible qu'avant un temps d'arrêt T, à savoir tant que $(N_t^1 Y_1, \dots, N_t^n Y_n)$ reste dans le domaine d'application de cette formule. Ce qui explique pourquoi le théorème 18 est valable pour tout t et le théorème 12 seulement en temps petit. Plus précisément, avant ce temps T, on a:

$$\xi_t = \exp H(N_t^1 Y_1, \dots, N_t^n Y_n).$$

$H(N_t^1 Y_1, \dots, N_t^n Y_n)$ peut s'écrire comme somme de Série de Taylor stochastique par application itérée de la formule d'Ito (pour transformer les produits en sommes d'intégrales itérées) et de généralisations évidentes du lemme suivant:

Lemme 6. *La série* $\sum_0^\infty \int_0^t \frac{(B_s^1)^n}{n!} \circ dB_s^2$ *converge presque surement vers:*

$$\int_0^t e^{B_s^1} \circ dB_s^2,$$

ce qui permet de transformer les intégrales d'exponentielles en sommes intégrales itérées. Plutôt que de donner une preuve générale, on va s'attacher à l'exemple le plus simple, celui du groupe affine.

Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R} \right\}$ le groupe affine et $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ son algèbre de Lie.

Choisissons la base (u_1, u_2) de $\mathcal{G}$ donnée par $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de telle sorte que $[u_1, u_2] = u_2$.

Considérons alors les champs de vecteurs X_1, X_2 sur G, invariants à droite, associés à u_1, u_2 et $\xi_t = \begin{pmatrix} 1 & b_t \\ 0 & a_t \end{pmatrix}$ la solution sur G de l'équation:

$$\xi_0 = e$$

$$d\xi_t = \sum_{i=1}^2 X_i(\xi_t) \circ dB_t.$$

Cette équation se résoud par quadrature, et on obtient:

$$a_t = e^{-B_t^1}$$

$$b_t = \int_0^t e^{-B_s^1} \circ dB_s^2.$$

Ce qui donne très simplement la représentation de ξ_t en coordonnées de secondes espèces, valable pour tout t:

$$\xi_t = \exp(B_t^1 u_1) \exp\left(\int_0^t e^{-B_s^1} \circ dB_s^2\right) u_2,$$

ce qui est conforme au résultat de Kunita.

D'autre part, l'application exponentielle est ici très simple sur $\mathscr{G}$; on a:

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x\dfrac{e^y - 1}{y} \\ 0 & e^y \end{pmatrix} \quad \text{avec } \frac{e^0 - 1}{0} = 1.$$

C'est un difféomorphisme de $\mathscr{G}$ sur G et son inverse est donné par:

$$\log\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\log a}{a-1} \\ 0 & \log a \end{pmatrix}$$
$$= (-\log a)\, u_1 + \left(\frac{\log a}{a-1} \cdot b\right) u_2.$$

D'où

$$\xi_t = \exp\left[B_t^1 u_1 + \left(\int_0^t e^{-B_s^1} \circ dB_s^2\right) \frac{-B_t^1}{e^{-B_s^1} - 1} u_2\right].$$

Soit T le temps d'arrêt $T = \inf(T, |B_t^1| \geqq 2\pi)$. Sur $[0, T[$ le développement suivant est absolument convergent.

$$\frac{B_t^1}{e^{-B_t^1} - 1} = 1 - \frac{B_t^1}{2} + \sum_i^\infty (-1)^{n-1} \frac{b_n}{(2n)!} (B_t^1)^{2n}$$

d'où, par le lemme 6, sur $[0, T[$ le produit des séries de terme général $\int_0^t \frac{B_s^1 n}{n!} \circ dB_s^2$ et $(-1)^{n-1} \frac{b_n}{(2n)!} (B_t^1)^{2n}$ converge vers $\left(\int_0^t e^{-B_s^1} \circ dB_s^2\right)\left(\frac{B_t^1}{e^{-B_{t-1}^1}}\right)$. Ainsi, ce dernier produit s'écrit comme somme presque sure sur $[0, T[$ d'une série dont le terme général est une combinaison linéaire de termes de la forme:

$$(B_t^1)^{2m} \int_0^t (-B_t^1)^n \circ dB_s^2.$$

Chacun de ces termes peut, à son tour, être écrit comme combinaison linéaire d'intégrales itérées de Stratonovich d'ordre $2m + n + 1$.

Remarquons que le terme de plus bas degré de cette série est égal à B_t^2. On a ainsi montré directement (i.e., sans faire appel au théorème 12) qu'il existe un temps d'arrêt T et des réels λ_J, tels que sur $[0, T[$ on ait:

$$\xi_t = \exp\left(B_t^1 u_1 + B_t^2 u_2 + \sum_{m=2} \sum_{J \in \{1,2\}^m} \lambda_J B_t^J u_2\right),$$

qui est bien un développement du type de celui du théorème 12, car les seuls crochets des u_1, u_2 non nuls sont égaux ici à u_2.

Remarquons qu'ici le temps d'arrêt T est explicitement décrit; en fait, on peut aussi l'interpréter comme le temps de première sortie de ξ_t hors de l'ouvert $\exp V$, où $V = \{x \in \mathscr{G} / \text{le rayon spectral de ad}\, x \text{ est } < 2\pi\}$. En effet, si $x \in \mathscr{G}$ s'écrit $x_1 u_1 + x_2 u_2$, le rayon spectral de ad x est égal à $|x_1|$. Ainsi, $\zeta_t = \log \xi_t \notin V \Leftrightarrow |B_t^1| \geqq 2\pi$. C.Q.F.D.

Remarque. Il reste à prouver le lemme 6. Pour cela, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$, par la formule de Taylor usuelle:

$$\left| e^x - \sum_0^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| \leqq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}.$$

D'où, si $s \leqq t$:

$$E\left(\left(e^{B_s^1} - \sum_0^{n-1} \frac{(B_s^1)^k}{k!}\right)\right) \leqq \frac{1}{n!^2} E(|B_s^1|^{2n} e^{2|B_s^1|}).$$

Un calcul très simple montre que:

$$E(|B_s^1|^{2n} e^{2|B_s^1|}) \leqq 2 e^{2t} (16t)^n \left(t^n + \frac{2n!}{2^{4n} n!}\right) \qquad \text{pour tout } s \leqq t.$$

D'où l'on obtient:

$$E\left(\left(\int_0^t e^{B_s^1} \circ dB_s^2 - \sum_0^{n-1} \int_0^t \frac{(B_s^1)^k}{k!} \circ dB_s^2\right)^2\right) \leqq 2t e^{2t} \frac{(16t)^n}{n!} \left(\frac{t^n}{n!} + \frac{2n!}{2^{4n} n!^2}\right),$$

et, par l'inégalité de Tchebichev, en posant $\lambda_n = \sqrt{\frac{(16t)^n}{n!}}$:

$$P\left(\left|\int_0^t e^{B_s^1} \circ dB_s^2 - \sum_0^{n-1} \int_0^t \frac{B_s^{1^k}}{k!} \circ dB_s^2\right| > \lambda_n\right) \leqq 2t e^{2t} \left(\frac{t^n}{n!} + \frac{2n!}{2^{4n} n!^2}\right).$$

Or, la série de droite est convergente par la formule de Stirling, d'où, par le lemme de Borel-Cantelli, le résultat est démontré.

5. Application aux diffusions invariantes par l'action d'un groupe, lien avec les résultats de Yamato-Fliess-Kunita

Soit M une variété C^∞ connexe et G un groupe de Lie qui agit à gauche sur M; l'action $\phi: G \times M \to M$, $(g, m) \to \phi(g, m)$ définit un morphisme ϕ^+ de l'algèbre de Lie $\mathscr{R}$ des champs de vecteurs sur G invariants à droite, dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur M par.

$$\text{Si } Y \in \mathscr{S} \quad \phi^+(Y)(x) = T_e \phi(\cdot, x) \cdot Y(e) \qquad \text{pour } x \in M.$$

Considérons sur M $r+1$ champs $X_i = \phi^+(Y_i)$ pour $Y_i \in \mathscr{R}$, et l'équation stochastique associée aux X_i:

$$\begin{aligned} &\xi_0 = x \\ &d\xi_t = \sum_{i=0}^{r} X_i(\xi_t) \circ dB_t^i. \end{aligned} \tag{1}$$

Théorème 19. (1) *ξ_t a un temps de vie infini.*

(2) *Il existe un temps d'arrêt T presque surement strictement positif, tel que: sur $t < T$, on ait:*

$$\xi_t = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\|J\|=m} \beta_J B_t^J\right)(x),$$

où β_J est le terme m homogène de degré 1 en chacune des variables dans la série de Campbell-Hausdorff $H(X_{j_1}, \ldots, X_{j_m})$ et où l'exponentielle est prise ici au sens de flot au temps 1 d'un champ de vecteur.

Preuve. Ce théorème est évident. Il suffit de considérer sur G la solution de l'équation

$$\begin{aligned} &d\xi_t = \sum_{i=0}^{r} Y_i(\xi_t) \circ dB_t^i \\ &\xi_0 = e \end{aligned}$$

ξ_t a un temps de vie infini et la formule d'Ito montre que $\phi(\xi_t, x)$ est solution sur M de l'équation associée aux champs $\phi^+(Y_i) = X_i$ à savoir de l'équation (1). Ceci montre que $\xi_t = \phi(\zeta_t, x)$ d'où le 1). Mais si Y est un champ invariant à droite sur M, on a:

$$\phi(\exp Y(e), x) = [\exp \phi^+(Y)](x);$$

Il suffit donc d'appliquer le théorème 12 pour obtenir le 2).

On a énoncé le théorème essentiellement pour le corollaire suivant:

Corollaire 2. *Soient M une variété C^∞ connexe et $X_0 \ldots X_r \in \mathscr{X}(M)$ tels que*

(1) *Les X_i soient des champs complets,*

(2) *Lie $(X_0 \ldots X_r)$ est de dimension finie.*

Alors, les conclusions du théorème 1 sont vraies.

Preuve. Le théorème de Palais [15] montre que sous les hypothèses (1) et (2), il existe un unique groupe de Lie connexe G inclus dans le groupe des difféomorphismes C^∞ de M qui agit à gauche sur M par $\phi G\times M\to M$ $(g,x)\mapsto g(x)$ et tel que ϕ^+ soit un isomorphisme de $\mathscr{G}$ sur Lie $(X_0\dots X_r)$. G est le groupe engendré par les $\exp tX$ pour $X\in\mathrm{Lie}(X_0\dots X_r)$ muni d'une topologie connexe par arcs plus fine en général que la topologie compacte ouverte. Considérons alors les champs $Y_i=\phi^{+^{-1}}(X_i)$ invariants à droite sur G; on est dans la situation du théorème précédent.

Ce théorème montre donc que, sous les hypothèses (1) et (2) du corollaire, on a considérablement amélioré les résultats du paragraphe 3. Le flot stochastique défini par l'équation (1) est, en temps petit, le flot ordinaire au temps 1 du champ de vecteur aléatoire $X_t=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\|J\|=m}\beta_J B_t^J$, où la série converge ici sans hypothèse d'analyticité des X_i et où les coefficients des B_t^J sont parfaitement explicites.

Il faut constater ici que l'on a relevé une équation C^∞ en une équation analytique au travers d'une application C^∞. Ceci est rendu possible par la condition très forte (2). Ceci suscite une question ouverte: la condition (2) est-elle nécessaire pour que les conclusions du théorème soient vérifiées? En particulier, on retrouve ici les résultats de Yamato [18] et Fliess et Normand-Cyrot [7]

Corollaire 3. *Si* (1) Lie $(X_0,\dots,X_r)$ *est p-nilpotente et*
(2) *Les champs X_i sont complets,*
alors pour tout t: $\xi_t(x)=\exp\left(\sum_{m=1}^{p-1}\sum_{\|J\|=m}\beta_J B_t^J\right)(x)$, *et donc il existe une fonction* F C^∞, *telle que:*

$$\xi_t(x)=F(x,(B_t^J)).$$

Il suffit de nouveau d'appliquer le théorème 13.

Remarquons ici que ce résultat précise celui de Yamato dans le sens où il montre qu'il s'agit d'un développement de Taylor stochastique et qu'il explicite entièrement la fonction F. De plus, notre résultat est valable sur toute variété et, surtout, la méthode des développements de Taylor stochastiques se prète à la généralisation au cas non nilpotent.

Enfin, remarquons qu'il est nécessaire de supposer les champs complets pour obtenir un résultat valable pour tout t (Yamato les suppose même lipschitziens), cela se comprend ici aisément, car si les X_i ne sont pas complets, rien n'assure que le flot de $\Sigma\beta_J B_t^J$ soit défini au temps 1 pour tout t.

(2) Extension aux champs non complets

En fait, si l'on n'est intéressé que par le développement en temps petit, qui est une question locale, il est un peu ridicule d'utiliser le théorème de Palais, dont la caractéristique (et la difficulté) est d'être global. Il suffit d'utiliser sa version locale qui est la réciproque du 2$^{\text{nd}}$ théorème de Lie. On montre ainsi le résultat:

Théorème 20. *Soient $X_0, \ldots, X_r \in \mathscr{X}(M)$, tels que:*

(1) *Lie $(X_0, \ldots, X_r)$ soit de dimension finie.*

(2) dim *(Lie $(X_0 \ldots X_r)(x)$ est constant au voisinage de x_0; alors, il existe un temps d'arrêt T presque surement strictement positif, tel que, sur $t < T$, on ait:*

$$\xi_t(x) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{|J|=m} \beta_J B_t^J\right)(x).$$

Preuve. Par la réciproque du 2[nd] théorème de Lie, on sait que, sue la feuille Γ, associée à la distribution Lie $(X_0 \ldots X_r)(x)$, par le théorème de Frobénius, il existe, sur un voisinage U de x_0 inclus dans Γ, une structure de groupe de Lie local, tel que les X_i soient des champs invariants à droite pour cette structure de groupe. Il suffit alors d'appliquer directement les résultats du paragraphe 4(a) en utilisant la remarque faite alors qu'ils n'utilisent que la structure de groupe local de G.

Ce théorème permet d'omettre l'hypothèse de complétude des champs X_i.

6. Le mouvement Brownien sur une variété Riémannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne C^∞ de dimension n. Soit $m \in M$, l'application exponentielle en m $\exp_m$ définit un difféomorphisme d'un voisinage V de 0 dans $T_m M$ sur un voisinage W de m dans M.

Fixons un repère orthonormé (u_i) de $T_m M$; on définit ainsi une carte normale au voisinage de m par:

$$(x_1 \ldots x_m) \to \exp_m\left(\sum_i^n x_i u_i\right).$$

Soit Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M et ξ_t le mouvement brownien, à savoir la diffusion de générateur Δ issue de m. Les techniques précédentes de développement de Taylor stochastique permettent de donner une description universelle de ξ_t en carte normale.

Théorème 21. (1) *Soit $T_W = \inf(t, \xi_t \notin W)$ alors, sur $t < T_W$, on a*

$$\xi_t = \exp_m \sum_{i=1}^{n} x_t^i u_i$$

avec

$$x_t^i = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\|J\|=k} P_J^i B_t^J + t^{N+1/2} R_N^i(t),$$

où le reste $R_N^i(t)$ est borné en probabilité lorsque $t \to 0$, et où les P_J^i sont des polynomes universels en les dérivées covariantes successives, en m, du tenseur de courbure R.

Précisément, les premiers termes sont donnés par:

$$x_t^i = B_t^i + t^{3/2} R_2^i(t).$$

Ainsi, le mouvement brownien sur M est en temps petit égal à un mouvement brownien euclidien au troisième ordre près. Le terme du second ordre s'annule, la correction due à la courbure n'apparaît qu'au troisième ordre.

(2) *Si (M, g) est une variété riemannienne analytique, alors il existe un temps d'arrêt T presque surement strictement positif, tel que, sur $t < T$, on ait:*

$$x_t^i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\|J\|=k} P_J^i B_t^J.$$

Le mouvement brownien sur M est ainsi, en coordonnées normales, une fonction déterministe universelle des dérivées covariantes de la courbure et des intégrales stochastiques itérées.

Preuve. Dans n'importe quelle carte, l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ s'écrit:

$$\Delta f = \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \sum_{i,j} \frac{\partial\left(\vartheta g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

où $\vartheta = \sqrt{\det g_{ij}}$

$$\Delta f = \frac{1}{2} \Sigma g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j \frac{1}{2}\left(\sum_i \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} + \left(\vartheta^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}\right) g^{ij}\right) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Si $X = (X_i^j)$ désigne une racine carrée C^∞ quelconque de g^{-1}, à savoir si $XX^* = g^{-1}$ (ou encore, de façon équivalente, si les champs de vecteurs colonnes de X: $X_i = (X_i^j)_{j \in \{1 \dots n\}}$ forment un répère orthonormé pour g), on a:

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + X_0,$$

où le drift X_0 est donné par:

$$X_0^j = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} + \left(\vartheta^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}\right) g^{ij}\right) + \sum_k X_i^k \frac{\partial X_i^j}{\partial x_k}.$$

L'intérêt d'un système de carte normal est le suivant:

Théorème 22. *Second théorème d'Elie Cartan (cf. Berger [3]). Les coefficients de Taylor de (g_{ij}) au voisinage de $x = 0 \in T_m M$ sont des polynomes universels en* *les dérivées covariantes successives du tenseur de courbure au point m En particulier:*

$$\left.\begin{aligned} g_{ij}(0)&=\delta_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial x_k}\, g_{ij}(0)&=0 \\ \textit{et}\quad \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\, g_{ij}(\ )&=-R_{ijkl}(m). \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Choisissons alors, parmi toutes les racines carrées possibles de (g^{ij}) la racine symétrique donnée par

$$X=\Sigma c_n(g^{-1}-I)^n$$

où l'on a noté:

$$\sqrt{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Cette série converge normalement pour $\|g^{-1}-I\|<1$, donc sur un voisinage de m.

Les coefficients de Taylor en m des champs X^i, colonnes de la matrice X sont alors des polynomes universels en ceux de g^{-1} et donc en ceux de g. Ce sont donc des polynomes universels en les dérivées covariantes de la courbure.

Considérons enfin le drift:

$$X_0=\frac{1}{2}\left[\sum_i \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i}+\left(\vartheta^{-1}\frac{\partial\vartheta}{\partial x^i}\right) g^{ij}+\Sigma X_i^k\,\frac{\partial X_i^j}{\partial_x k}\right].$$

Ici $\vartheta=\sqrt{\det g_{ij}}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de ϑ en 0 est un polynome universel en les variables $[\det g_{ij}(0)]^{-k/2}$ et $(\det g_{ij})^{(l)}(0)$. Or ici, $\det g_{ij}(0)=1$ et la dérivée $l$ème en 0 de $\det g_{ij}$ est un polynome universel en les dérivées de g_{ij} en 0. Ceci montre (en utilisant la remarque faite précédemment sur les coefficients de Taylor des champs X_i) que les coefficients de Taylor de X_0 en 0 sont des polynomes universels en les dérivées de g_{ij} en 0 et donc en les dérivées covariantes successives de la courbure en m.

Si l'on considère alors la solution sur W de l'équation

$$d\xi_t=\sum_{i=0}^{r} X_i(\xi_t)\circ dB_t^i$$

$$\xi_0=m.$$

ξ_t est bien la diffusion sur W, issue de m, de générateur $\frac{1}{2}\sum_i^r X_i^2+X_0=\Delta$ à savoir le mouvement brownien.

Il suffit alors d'appliquer les théorèmes 6 et 9 du paragraphe 1, pour conclure, d'une part, à l'existence des développements 1) et 2) pour les coordonnées normales de ξ_t, et, d'autre part, à l'identification des P_J^i comme polynomes universels en les coefficients de Taylor en m des X_i et donc par ce que l'on vient de voir en les dérivées covariantes successives de la courbure prises au point m.

Le calcul des premiers termes se fait en utilisant le système $\mathscr{S}_m$, qui définit la série de Taylor stochastique, et les relations $(*)$. On obtient ainsi que:

$$g_1(t)=\sum_{i=1}^{r} X_i(m)\,B_t^i=\sum_{i=1}^{r} u_i\,B_t^i,$$

et que $g_2(t)=0$, car $X_0(m)=0$ et $\frac{\partial X_i^j}{\partial x_k}(m)=0$, ce qui termine la preuve du théorème.

Appendice 1: Preuve du théorème 1

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur $|J|$. Si $|J|=1$, le théorème est évident avec $a(J)=1$.

Supposons le théorème vérifié pour tout multi-indice K tel que $|K|<m$. Soit alors $J=(j_1\dots j_m)\in\{0\dots r\}^m$. Notons $J_k=(j_1\dots j_{m-k})$.

$$\text{Si } j_m\neq 0 \text{ on } a\text{: } E(I_t^{J^2})=\int_0^t E(I_s^{J_1^2})\,ds=\frac{1}{a(J_1)}\int_0^t t^{\|J\|}\,ds$$

$$E(I_t^{J^2})=\frac{t^{\|J\|}}{a(J_1)\,\|J_1\|+1}.$$

Or ici $\|J\|=\|J_1\|+1$.

D'où $a(J)=a(J_1)(\|J_1\|+1)=a(J_1)\,\|J\|=\|J\|!\prod_i^k \frac{(p_i)!^2}{(2p_i)!}$ par l'hypothèse de récurrence; en effet, les (p_i) associés à J_1 et à J sont identiques.

Si $j_m=0$:

a) Si tous les j_i sont nuls, alors $I_t^J=\frac{t^m}{m!}$ d'où $a(J)=m!^2$. Ici $\|J\|=2m$, $k=1$ et $p_1=m$; on a bien $a(J)=\|J\|!\frac{p_1!^2}{(2p_1)!}=m!^2$.

(b) Si l'un des j_i est non nul: soit $p=\inf(i, j_{m-i}\neq 0)$, $1\leqq p\leqq m-1$.

Considérons alors le multi-indice $J_p=(j_1\dots j_{m-p})$. Alors $k(J)=k(J_p)+1$ et $p_i(J)=p_i(J_p)$ pour $i\leqq k(J_p)$ et $p_i(J)=p$ pour $i=k(J)$ et $\|J\|=\|J_p\|+2p$.

Montrons alors que: $a(J)=a(J_p)\frac{p!}{(2p)!}(\|J_p\|+1)\dots(\|J_p\|+2p)\,(*)$, ce qui terminera la preuve du théorème, puisque, par l'hypothèse de récurrence, $a(J_p)=\|J_p\|!\prod_i^{k(J_p)}\frac{p_i!^2}{(2p_i)!}$.

Pour cela, on va démontrer le lemme suivant:

Lemme 1. *Pour* $k\leqq p$, $E(I_t^{J_k} I_t^{J_p})=\int\limits_{0<t_1<\dots<t_{p-k}<t}\!\!\cdots\!\int E(I_{t_1}^{J_k^2})\,dt_1\dots dt_{p-k}$.

La preuve se fait par récurrence descendante sur k. Le lemme est évident pour $k=p$. Si $k<p$ $I_t^{J_k}=\int\limits_{0<t_1<\ldots<t_{p-k}<t}\!\!\ldots\!\int \cdot I_{t_1}^{J_p}\,dt_1\ldots dt_{p-k}$, car tous les j_i sont nuls pour $i>m-p$, d'où $I_t^{J_k}=\int\limits_0^t I_s^{J_{k+1}}\,ds$. On a alors, par la formule d'Ito:

$$I_t^{J_k} I_t^{J_p}=\int\limits_0^t I_s^{J_k}\,dI_s^{J_p}+\int\limits_0^t I_s^{J_p}\,dI_s^{J_k}.$$

car I^{J_k} est à variations bornées. Or $I_s^{J_p}$ est une martingale car $j_{m-p}\neq 0$, d'où

$$E\left(\int\limits_0^t I_s^{J_k}\,dI_s^{J_p}\right)=0$$

et donc

$$E(I_t^{J_k} I_t^{J_p})=E\int\limits_0^t I_s^{J_p}\,dI_s^{J_k}=E\left(\int\limits_0^t I_s^{J_p} I_s^{k+1}\,ds\right)$$

$$=\int\limits_0^t E(I_s^{J_p} I_s^{J_{k+1}})\,ds,$$

et le lemme est démontré par récurrence sur k.

Du lemme 1, on tire:

Lemme 2. (1) *Pour* $k\leqq p$,

$$E(I_{k_t}^{J} I_t^{J_{p-1}})=(p-k+1)\int\limits_{0<t_1<\ldots<t_{p-k+1}<t}\!\!\ldots\!\int E((I_{t_1}^{J_p})^2)\,dt_1\ldots dt_{p-k+1},$$

(2) *Pour* $k\leqq p$ *et* $l\leqq p$:

$$E(I_t^{J_k} I_t^{J_l})=C_{2p-(k+l)}^{p-k}\int\limits_{0<t_1<\ldots<t_{2p-(k+l)}<t}\!\!\ldots\!\int E((I_{t_1}^{J_p})^2)\,dt_1\ldots dt_{2p-(k+l)}.$$

Preuve du (1). On a $I_t^{J_{p-1}}=\int\limits_0^t I_s^{J_p}\,ds$ et par la formule d'Ito, si $k<p$:

$$I_t^{J_k} I_t^{J_{p-1}}=\int\limits_0^t I_s^{J_k}\,dI_s^{J_{p-1}}+\int\limits_0^t I_s^{J_{p-1}}\,dI_s^{J_k}$$

$$=\int\limits_0^t I_s^{J_k} I_s^{J_p}\,ds+\int\limits_0^t I_s^{J_{p-1}} I_s^{J_{k+1}}\,ds. \qquad (**)$$

La preuve se fait de nouveau par récurrence descendante sur k: si $k=p$:

$$I_t^{J_k} I_t^{J_{p-1}} = \int_0^t I_s^{J_p} dI_s^{J_{p-1}} + \int_0^t I_s^{J_{p-1}} dI^{J_p}$$

$$= \int_0^t (I_s^{J_p})^2 ds + \int_0^t I_s^{J_{p-1}} dI_s^{J_p}$$

I^{J_p} étant une martingale, on a $E(I_t^{J_k} I_t^{J_{p-1}}) = \int_0^t E(I_s^{J_p})^2 ds$, et le lemme est vérifié dans ce cas.

La formule (**) montre que si $k<p$:

$$E(I_t^{J_k} I_t^{J_{p-1}}) = \int_0^t E(I_s^{J_k} I_s^{J_p}) ds + \int_0^t E(I_s^{J_{p-1}} I_s^{J_{k+1}}) ds.$$

Donc par le lemme 1

$$E(I_t^{J_k} I_t^{J_{p-1}}) = \int_{0<t_1<\dots<t_{p-k+1}<t} \dots \int E(I_{t_1}^{J_p^2}) dt_1 \dots dt_{p-k+1} + \int_0^t E(I_s^{J_{p-1}} I_s^{J_{k+1}}) ds.$$

Le dernier terme de cette égalité est par l'hypothèse de récurrence égal à $(p-k) \int_{0<t_1<\dots<t_{p-k+1}<t} \dots \int E(I_{t_1}^{J_p^2}) dt_1 \dots dt_{p-k+1}$, d'où le (1) du lemme est démontré.

Preuve du (2). De nouveau, ce lemme se démontre par récurrence descendante. Ici, sur $k+l$: Si $k+l=2p$ le résultat est évident. Si $k+l=2p-1$ c'est une conséquence du lemme 2 (1). Pour $k+l \leqq 2p-2$, on a, de nouveau, par la formule d'Ito: (puisque $k \leqq p-1$, $l \leqq p-1$)

$$E(I_t^{J_k} I_t^{J_l}) = \int_0^t E(I_s^{J_k} I_s^{J_{l+1}}) ds + \int_0^t E(I_s^{J_l} I_s^{J_{k+1}}) ds.$$

Par l'hypothèse de récurrence, le premier terme de cette égalité s'écrit

$$C_{2p-(k+l)-1}^{p-k} \int_{0<t_1<\dots<t_{2p-(k+l)}<t} \dots \int E(I_{t_1}^{J_p^2}) dt_1 \dots dt_{2p-(k+l)}.$$

De même, par l'hypothèse de récurrence, le second terme s'écrit

$$C_{2p-(k+l)-1}^{p-(k+1)} \int_{0<t_1<\dots<t_{2p-(k+l)}<t} \dots \int E(I_{t_1}^{J_p^2}) dt_1 \dots dt_{2p-(k+1)}.$$

Or $C_{2p-(k+l)-l}^{p-k} + C_{2p-(k+l)-1}^{p-(k+1)} = C_{2p-(k+l)}^{p-k}$ et le (2) du lemme est démontré. En particulier, le lemme 2 montre que si $k \leqq p$

$$E((I_t^{J_k})^2) = C_{2(p-k)}^{p-k} \int_{0<t_1<\dots<t_{2(p-k)}<t} \dots \int E((I_t^{J_p})^2) dt_1 \dots dt_{2(p-k)}.$$

En particulier pour $k=0$:

$$E((I_t^J)^2)=C_{2p}^p \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_{2p}<t}\!\!\ldots\!\int E(I_{t_1}^{J_p})^2\,dt_1\ldots dt_{2p}.$$

Or $E(I_t^{J_p^2})=\dfrac{t_1^{\|J_p\|}}{a(J_p)}$ d'où

$$E(I_t^{J^2})=C_{2p}^p\frac{t^{\|J_p\|}+2}{(\|J_p\|+1)\ldots(\|J_p\|+2p)}\,\frac{1}{a(J_p)}=\frac{t^{\|J\|}}{a(J)}\text{ car } \|J\|=\|J_p\|+2p$$

avec $a(J)=a(J_p)(\|J_p\|+1)\ldots(\|J_p\|+2p)\dfrac{1}{C_{2p}^p}$

$$a(J)=a(J_p)(\|J_p\|+1)\ldots(\|J_p\|+2p)\frac{p!^2}{(2p)}!.$$

Ceci est la relation $(*)$ cherchée et donc achève la preuve du théorème.

Appendice 2: Preuve du lemme 4

Ce lemme est évident pour $k=1$, en effet $g_1(t)=\sum\limits_{i=1}^r u_i B_t^i$ et $C_i^1(g_1(t))$ est le coefficient de x dans la série de Taylor de $\sigma_i(xg_1)$, à savoir $\frac{1}{2}[g_1, u_i]$ ce qui est bien égal à $\sum\limits_{\|J\|=1}\beta_{J\cup\{i\}}B_t^J=\sum\limits_{j=1}^r \beta_{j,i}B_t^j$, ou encore $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^r [u_j, u_i]\,B_t^j$.

Supposons le lemme vérifié pour $k\leqq m-1$; on a alors, de façon claire:

$$g_m(t)=\sum_{i=1}^r\sum_{\|J\|=m-1}\beta_{J\cup\{1\}}\int_0^t B_s^J\circ dB_s^i+\sum_{\|J\|=m-2}\beta_{J\cup\{0\}}\int_0^t B_s^J\circ dB_s^0.$$

d'où: $g_m(t)=\sum\limits_{\|K\|=m}\beta_K B_t^K$ et le a) du lemme est vérifié à l'ordre m.

La difficulté est de prouver que le b) l'est:

Par définition $C_i^m(g_1(t)\ldots g_m(t))$ est le coefficient de x^m dans la série de Taylor en 0 de $\sigma_i\left(\sum\limits_{k=1}^m x^k g_k(t)\right)$, or

$$\sigma_i\left(\sum_i^m x^k g_k(t)\right)=u_i+\frac{1}{2}\sum_i^m x^k[g_k(t), u_i]+\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{2n!}\,b_n\left(\mathrm{ad}\sum_1^m x^k g_k(t)\right)^{2n}\cdot u_i.$$

Le coefficient de x^m dans $\left(\operatorname{ad}\sum_1^m x^k g_k(t)\right)^{2n}$ est, en utilisant l'expression des $g_k(t)$ obtenue au a) pour $k \leqq m$:

$$\sum_{D_{2n}} B_t^{L_1} \dots B_t^{L_{2n}} \operatorname{ad} \beta_L \dots \operatorname{ad} \beta_{L_{2n}} \tag{$*$}$$

où

$$D_{2n} = \left\{ \mathscr{L} = (L_1, \dots, L_{2n}) / L_i \in \bigcup_i^{\infty} \{0 \dots r)^k \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{2n} \|L_i\| = m \right\}$$

à savoir, en utilisant l'expression des β_{L_i}:

$$\sum_{\mathscr{L} \in D_{2n}} \sum_{Q \in E(\mathscr{L})} \frac{B_t^{L_1} \dots B_t^{L_{2n}}}{|L_1| \dots |L_{2n}|} \frac{(-1) \sum_1^{2n} k(q_i)}{k(q(1) \dots k(q(2n))} \operatorname{ad} U_{L_1}^{q(1)} \dots \operatorname{ad} U_{L_{2n}}^{q(2n)}.$$

où

$$E(\mathscr{L}) = \left\{ Q = (q(1), \dots, q(2n)); q(i) \in \sum_{k=1}^{|L_i|} \hat{B}_k \right\}.$$

Or, la formule d'Ito appliquée au produit montre que:

$$B_t^{L_1} \dots B_t^{L_{2n}} = \sum_{\substack{J \\ \text{tels que} \\ \mathscr{L} \in F_{2n}(J)}} B_t^J$$

avec $F_{2n}(J) = \{\mathscr{L} = (L_1, \dots, L_{2n}) \in D_{2n}$; les L_i forment une partition de J et chaque L_i est une suite extraite de $J\}$.

D'où l'on montre que l'expression $(*)$ vaut:

$$\sum_{\|J\|=m} B_t^J \left(\sum_{\mathscr{L} \in F_{2n}(J)} \sum_{Q \in E(\mathscr{L})} \frac{(-1)^{\Sigma k(q(l))}}{|L_1| \dots |L_{2n}| \, k(q(1) \dots k(q(2n))} \operatorname{ad} U_{L_1}^{q(1)} \dots \operatorname{ad} U_{L_{2n}}^{q(2n)} \right)$$

et donc que le coefficient $C_i^m(g(t), \dots, g_m(t))$ cherché vaut:

$$\sum_{D_{2n}} B_t^{L_1} \dots B_t^{L_{2n}} \operatorname{ad} \beta_L \dots \operatorname{ad} \beta_{L_2\ n} \tag{$*$}$$

où

$$D_{2n} = \left\{ \mathscr{L} = (L_1, \dots, L_{2n}) / L_i \in \bigcup_i^{\infty} \{0 \dots r\}^k \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{2n} \|L_i\| = m \right\}$$

à savoir, en utilisant l'expression des β_{L_i}:

$$\sum_{\mathscr{L}\in D_{2n}} \sum_{Q\in E(\mathscr{L})} \frac{B_t^{L_1}\dots B_t^{L_{2n}}}{|L_1|\dots|L_{2n}|} \frac{(-1)^{\sum_1^{2n} k(q_i)}}{k(q(1)\dots k(q(2n))} \operatorname{ad} U_{L_1}^{q(1)}\dots \operatorname{ad} U_{L_{2n}}^{q(2n)}.$$

où

$$E(\mathscr{L})=\left\{Q=(q(1), \dots, q(2n));\ q(i)\in \sum_{k=1}^{|L_i|} \hat{B}_k\right\}.$$

Or, la formule d'Ito appliquée au produit montre que:

$$B_t^{L_1}\dots B_t^{L_{2n}}= \sum_{\substack{J\\ \text{tels que}\\ \mathscr{L}\in F_{2n}(J)}} B_t^J$$

avec $F_{2n}(J)=\{\mathscr{L}=(L_1, \dots, L_{2n})\in D_{2n}$; les L_i forment une partition de J et chaque L_i est une suite extraite de $J\}$.

D'où l'on montre que l'expression $(*)$ vaut:

$$\sum_{\|J\|=m} B_t^J \left(\sum_{\mathscr{L}\in F_{2n}(J)} \sum_{Q\in E(\mathscr{L})} \frac{(-1)^{\Sigma k(q(l))}}{|L_1|\dots|L_{2n}|\, k(q(1)\dots k(q(2n))} \operatorname{ad} U_{L_1}^{q(1)}\dots \operatorname{ad} U_{L_{2n}}^{q(2n)}\right)$$

et donc que le coefficient $C_i^m(g(t), \dots, g_m(t))$ cherché vaut:

$$\sum_{\|J\|=m} B_t^J \left\{\frac{1}{2}[\beta_J, u_i]+\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n!} b_n \right.$$

$$\left.\cdot\overbrace{\left[\sum_{\mathscr{L}\in F_{2n}(J)} \sum_{Q\in E(\mathscr{L})} \frac{(-1)^{\Sigma k(q(l))}}{|L_i|\dots|L_{2n}|\, k(q(1)\dots k(q(2n)} \operatorname{ad} U_{L_1}^{q(1)}\dots \operatorname{ad} U_{L_{2n}}^{q(2n)}\right]}^{(A)}\cdot U_i.\right.$$

Il reste à vérifier que l'expression entre accolades est égale à $\beta_{J\cup\{i\}}$. Pour cela, remarquons que, si l'on note $H_1(u, v)$ la somme des termes bihomogènes de la série $H(u, v)$ dont le degré en v est 1, on a:

$$\sigma_i(x)=H_1(x, u_i) \qquad \text{(cf. Bourbaki [5])}.$$

Par définition, $\beta_{J\cup\{i\}}$ est le coefficient de $x_1\dots x_m y$ dans la série $H(x_1 u_{j_1}, \dots, x_m u_{jm}, y u_i)$ et donc celui de $x_1\dots x_m y$ dans la série $H_1(H(x_1 u_{j_1}, \dots, x_m u_{jm}), y u_i)$, à savoir, dans la série:

$$y u_i+\frac{1}{2}(x_1\dots x_m y)[\beta_J, u_i]+y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n!} b_n[\operatorname{ad} H(x_1 u_{j_1}, \dots, x_m u_{jm})]^{2n}\cdot U_i.$$

Grace à l'expression de la série $H(x_1 u_{j_1}, \dots, x_m u_{jm})$ on vérifie que ce coefficient $\beta_J \cup \{1\}$ est donc égal à

$$\frac{1}{2}[\beta_J, u_i] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n!} b_n$$

$$\underbrace{\cdot \sum_{P \in C_{2n}} \frac{(-1)^{\Sigma k(p(l))}}{|p(1)| \dots |p(2n)| k(p(1) \dots k(p(2n))} \operatorname{ad} U_J^{p(1)} \dots \operatorname{ad} U_J^{p(2n)} \cdot u_i}_{(\mathrm{B})}$$

où

$$C_{2n} = \Big\{ P = (p(1), \dots, p(2n)); \quad p(l) \in \sum_{k=1}^{|J|} B_k; \quad \forall i, l \sum_{j=1}^{k(p)} p(l)_i^j \leqq 1;$$

$$\forall i \exists ! (l, j)\, p(l)_i^j = 1 \}.$$

Nous allons vérifier que les expressions (A) et (B) coïncident, en introduisant (à J fixé) une bijection entre C_{2n} et $G_{2n}(J)$ où

$$G_{2n}(J) = \{(\mathscr{L}, Q), \mathscr{L} \in F_{2n}(J), Q \in E(\mathscr{L})\}.$$

Soit $P = (p(1), \dots, p(2n)) \in C_{2n}$ et soit $l \in \{1 \dots 2n\}$ on a alors:

$$\operatorname{card}\{i, \exists j\, p(l)_i^j \neq 0\} = |p(l)|.$$

Soit $(n_1, \dots, n_{|p(l)|})$ l'ensemble $\{i, \exists j\, p(l)_i^j \neq 0\}$ récordonné de façon croissante.

Posons alors $L_l = (j_{n_1}, \dots, j_{n|p(l)|})$

$$\text{et} \quad q(l)_i^j = p(l)_{n_i}^j.$$

On vérifie simplement que $\mathscr{L} = (L_1, \dots, L_{2n}) \in F_{2n}(J)$

$$\text{et que} \quad Q = (q(1), \dots, q(2n)) \in E(\mathscr{L})$$

et que, de plus

$$\left.\begin{aligned} |L_l| &= |p(l)| \\ k(p(l)) &= k(q(l)) \\ U^{p(l)} &= U_{L_l}^{q(l)}. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

L'application ainsi construite $C_{2n} \to G_{2n}(J)$ est une bijection

$$P \to (\mathscr{L}, Q).$$

En effet, on peut construire ainsi son inverse:

Si $(\mathscr{L}, Q) \in G_{2n}(J)$ et si $l \in \{1 \dots 2n\}$ alors si $\mathscr{L} = (L_1, \dots, L_{2n})$ on sait que L est une suite extraite de J; notons la $(j_{n_1} \dots j_{n_k})$. Posons alors:

$$p(l)_i^j = 0 \quad \text{si } i \notin \{n_1, \dots, n_k\}$$

$$\text{et} \quad p(l)_{n_i}^j = q(l)_i^j \quad \text{sinon.}$$

Il est alors facile de vérifier que $P=(p(1), \ldots, p(2n))$ définit un élement de C_{2n} et que l'application qui, à $(\mathscr{L}, Q)$, associe P est l'inverse de l'application précédente, qui est donc bijective. Cette remarque et les relations (**) montrent que:

$$\sum_{p \in C_{2n}} \frac{(-1)^{\Sigma k(p(l))}}{|p(1)| \ldots |p(2n| \, k(p(1)) \ldots k(p(2n))} \operatorname{ad} U_J^{p(1)} \ldots \operatorname{ad} U_J^{p(2n)} \cdot u_i$$

$$= \sum_{\mathscr{L} \in F_{2n}(J)} \sum_{Q \in E(\mathscr{L})} \frac{(-1)^{\Sigma k(q(l))}}{|L_1| \ldots |L_{2n}| \, k(q(1)) \ldots k(q(2n))} \operatorname{ad} U_{L_1}^{q(1)} \ldots \operatorname{ad} U_{L_{2n}}^{q(2n)} \cdot u_i$$

et donc que les expressions (A) et (B) coïncident. Ce qui achève la preuve, du fait que:

$$C_i^m(g_1(t), \ldots, g_m(t) = \sum_{\|J\|=m} \beta_{J \cup \{i\}} B_t^J$$

et donc, par récurrence, la preuve du lemme. Ce qui, à son tour, achève la preuve du théorème, puisque le lemme donne l'expression explicite cherchée de la série de Taylor stochastique de ζ_t.

Bibliographie

1. Azencott, R.: Formule de Taylor stochastique et développements asymptotiques d'intégrales de Feynmann. In: Azema, J., Yor, M. (eds.) Séminaire de probabilités XVI (Lect. Notes Math., vol. 921, pp. 237–284) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982
2. Azencott, R.: Densités des diffusions en temps petit: developpements asymptotiques. In: Séminaire de probabilités XVIII. (Azema, J., Yor, M. (eds.) (Lect. Notes Math., vol. 1059, pp. 402–498). Berlin Heidelberg New York: Springer 1984
3. Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E.: Le spectre d'une variété riemanienne. (Lect. Notes Math., vol. 194). Berlin Heidelberg New York: Springer 1971
4. Bismut, J.M.: Mecanique alétoire. (Lect. Notes Math., vol. 866). Berlin Heidelberg New York: Springer 1981
5. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, tome 2. Paris: Masson 1972
6. Doss, H.: Lien entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. Ann. Inst. Henri Poincare, Novv. Ser., Sect. B **13**, 99–125 (1977)
7. Fliess, M., Normand-Cyrot, D.: Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Baker-Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen. In: Azema, J., Yor, M. (eds.) Seminaire de probabilités XVI (Lect. Notes Math., vol. 920, pp. 257–267). Berlin Heidelberg New York: Springer 1982
8. Gaveau, B.: Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents. Acta Math. **139**, 95–153 (1977)
9. Ibero, M.: Intégrales stochastiques multiplicatives. Bull. Sci. Math. **100**, 175–191 (1976)
10. Kunita, H.: On the decomposition of solutions of stochastic differential equations. In: Williams, D. (red.) Proceedings, LMS Durham Symposium, 1980. Lect. Notes Math., vol. 851, pp. 213–284). Berlin Heidelberg New York: Springer 1981
11. Kunita, H.: On the representation of solutions of stochastic differential equations. Séminaire de probabilités XIV. In: Azema, J., Yor; M. (eds.), (Lect. Notes Math., vol. 784, pp. 282–304. Berlin Heidelberg New York: Springer 1980
12. Malliavin, P.: Parametrix trajectorielle pour un opérateur hypoelliptique et repère mobile stochastique. C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. I 281, **241** (1975)
13. Malliavin, P.: Géométrie différentielle stochastique. Montréal: Presses de l'université de Montréal 1978
14. Meyer, P.A.: Cours sur l'intégrale stochastique. In: Meyer, P.A. (ed.) Séminaire de probabilités X. (Lect. Notes Math., vol. 511, pp. 321–331). Berlin Heidelberg New York: Springer 1976

15. Palais, R.: A global formulation of the Lie theory on transformation groups. Mem. Am. Math. Soc. 22, 95–97 (1957)
16. Platen, E.: A Taylor formula for semimartingales solving a stochastic equation. In: Third conference on stochastic differential systems, pp. 65–68. Visegrad: Hongrie 1980
17. Sussmann, H.: On the gap between deterministic and stochastic ordinary equations. Ann. Probab. **6**, 19–41 (1978)
18. Yamato, Y.: Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebras. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **47**, 213–229 (1979)
19. Krener, A.J., Lobry, C.: The complexity of stochastic differential equations. Stochastics **4**, 193–203 (1981)
20. Abraham, R., Marsden, J., Ratiu, T.: Manifolds, tensor analysis and applications. Reading, Mass.: Addison Wesley 1983
21. Nagano, T.: Linear differential systems with singularities and applications to transitive Lie algebras. J. Math. Soc. Japan **18**, 398–404 (1966)

Received March 10, 1986; in revised form March 14, 1988