3. Translation und Rotation

Beobachtung und Analyse des freien Falls. Untersuchung der Grundgesetze für die gleichmäßig beschleunigte translatorische Bewegung und für die Rotationsbewegung. Analogien zwischen Translation und Rotation. Bestimmung der Fallbeschleunigung.

Standardlehrbücher (Stichworte: Masse, Kraft, Translation, Rotation, Fallbeschleunigung).

Bewegungen von Massenpunkten

Die Bewegung eines Körpers, hier zunächst als Massenpunkt angenommen, wird durch die Angabe des Ortes $\boldsymbol{s}$, an dem sich der Körper zur Zeit t befindet, beschrieben:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(t) \quad .$$

Die Bewegung wird auch durch die

$$\textbf{Geschwindigkeit} \qquad \text{(engl. velocity)} \quad \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta t}$$

und die

$$\textbf{Beschleunigung} \qquad \text{(engl. acceleration)} \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

charakterisiert, Bild 3.1. Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind im allgemeinen Vektoren und deshalb hier in Fettdruck dargestellt. Für geradlinige Bewegungen reicht es aus, die Beträge der Vektoren anzugeben, die in normaler Schriftstärke und kursiv gedruckt sind, z. B. $|\boldsymbol{s}| = s$.

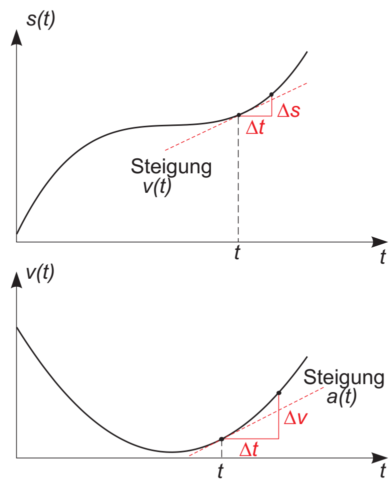


Bild 3.1. Zusammenhang zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung bei einer willkürlich angenommenen Bewegung eines Massenpunktes

Kraft

Der Bewegungszustand, genauer die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung, eines Körpers lassen sich dadurch ändern, daß eine **Kraft** auf den Körper ausgeübt wird. Kräfte werden durch verschiedene *Wechselwirkungen* zwischen Körpern hervorgerufen. Es gibt im wesentlichen folgende Arten von Kräften:

- *Gravitationskraft*, auch Massenanziehungskraft; Spezialfälle: Erdanziehungskraft, Schwerkraft;

- *Elektromagnetische Kräfte,* Coulombkraft; Folgen: elastische Kräfte, chemische Bindungskräfte, Reibungskräfte;
- *Kernkräfte*: schwache und starke Wechselwirkung.

Eine Kraft wird mit dem Buchstaben $\boldsymbol{F}$ bezeichnet (engl. force). Außer dem Betrag der Kraft muß zur vollständigen Beschreibung auch noch ihre Richtung angegeben werden. Die Kraft ist also eine vektorielle Größe.

Masse

Jeder Körper besitzt eine *Trägheit*, d. h. er verharrt in seinem Bewegungszustand, wenn keine äußeren Kräfte auf ihn wirken. Wirken Kräfte auf den Körper, so macht sich die Trägheit als Widerstand gegen die Beschleunigung bemerkbar. Für die Beschreibung der Trägheit der Körper verwendet man den Begriff **träge Masse**. Zwischen jeweils zwei Körpern besteht eine Massenanziehung nach dem Gravitationsgesetz. Für die Beschreibung der Massenanziehung der Körper verwendet man den Begriff **schwere Masse**. Obwohl beide Massenbegriffe voneinander unabhängig sind, hat die Erfahrung gezeigt, daß träge und schwere Masse gleich sind. Deshalb muß man diese nicht unterscheiden und spricht allgemein von der **Masse** als einer Eigenschaft der Körper.

Zur Bestimmung einer Masse wird diese mit einem Massennormal verglichen und damit gemessen. Der Vergleich erfolgt meist direkt oder indirekt mit einer Waage unter Ausnutzung der Erdanziehungskraft.

Innerhalb der klassischen Mechanik, also für Geschwindigkeiten, die klein sind gegen die Lichtgeschwindigkeit, ist die Masse von der Geschwindigkeit unabhängig. Für sehr große Geschwindigkeiten, wie sie z. B. in der Elementarteilchenphysik erreicht werden, nimmt nach der **Relativitätstheorie** die Masse zu:

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ,$$

wobei $m_0 = m(0)$ die Ruhemasse, und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeuten. Bei den im folgenden beschriebenen Experimenten und auch sonst bei alltäglichen Bewegungen ist jedoch $v \ll c$, so daß man mit $m = m_0 = \text{const.}$ rechnen kann.

Newtonsche Bewegungsgleichung und Impuls

Die Änderung des Bewegungszustandes eines Körpers durch Wirkung einer Kraft ist gegeben durch die **Newtonsche Grundgleichung** oder

Newtonsche Bewegungsgleichung $$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) \quad .$$

Das Produkt $m\boldsymbol{v}$ nennt man **Impuls $\boldsymbol{p}$** oder **Bewegungsgröße**. Die Kraft ist also die Ursache für die zeitliche Änderung des Impulses. Besonders einfach ist die Newtonsche Bewegungsgleichung bei konstanter Masse:

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a} \quad \text{bei} \quad m = \text{const.}$$

Die Kraft ist dann direkt proportional zur Beschleunigung a, der Proportionalitätsfaktor ist die Masse m. Wirken keine Kräfte, so ändert sich der Impuls mit der Zeit nicht, und es gilt der **Erhaltungssatz des Impulses**. Ist zusätzlich die Masse konstant, so bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit.

In einem System von Körpern, auf das keine äußeren Kräfte wirken, bleibt der Gesamtimpuls, also die Summe der Einzelimpulse, erhalten. Der Erhaltungssatz dieses Gesamtimpulses ist eine Voraussetzung für die Beschreibung von Stoßvorgängen (siehe auch *Themenkreis 4*: Stoßprozesse).

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Ein wichtiger Spezialfall ist die Bewegung unter Einwirkung einer konstanten Kraft, die gleichmäßig beschleunigte Bewegung; Beispiele siehe Bild 3.2. Da die Kraft konstant ist, ist auch die Beschleunigung konstant:

$$\boldsymbol{F} = \text{const.}, \quad \text{also auch} \quad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \text{const.}$$

Eine zweimalige Integration liefert dann die Gleichungen für die Bewegung bei konstanter Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{a}\,t + \boldsymbol{v}_0 \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{s} &= \frac{\boldsymbol{a}}{2}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{s}_0 \quad . \end{aligned}$$

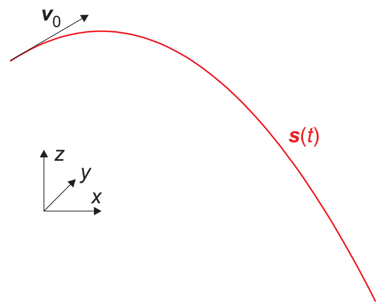


Bild 3.2. Parabolische Bahnkurve $s(t)$ eines Körpers, der mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ gestartet wird und sich unter dem Einfluß der Erdanziehungskraft weiterbewegt

Dabei ist $\boldsymbol{s}_0$ der Ort zur Zeit $t = 0$ und $\boldsymbol{v}_0$ die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$. Oft kann man im Experiment $\boldsymbol{s}_0$ und $\boldsymbol{v}_0$ zu Null wählen, so daß die Gleichungen für Geschwindigkeit, Weg und Zeit die einfachste Form erhalten, Bild 3.3:

Weg-Zeit-Gesetz

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}t$$

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{a}}{2}t^2 \quad \text{bei} \quad \boldsymbol{a} = \text{const.} \quad \text{sowie} \quad \boldsymbol{s}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_0 = 0 \quad .$$

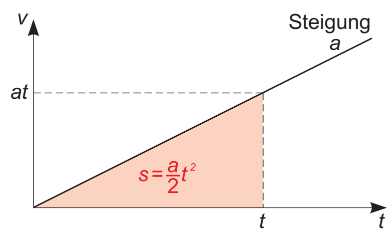


Bild 3.3. Geschwindigkeit v und zurückgelegter Weg s bei einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung a

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und der zurückgelegte Weg $\boldsymbol{s}$ haben hier die gleiche Richtung wie die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$. Der Betrag v der Geschwindigkeit läßt sich auch aus dem zurückgelegten Weg berechnen:

$$v = \sqrt{2as} \quad .$$

Bei der Bewegung im Schwerefeld der Erde ist der Betrag a der Beschleunigung gegeben durch die Erdbeschleunigung g. Die Erdbeschleunigung hat den mittleren Wert $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$. Der genaue Wert von g hängt allerdings von der geographischen Breite ab. (Wie ist das erklärbar?)

Arbeit und Energie

Will man an einem mechanischen System eine Veränderung vornehmen, z. B. einen Körper verschieben, so muß man dazu in der Regel eine **Arbeit** aufwenden. Arbeit bei einer kleinen Verschiebung $\mathrm{d}s$ ist definiert als das (skalare) Produkt aus der am Körper angreifenden Kraft $\boldsymbol{F}$ und dem Element $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ des Verschiebungsweges s. Das Integral längs des Weges s ergibt die gesamte

Arbeit $$A = \int (\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}) \quad .$$

Schließen Kraft und Wegrichtung den Winkel α ein, so gilt:

$$A = \int (F \cos\alpha)\mathrm{d}s \quad .$$

Hebt man einen Körper gegen die Gewichtskraft $F_\mathrm{G} = mg$ auf die Höhe h über ein willkürlich gewähltes Nullniveau, so wendet man wegen $\cos\alpha = 1$ dazu die Arbeit $A = mg(s - s_0) = mgh$ auf. Dieser Körper kann dann beim Herunterfallen einen Körper mit einer gleich großen Masse auf dieselbe Höhe heben, z. B. über eine Wippe. Diese Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten, wird als **Energie** bezeichnet.

Die **Energie** einer gehobenen Masse nennt man

potentielle Energie im Schwerefeld $$E_\mathrm{pot} = mgh$$

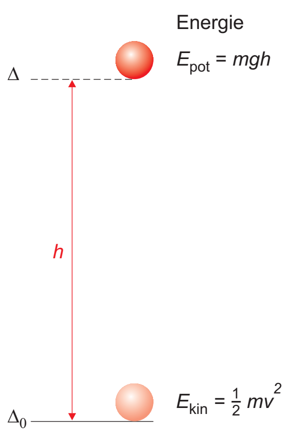


Bild 3.4. Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie beim freien Fall

oder Lageenergie, weil der gehobene Körper die Energie seiner speziellen Lage relativ zu einem Nullniveau verdankt.

Ein Körper besitzt aber auch dadurch Energie, daß er eine Geschwindigkeit hat. Diese Energie heißt **Bewegungsenergie** oder **kinetische Energie** E_kin. Der Wert von E_kin errechnet sich am einfachsten am Beispiel des freien Falles, Bild 3.4. Beim Herabfallen des Körpers aus der Höhe h nimmt die potentielle Energie laufend ab und ist am Boden Null. Hier hat der Körper aber seine größte Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ erreicht und besitzt auch seine größte Bewegungsenergie. Die ursprünglich vorhandene Energie E_pot ist in kinetische Energie E_kin umgewandelt worden. Mit Hilfe dieser Energie ist der Körper nun in der Lage (wenn man von Verlusten durch Reibung absieht), über einen Hebel ein gleich großes Gewicht wieder bis zur Höhe h zu heben, also eine Arbeit von der Größe

$$E_\mathrm{pot} = mgh = mg\frac{v^2}{2g} = \frac{m}{2}v^2$$

zu liefern. Deshalb wird einem Körper mit der Geschwindigkeit v eine

kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2} v^2$

zugeordnet.

Im oben beschriebenen Beispiel ist zu jedem Zeitpunkt die Summe aus potentieller Energie und kinetischer Energie, d. h. die Gesamtenergie konstant. Diese Tatsache formuliert man in dem

mechanischen Energieerhaltungssatz $E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}} = \mathrm{const.}$

Dieser Energieerhaltungssatz gilt auch für andere reibungsfreie, mechanische Systeme, z. B. für eine springende Stahlkugel oder ein schwingendes Pendel. Bei allen mechanischen Geräten tritt jedoch als weitere Energieart immer die Reibungswärme auf, so daß der Satz in der oben angegebenen Form bei realen Systemen nicht exakt gilt. Berücksichtigt man aber alle auftretenden Energiearten, z. B. Wärme E_{therm} oder chemische Bindungsenergien E_{chem}, so gilt der

allgemeine Energiesatz

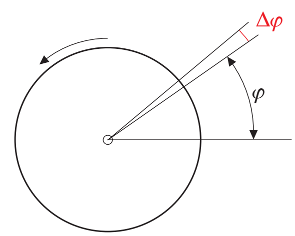
$$E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{therm}} + E_{\mathrm{chem}} + \ldots = \mathrm{const.}$$

Drehbewegungen starrer Körper

Im allgemeinen bewirken Kräfte, die an einem starren Körper angreifen, nicht nur eine beschleunigte Verschiebung (**Translation**), sondern auch eine beschleunigte *Drehbewegung* (**Rotation**). Zur Beschreibung der Drehbewegung werden in Analogie zur Translationsbewegung die Winkelgrößen eingeführt, Bild 3.5a:

Winkelort	φ
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$.

a)



b)

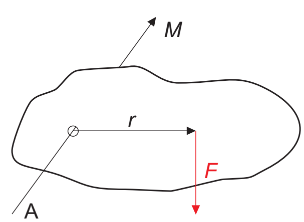


Bild 3.5. (a) Zur Definition der Winkelgeschwindigkeit $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ und (b) des Drehmoments M

Drehmoment

Um einen Körper in eine Drehung um eine feste Achse zu versetzen, muß eine Kraft über einen *Hebelarm* angreifen. Der Hebelarm ist der Abstand von der Drehachse A zum Angriffspunkt der Kraft. Maßgebend für die entstehende Drehbewegung ist das vektorielle Produkt aus Kraft und Hebelarm, das

Drehmoment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$,

Bild 3.5b. Der Betrag des Drehmomentes ist $M = rF \sin\beta$, wenn Kraft und Hebelarm den Winkel β einschließen.

Wird ein Massenpunkt längs einer Kreisbahn beschleunigt, dann gilt $F = m\dot{v} = mr\dot{\omega}$. Die Beschleunigung wird auf ein Drehmoment M zurückgeführt, das sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung berechnen läßt:

$$M = rF = r(mr\dot{\omega}) = I_{\mathrm{P}}\dot{\omega} = I_{\mathrm{P}}\alpha \quad .$$

Das sogenannte **Trägheitsmoment** eines Massenpunktes $I_{\mathrm{P}} = mr^2$ spielt damit für die Drehbewegung eine analoge Rolle wie die Masse m für die translatorische Bewegung. Bei einem um eine Achse A rotierenden starren Körper summieren sich die Beiträge der einzelnen Massenpunkte, Bild 3.6:

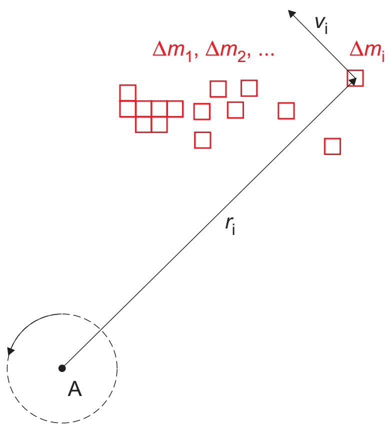


Bild 3.6. Zerlegung eines rotierenden Körpers in Massenelemente Δm_i

Trägheitsmoment bei diskreten Massenelementen $\boldsymbol{\Delta m_i}$ $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad .$

Bei einer kontinuierlichen Verteilung dieser Massenelemente in einem starren Körper geht die Summe in ein Integral über:

Trägheitsmoment $I = \int r^2 \mathrm{d}m \quad .$

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers hängt von der Lage der Drehachse ab (siehe *Themenkreis 8*: Trägheitsmoment).

Drehimpuls

Mit dem Trägheitsmoment erhält man die Bewegungsgleichung für die Rotation analog zur Newtonschen Bewegungsgleichung für die Translation:

Grundgleichung für Drehbewegungen

$$M = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) \quad \text{oder} \quad M = I\ddot{\varphi} \quad \text{bei} \quad I = const. \quad .$$

Analog zum Impuls bei der Linearbewegung nennt man das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit den

Drehimpuls $L = I\omega \quad .$

Bei Abwesenheit von äußeren Drehmomenten gilt dann der **Erhaltungssatz für den Drehimpuls**, der Drehimpuls bleibt zeitlich konstant.

Translation		Rotation	
Ort	s	Winkel oder „Winkelort"	φ
Geschwindigkeit	$v = ds / dt$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = d\varphi / dt$
Beschleunigung	$a = dv / dt$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = d\omega / dt$
Masse	m	Trägheitsmoment	I
Kraft	F	Drehmoment	M
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L = I\,\omega$
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2$	Rotationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2} I\,\omega^2$

Tabelle 3.1. Gegenüberstellung von Grundbegriffen der Translations- und Rotationsbewegung

In Tabelle 3.1 sind analoge Größen der Translation und der Rotation gegenübergestellt.

Gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung

Ein wichtiger Spezialfall ist die Drehbewegung unter Einwirkung eines konstanten Drehmomentes, die gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung. Falls zusätzlich das Trägheitsmoment konstant ist, ist auch die Winkelbeschleunigung konstant:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{I} = \text{const.}$$

Eine zweimalige Integration liefert dann die Gleichungen für die Drehbewegung bei konstanter Winkelbeschleunigung:

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha t + \omega_0 \\ \varphi &= \frac{\alpha}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \quad , \end{aligned}$$

siehe hierzu auch Bild 3.5. Dabei ist φ_0 der Winkel zur Zeit $t = 0$ und ω_0 die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$. Wenn man im Experiment φ_0 und ω_0 zu Null wählt, so vereinfachen sich diese Gleichungen analog zum *Weg-Zeit-Gesetz* der Translation:

$$\omega = \alpha t \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\alpha}{2} t^2$$

$$\text{bei} \quad \alpha = \text{const.} \quad \text{sowie} \quad \omega_0 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_0 = 0 \quad .$$

3.1 Weg-Zeit-Verlauf beim freien Fall (1/3)

Mit einer frei fallenden Stahlkugel soll die Fallzeit als Funktion des zurückgelegten Weges gemessen werden. Aus dem gemessenen Zusammenhang sollen Geschwindigkeit und Beschleunigung grafisch bestimmt werden.

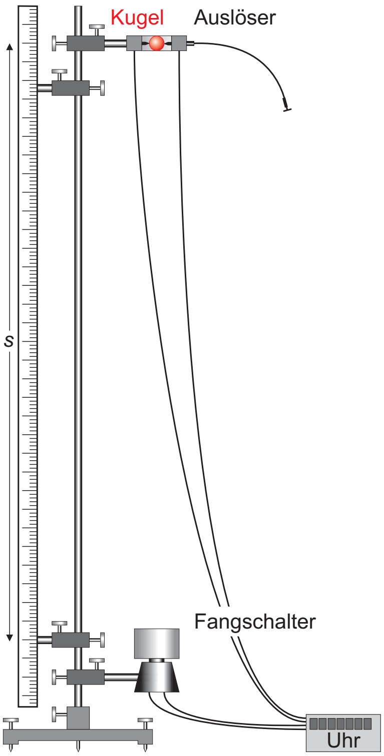


Bild 3.7. Versuchsaufbau für Fallversuch

Stahlkugel mit ca. 18 mm Durchmesser und Halterung mit Auslöser zur Freigabe der Kugel. Fangschalter zum Auffangen der Kugel. Stativfuß zur Montage von Auslöser und Fangschalter. Elektronische Uhr.

Die Stahlkugel wird in die Halterung eingespannt und schließt dabei den elektrischen Kontakt. Beim Auslösen der Kugel wird der elektrische Kontakt geöffnet, und die Zeitmessung beginnt. Die Kugel trifft einen Fangschalter, der die Zeitmessung beendet. Der Kontakt im Fangschalter wird dabei durch die Abwärtsbewegung des Fangtellers geschlossen, Bild 3.7. Dieser muß vor der Messung in seine obere Position (Fangschalterkontakt geöffnet) gezogen werden. In dieser Stellung wird die Höhe s (Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten in Auslöser und Fangschalter bei Schließen des Kontaktes) gemessen. Die Fallzeit z. B. für 10 verschiedene Höhen wird jeweils dreimal gemessen (auf genügend viele Meßpunkte bei kleinen Höhen achten).

Zu jeder Höhe s wird aus den gemessenen Zeiten der Zeitmittelwert t berechnet. In einem Diagramm wird der Weg s in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen. Es ergibt sich kein linearer Zusammenhang. Eine Anleitung zur genauen Analyse des Zusammenhangs zwischen Weg s und Zeit t wird im nächsten Abschnitt gegeben.

In einem zweiten Diagramm soll aus dem ersten Diagramm durch grafische Differentiation die Geschwindigkeit über der Zeit aufgetragen werden. Es sollte sich ein linearer Zusammenhang nach

$$v = gt \quad ,$$

d. h. eine Gerade mit der Steigung g, der Erdbeschleunigung, ergeben. Aus dem Diagramm wird g bestimmt.

Um zu prüfen, ob der erwartete Zusammenhang $s = (g/2)t^2$ (Weg-Zeit-Gesetz) zwischen dem Weg s und der Zeit t besteht, werden die Werte des Weges s/cm in doppelt logarithmischem Papier über der Zeit t/s aufgezeichnet. Man kann auch den Logarithmus des jeweiligen Zahlenwertes von s und t ausrechnen und linear auftragen.

Es handelt sich um ein Gesetz der Form $s = ct^n$ oder

$$\log(s/\mathrm{cm}) = n \log(t/\mathrm{s}) + \log c \quad \text{(Geradengleichung)} \quad .$$

Aus dem Diagramm kann daher die erwartete Steigung $n = 2$ und aus $\log(s/\mathrm{cm})$ bei $\log(t/\mathrm{s})$ die Erdbeschleunigung bestimmt werden. Man untersuche und diskutiere Fehlerquellen, die z. B. bei der Auslösung des Fangschalterkontaktes auftreten.

3.2 Bestimmung der Erdbeschleunigung (1/3)

Die Erdbeschleunigung g soll durch einen Kugelfallversuch bei fester Fallhöhe bestimmt werden.

Es werden die gleichen Geräte wie in der vorhergehenden Aufgabe 3.1 verwendet.

Es soll die Erdbeschleunigung g möglichst genau bestimmt werden. Für eine Höhe s wird dazu die Fallzeit t mindestens fünfmal gemessen. Die Höhe s wird dabei möglichst groß gewählt. (Warum?)

Aus den gemessenen Zeiten wird der Mittelwert $\bar{t}$ bestimmt und mit Hilfe des Gesetzes für den freien Fall die Erdbeschleunigung berechnet. Es soll eine Fehlerrechnung durchgeführt werden und ein Vergleich mit dem Literaturwert erfolgen (siehe auch *Themenkreis 5*: Harmonische Schwingungen).

3.3 Energieerhaltungssatz (1/3)

Es soll gezeigt werden, daß die kinetische Energie $mv^2/2$ nach einer Fallstrecke h gleich der potentiellen Energie mgh ist.

Die Messungen sind die gleichen wie oben unter 3.1 dargestellt, nur die Auswertung ist unterschiedlich.

Aus den bereits in 3.1 dargestellten Messungen entnehme man für verschiedene Fallhöhen die zugehörigen Geschwindigkeiten und berechne daraus E_{pot} und E_{kin}. Die Masse der Stahlkugel ist dazu durch Wägung oder Rechnung aus Radius und Dichte zu bestimmen.

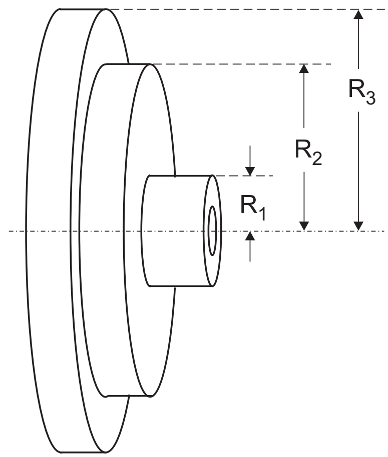


Bild 3.8. Drehscheibe (Wellrad) mit drei Stufen

3.4 Beziehung zwischen Winkel und Zeit unter Einwirkung eines Drehmomentes (1/3)

An einer um eine horizontale Achse drehbaren Scheibe (Wellrad) mit dem Trägheitsmoment I soll ein konstantes Drehmoment M angreifen. Der Drehwinkel wird als Funktion der Zeit gemessen. Die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung sollen grafisch bestimmt werden.

Wellrad nach Bild 3.8. Stativmaterial. Gewichtsstück mit Faden. Stoppuhr.

Das konstante Drehmoment wird erzeugt durch ein Gewichtstück mit der Gewichtskraft F, das an einem Faden hängt, der um eine Stufe des Wellrades gewickelt ist, Bild 3.9: Das Wellrad erhält dadurch eine Winkelbeschleunigung α. Die Zeit soll für mindestens 8 verschiedene Winkel (z. B. π, 2π, 3π, ...) jeweils dreimal gemessen werden. Auf eine ausreichende Zahl von Meßpunkten bei kleinen Winkeln achten.

Die lineare Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit von der Zeit sowie die zeitliche Konstanz der Winkelbeschleunigung sollen durch grafische Auswertung gezeigt werden.

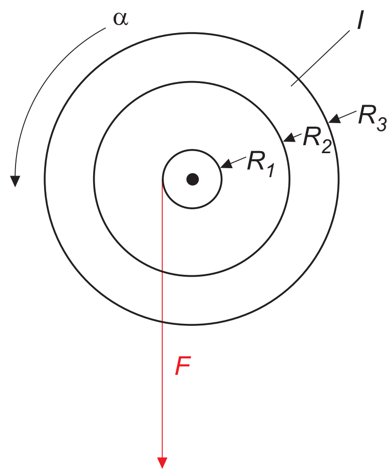


Bild 3.9. Das Wellrad erfährt durch ein Drehmoment, verursacht durch die Gewichtskraft F, eine Winkelbeschleunigung α

3.5 Beziehung zwischen Drehmoment und Winkelbeschleunigung (1/3)

Es soll der Zusammenhang zwischen dem Drehmoment als Ursache der Drehbewegung und den kinematischen Größen der Drehbewegung, speziell der Winkelbeschleunigung, hergestellt werden.

Wellrad nach Bild 3.8. Stativmaterial. Gewichtsstücke mit Faden. Stoppuhr. Plexiglasmaßstab oder Schiebelehre.

Die verschiedenen Drehmomente können realisiert werden entweder durch verschiedene Gewichtstücke oder durch Veränderung des Hebelarmes, indem man den Faden um verschiedene Stufen des Wellrades (R_1, R_2, R_3) legt. Aus der Messung von Drehwinkel φ und Zeit t wird nach der Beziehung

$$\alpha = \frac{2\varphi}{t^2}$$

die Winkelbeschleunigung α bestimmt. Es sollen mindestens sechs verschiedene Drehmomente eingestellt werden.

In einem Diagramm wird die Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit vom Drehmoment M dargestellt. Aus der Steigung läßt sich wegen

$$M = I\alpha \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{1}{I}M$$

das Trägheitsmoment I des Wellrades bestimmen.

Die geometrischen Größen des Wellrades sind auszumessen.

Der experimentell bestimmte Wert für I soll mit dem aus den Abmessungen des Wellrades berechneten verglichen werden.

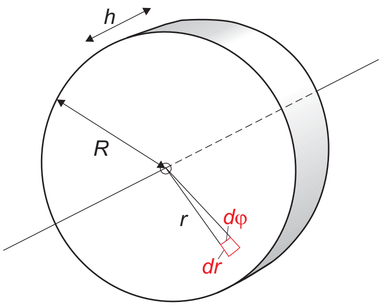


Bild 3.10. Zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines Vollzylinders

Für die Berechnung des Trägheitsmomentes $I = \int r^2 \mathrm{d}m$ eines *Vollzylinders* bzw. einer Kreisscheibe, Bild 3.10, mit dem Radius R und der Höhe h kann als Massenelement $\mathrm{d}m$ angesetzt werden:

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\varphi\,h \quad .$$

ρ ist die Dichte des Materials und beträgt z. B. für Aluminium $\rho_{\mathrm{Al}} = 2{,}70\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.

Für die Rotation um die Zylinderachse ist also

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{r=0}^{R_Z} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \rho \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\varphi\, h = \rho h \int\limits_{r=0}^{R_Z} r^3 \mathrm{d}r \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \\ &= \rho h \frac{R_Z^4}{4} 2\pi = \frac{\pi}{2} \rho h R_Z^4 \quad . \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment des gesamten Wellrades wird als Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Stufenscheiben abzüglich des Trägheitsmomentes der Innenbohrung berechnet.