

# PROBLEME DE RIEMANN EN HYDRODYNAMIQUE ET APPLICATIONS

## A. BOURGEADE, H. JOURDREN, J. OVADIA

Centre d'Etudes de Limeil-Valenton  
B.P N° 27  
94190 - VILLENEUVE-SAINT -GEORGES

Le problème de Riemann consiste à calculer à l'aide des équations de l'hydrodynamique l'écoulement résultant de la juxtaposition de deux fluides ayant des états à priori différents. Dans les codes numériques un tel problème se pose à chaque interface entre deux mailles et sa solution est fournie par un solveur de Riemann.

Les méthodes numériques faisant appel à un solveur de Riemann ont connu un grand développement ces dernières années. Par contre, leur introduction dans les codes d'hydrodynamique n'a pas eu le même succès. L'une des principales raisons en est que la plupart des solveurs de Riemann ont été écrits pour des gaz parfaits et ne s'appliquent pas à des équations d'état quelconques. En outre, si un solveur de Riemann s'introduit facilement dans un code unidimensionnel il n'en est plus de même pour les codes lagangiens multidimensionnels car il faut alors trouver la vitesse des noeuds qui n'est plus fournie par le solveur de Riemann.

Le but de cet article est de présenter plusieurs types de solveur de Riemann et de montrer comment ils ont été introduits dans différents codes de calcul : un code à grille variable, un code eulérien multifluide et un code eulérien pour les écoulements réactifs.

### I - LES SOLVEURS DE RIEMANN

Suivant le type de schéma qui est considéré, plusieurs solveurs de Riemann peuvent être envisagés.

- Le solveur de Riemann simple est utilisé dans les codes lagangiens et dans les codes eulériens ou à grille variable, comportant une phase lagrangienne. Il calcule la pression et la vitesse à l'interface pour le problème de Riemann considéré.

- Le solveur de Riemann direct est utilisé dans les codes eulériens, ou à grille variable, sans phase lagrangienne. Il calcule directement les flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, à travers l'interface considérée en fonction de la vitesse de grille.

- Le solveur de Riemann généralisé /1/ est utilisé dans les codes faisant appel à un schéma d'ordre 2 de type Van Leer. Il peut être direct ou non et il calcule la solution du problème de Riemann et sa dérivée par rapport au temps à l'aide non seulement des états de part et d'autre de l'interface mais aussi des gradients des quantités considérées.

Il est possible de résoudre un problème de Riemann quelle que soit l'équation d'état. Néanmoins, afin d'éviter des calculs trop longs, il est préférable que l'équation d'état permette de définir analytiquement les isentropiques et les courbes de choc. La plus simple des équations d'état ayant cette propriété est l'équation d'état binomiale :

$$e = \frac{P + \gamma P_0}{(\gamma + 1)} (\tau + \tau_0) - e_0$$

Cette équation d'état est une généralisation de l'équation d'état des gaz parfaits qui permet de considérer non seulement des gaz ( $P_0 = 0$ ) mais aussi des solides. Le solveur de Riemann est alors, à l'introduction près des paramètres  $P_0$  et  $\tau_0$ , identique à ceux utilisés pour l'équation d'état des gaz parfaits. Dans ce qui suit  $\tau_0$  est toujours nul et,  $\gamma$ ,  $P_0$  et  $e_0$  sont déterminés, pour chaque matériau, de façon à bien approcher la courbe d'Hugoniot définie à partir de l'état initial du matériau. Les calculs avec les différents codes montrent que le choix des paramètres n'influence que faiblement les résultats à condition de faire appel à la véritable équation d'état pour tout ce qui ne concerne pas le solveur de Riemann.

## II - APPLICATIONS ET RESULTATS NUMERIQUES

### II.1 - GAIA : UN CODE D'HYDRODYNAMIQUE BIDIMENSIONNEL ET À GRILLE VARIABLE.

GAIA est un code bidimensionnel qui utilise plusieurs méthodes dérivées des travaux de Godounov et ses collaborateurs. A chaque bras le solveur de Riemann direct est employé de sorte qu'il n'y a ni phase lagrangienne ni phase de projection. Le code ne fait pas appel à la méthode des directions alternées

#### SCHÉMAS DE GODOUNOV (X,Y) ET (ξ,η)

Les équations de l'hydrodynamique en variables eulériennes :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) + \frac{\partial}{\partial y} G(U) = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix}$$

s'écrivent sous forme intégrale :  $\iint U \, dx \, dy + F \, dy \, dt + G \, dt \, dx = 0$ .

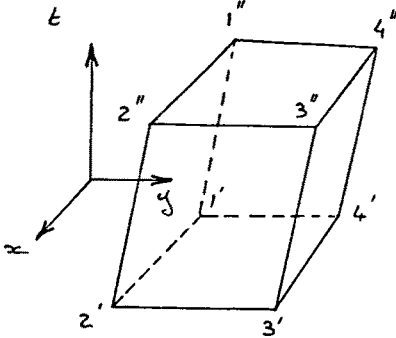


Fig. a

• Le schéma de Godounov grille variable cartésien est construit (cf. fig. a) en appliquant cette formulation à la surface fermée (1', 2', 3', 4', 1'', 2'', 3'', 4'') délimitée par les 4 sommets d'une maille au cours de son déplacement arbitraire sur le pas de temps  $\Delta t$ . En adoptant les notations :

$$\Omega^{n+1} = \iint (1'', 2'', 3'', 4'') \, dx \, dy, \quad \Omega^n = \iint (1', 2', 3', 4') \, dx \, dy$$

$$\Omega_{ij} = \iint (i', j', j'', i'') \, dx \, dy, \quad \Phi_{ij} = \iint (i', j', j'', i'') \, dy \, dt,$$

$$\phi_{ij} = \iint (i', j', j'', i'') \, dt \, dx, \quad Q_{ij} = U_{ij} \Omega_{ij} + F_{ij} \Phi_{ij} + G_{ij} \psi_{ij}$$

où  $U_{ij}$ ,  $F_{ij}$ ,  $G_{ij}$  désignent les valeurs moyennes des quantités  $U$ ,  $F$  et  $G$  sur le côté  $[ij]$  à l'instant  $t + \Delta t/2$ , le schéma numérique reliant  $U^n$  à  $U^{n+1}$ , quantités conservatives au centre de la maille aux instants  $t$  et  $t+\Delta t$ , s'écrit :

$$U^{n+1} \Omega^{n+1} = U^n \Omega^n - Q_{12} - Q_{23} - Q_{34} - Q_{41}$$

En calculant les positions moyennes des sommets :

$$x_i = \frac{1}{2} (x_{i'} + x_{i''}), \quad y_i = \frac{1}{2} (y_{i'} + y_{i''})$$

en approchant les surfaces  $\Omega_{ij}$ ,  $\Phi_{ij}$ ,  $\Psi_{ij}$  par :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} [(x_j - x_i)(y_i - y_j) - (x_i - x_j)(y_j - y_i)] , \Phi_{ij} = \Delta t (y_j - y_i) , \Psi_{ij} = \Delta t (x_i - x_j)$$

puis en définissant une vitesse de grille  $W_{ij}^*$  telle que :

$$\Omega_{ij} = \Delta t \ell_{ij} W_{ij}^* \text{ avec } \ell_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

le flux numérique  $Q_{ij}$  prend la forme :

$$Q_{ij} = U_{ij} \Delta t \ell_{ij} W_{ij}^* + F_{ij} \Delta t (y_j - y_i) - G_{ij} \Delta t (x_j - x_i)$$

Cette expression devient, en introduisant les cosinus directeurs de la normale au côté  $\alpha_{ij} = -(y_j - y_i)/\ell_{ij}$ ,  $\beta_{ij} = (x_j - x_i)/\ell_{ij}$

$$Q_{ij} = \Delta t \ell_{ij} (U_{ij} W_{ij}^* - F_{ij} \alpha_{ij} - G_{ij} \beta_{ij})$$

ou encore, en faisant apparaître la composante normale de vitesse matière

$$N_{ij} = \alpha_{ij} U_{ij} + \beta_{ij} V_{ij}$$

$$Q_{ij} = \Delta t \ell_{ij} \begin{matrix} R(W_{ij}^* - N) \\ RU(W_{ij}^* - N) - \alpha P \\ RV(W_{ij}^* - N) - \beta P \\ RE(W_{ij}^* - N) - NP \end{matrix} \quad ij$$

Les quantités  $(R, P, N, E)_{ij}$  sont calculées par résolution du problème de Riemann selon la direction normale au côté. Si  $U_{ij}^*$  désigne la vitesse de la discontinuité de contact, la composante tangentielle de vitesse matière est choisie d'après :

$$T_{ij} = \begin{matrix} t_{ij}^{\text{gauche}} \\ T_{ij}^{\text{droite}} \end{matrix} , \text{ si } \begin{matrix} W_{ij}^* < U_{ij}^* \\ W_{ij}^* > U_{ij}^* \end{matrix}$$

Les composantes cartésiennes de vitesse nécessaires au calcul du flux numérique  $Q_{ij}$  sont reconstituées par  $U_{ij} = \alpha_{ij} N_{ij} + \beta_{ij} T_{ij}$ ,  $V_{ij} = \beta_{ij} N_{ij} - \alpha_{ij} T_{ij}$ .

• La version curviligne du schéma de Godounov 2-D est sensiblement plus complexe.

Un repère curviligne local  $(\xi, \eta)$  est défini pour chaque maille en début de chaque pas de temps. Les équations d'Euler sont considérées selon les composantes intrinsèques de vitesse  $(\mu_k, v_n)$  [resp.  $(v_k, \mu_n)$ ] pour chaque ligne de coordonnée  $\xi$  [resp.  $\eta$ ]. Les schémas numériques grille variable est alors bâti comme dans le cas cartésien, par intégration sur l'élément de volume. Des termes apparaissent en second membre des équations de l'impulsion, en raison de la courbure des lignes de coordonnée et de la non-orthogonalité du maillage.

La dérivation complète figure dans l'ouvrage [2]. La variante implantée dans le code GAIA est donnée en référence [3].

## EXTENSION TVD D'ORDRE 2

### a - Equation de l'advection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad \text{où } f(u) = a u, \quad a = \text{cste}$$

Le schéma décentré et le schéma de Lax-Wendroff, schémas respectivement d'ordre 1 et 2, s'écrivent en posant  $\sigma = a\Delta x/\Delta t$  :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}})$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^d = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) - \frac{\text{sign}(\sigma)}{2} (f_{i+1} - f_i)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{LW} = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) - \frac{\sigma}{2} (f_{i+1} - f_i)$$

Une large classe de schémas TVD "quasi" d'ordre 2 s'obtient pour cette équation (voir par exemple /4/, /5/) en introduisant un limiteur  $\phi$  permettant de retrouver le schéma d'ordre 1 sur les discontinuités, là où le schéma d'ordre 2 générerait des oscillations.

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}^d + \phi [f_{i+\frac{1}{2}}^{LW} - f_{i+\frac{1}{2}}^d] \quad \text{avec } 0 \leq \phi \leq 1.$$

### b - Système hyperbolique non linéaire de lois de conservation

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0 \quad \text{où } A = \frac{\partial F}{\partial U}, \quad A \text{ à valeurs propres réelles.}$$

La méthode de linéarisation de Roe, établie pour les équations de la dynamique des gaz dans le cas gaz parfait, peut s'appliquer avec l'équation d'état bino-

miale. En calculant la matrice  $\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} = A^{\text{Roe}}(F_i, F_{i+1})$  de valeurs propres  $(\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^k)$ , de vecteurs propres  $(\tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^k)$ , en déterminant  $(\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^k)$  d'après :

$$F_{i+1} - F_i = \sum_k (\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^k) (\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^k) (\tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^k)$$

le schéma scalaire "quasi" d'ordre 2 précédent s'écrit pour le système linéarisé, après quelques manipulations algébriques.

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (F_i + F_{i+1}) - \sum_k (\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^k) |\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^k| (\tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^k) + \frac{1}{2} \sum_k \phi_k [\text{sign}(\sigma_k) - \sigma_k] (\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^k) (\tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^k)^r$$

Les deux premiers termes constituent le flux décentré de Roe qui, pris isolément, aboutit à un schéma numérique du premier ordre. Le dernier terme s'interprète ainsi comme un flux d'antidiffusion.

La spécificité du schéma numérique d'ordre 2 développé dans le code GAIA est d'utiliser ce flux d'antidiffusion de Roe avec le flux de Godounov (i.e. solution du problème de Riemann).

### c - Hydrodynamique 2-D grille variable ( $\xi, \eta$ )

L'implantation en deux dimensions d'espace est réalisée par la méthode traditionnelle de "splitting", mais en variables curvilignes c'est-à-dire en considérant dans la détermination du flux numérique selon la direction  $\xi$  du maillage logique

$$(\text{resp. } \eta) \frac{\partial}{\partial t} \Psi' + A' \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi' = B', \quad [\text{resp. } \frac{\partial}{\partial t} \Psi'' + A'' = B''] \text{ avec } \Psi' = \begin{vmatrix} \mu_n \\ v_k \\ \rho \\ p \end{vmatrix}, \quad \Psi'' = \begin{vmatrix} v_n \\ \mu_k \\ \rho \\ p \end{vmatrix}.$$

Les flux d'antidiffusion sont calculés par la méthode précédemment exposée pour être ajoutés aux flux de Godounov.

A l'heure actuelle la discrétisation de certains termes sources, notamment ceux de non-orthogonalité du maillage, est encore réalisée à l'ordre 1.

## RÉSULTATS NUMÉRIQUES

### 1/ Implosion sphérique

Les performances du code GAIA en calcul d'implosion sont illustrées fig. 1, 2, par le cas test sévère proposé par W. NOH /6/ associant une forte compression isentropique à un choc d'intensité infinie. Le schéma numérique de von Neumann-Richtmyer concède, en utilisant la formulation classique de pseudoviscosité, d'importantes erreurs au pôle et sur le niveau du choc retour. Ces erreurs sont particulièrement bien corrigées par le schéma GAIA d'ordre 2.

## 2/ Choc oblique

L'exemple suivant permet de vérifier la qualité du schéma quant aux phénomènes 2-D d'interaction entre matériaux. La figure 3 montre une géométrie correspondant à une transmission de choc (41,5 Gpa) d'un matériau d'impédance forte vers un autre matériau d'impédance faible avec une incidence de 17 degrés. Sur les figures 4 et 5, la très bonne linéarité des isobares et isodensités pour les chocs incidents transmis, ainsi que pour la détente réfléchie souligne l'excellente précision en présence d'un maillage grossier a priori imparfaitement adapté à la simulation du phénomène.

## 3/ Relèvement de cylindre

Le dernier exemple présente un relèvement de cylindre (explosif TATB-cuivre) obtenu en utilisant un maillage relativement grossier (cf. fig. 6). Nous donnons fig.7 et 8 le maillage utilisé avec le code GAIA traitant en grille variable le glissement et l'advection dans le sens longitudinal et le maillage utilisé avec un code lagrangien multibloc. Les courbes de la figure 9 soulignent à nouveau la parfaite "propreté" de la mise en vitesse.

## II.2 - CEE-R : UN CODE EULÉRIEN MULTIFLUIDE

Le code CEE-R est un code bidimensionnel qui utilise la méthode des directions alternées. En outre, le schéma employé dans chaque direction est d'ordre 1 et se décompose en une phase lagrangienne utilisant un solveur de Riemann et une phase de projection basée sur la méthode SLIC.

Le code est multifluide, d'où quelques difficultés pour introduire un solveur de Riemann. Chaque maille peut contenir plusieurs matériaux et pour le solveur de Riemann il faut définir un état et une équation d'état de chaque côté du bras considéré.

L'équation d'état de mélange est obtenue à partir de la relation :

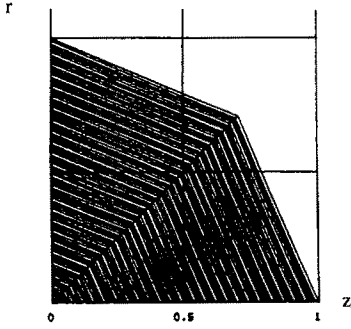


Fig. 1.a

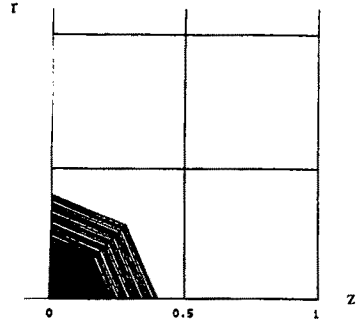


Fig. 1.b

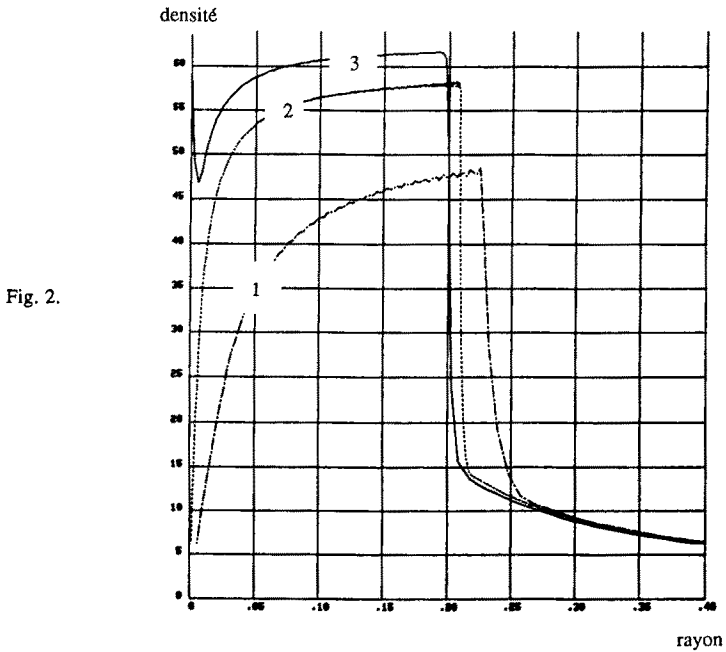


Fig. 2.

IMPLOSION SPHERIQUE : cas test de Noh ( $r_{\max} = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $u_r = -1$ ,  $p = 0$ ,  $\gamma = 1.4$ )

Fig 1.a Maillage initial GAIA

Fig 1.b Maillage final GAIA

Fig 2. Profils de densité ( $\rho_{\text{théorique}}^{\text{MAX}} = 64$ )

- courbe 1: schéma 1-D de Rytchmyer (pseudo quadratique) 100 couches
- courbe 2: schéma 1-D de Rytchmyer (pseudo quadratique) 400 couches
- courbe 3: schéma 2-D GAIA 100 couches



y (cm)

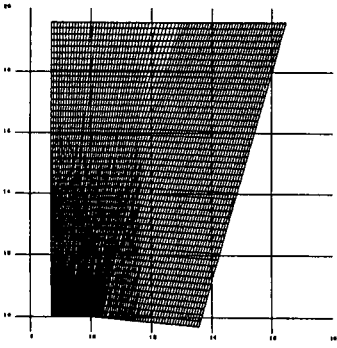


Fig. 3.

x (cm)

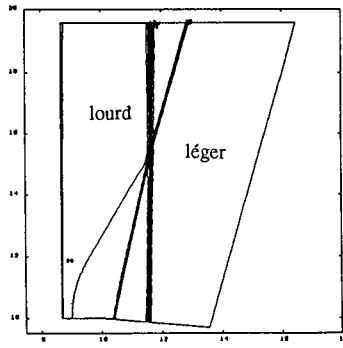


Fig. 4.

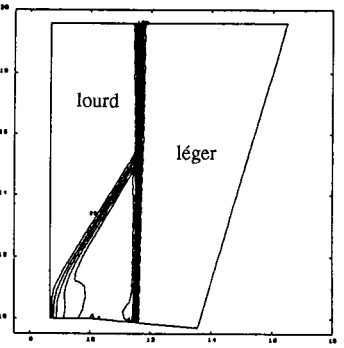


Fig. 5.

CHOC OBLIQUE 2-D : lourd - léger

Fig. 3. Géométrie et maillage

Fig. 4. Isodensités

Fig. 5. Isobares

r (cm)

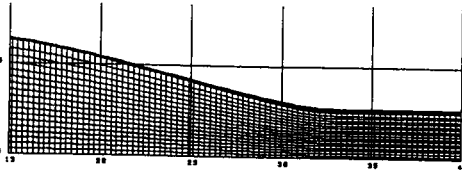


Fig. 6.

z (cm)

Fig. 7.

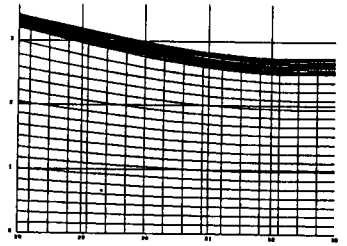
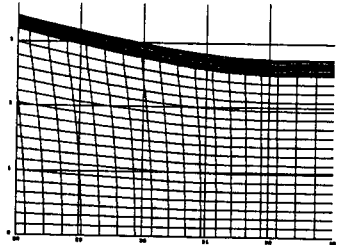


Fig. 8.



RELEVEMENT DE CYLINDRE : TATB - cuivre

Fig. 6. Géométrie et maillage

Fig. 7. Maillage GAIA grille variable monobloc

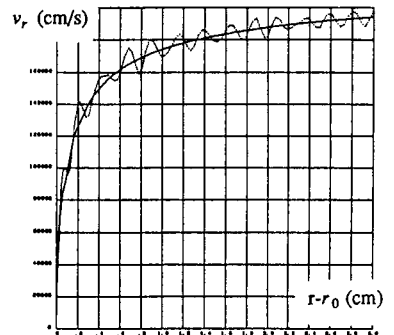
Fig. 8. Maillage code lagrangien multibloc avec glissement

Fig. 9. Courbes de mise en vitesse

- trait plein : schéma GAIA d'ordre 2

- trait pointillé : schéma de Wilkins multibloc

Fig. 9.



$$m e = \sum_k m_k e_k,$$

définissant l'énergie interne spécifique ( $e$ ) d'une maille mixte (i.e. contenant plusieurs matériaux) à l'aide des énergies internes spécifiques de chacun des matériaux ( $e_k$ ). En introduisant l'équation d'état binomiale pour le mélange et pour chaque matériau la relation devient :

$$(III.1) \quad \rho v \frac{P + \gamma P^0}{(\gamma-1)\rho} = \sum_k \rho_k v_k \frac{P_k + \gamma_k P_k^0}{(\gamma_k-1)\rho_k}$$

Cette relation doit être toujours vérifiée. En particulier si le mélange est isobare elle s'écrit :

$$\frac{P + \gamma P^0}{\gamma - 1} v = \sum_k \frac{P_k + \gamma_k P_k^0}{(\gamma_k - 1)} v_k$$

Cette dernière égalité est valable quelle que soit la valeur de  $P$ , par conséquent nous obtenons :

$$\gamma = 1 + \frac{v}{\sum_k \frac{v_k}{\gamma_{k-1}}},$$

et

$$P^0 = \frac{\gamma-1}{\gamma v} \sum_k \frac{\gamma_k P_k^0}{\gamma_{k-1}} v_k.$$

Reste maintenant à définir des valeurs moyennes dans les mailles mixtes. S'il est facile d'obtenir une densité moyenne à partir de la masse totale des matériaux et une vitesse moyenne à partir de la quantité de mouvement totale, le cas de la pression est plus délicat. Pour cela, il faut revenir à la relation (III.1) qui, en faisant intervenir la définition de  $\gamma$  et  $P^0$ , se simplifie pour donner :

$$\frac{Pv}{\gamma-1} = \sum_k \frac{P_k v_k}{\gamma_{k-1}},$$

soit

$$P = \frac{(\gamma-1)}{v} \sum_k \frac{P_k v_k}{(\gamma_{k-1})}.$$

Le solveur de Riemann peut donc être utilisé à chaque bras, même dans le cas de mailles mixtes, et définit une pression et une vitesse sur le bras considéré. Si

la phase lagrangienne s'effectue classiquement (en appliquant les lois de conservation) pour les mailles pures (avec un seul matériau), pour les autres il faut non seulement calculer les accroissements (algébriques) de volume, de quantité de mouvement et d'énergie mais aussi répartir ces accroissements entre les divers matériaux constituant la maille considérée.

Tout d'abord, les accroissements de volumes  $\delta V_k$  sont répartis en fonction des accroissements calculés à l'aide des équations d'état simplifiées. Les accroissements de quantité de mouvement sont répartis au prorata des masses. Cette répartition faite il est possible de calculer un accroissement d'énergie cinétique pour chaque matériau et donc aussi pour la maille. Finalement, l'accroissement d'énergie interne, obtenu par différence entre l'accroissement d'énergie totale et celui d'énergie cinétique, est réparti en fonction des produits  $P_k \cdot \delta V_k$ .

## RÉSULTATS NUMÉRIQUES

### 1/ Instabilités de Rayleigh-Taylor

L'utilisation d'un solveur de Riemann a permis de passer des calculs d'instabilités en milieu quasi incompressible et d'obtenir des résultats dont la qualité peut être appréciée sur la planche 10 qui représente l'état de l'interface entre le gaz lourd et le gaz léger à différents instants.

### 2/ Impllosion sphérique

Les figures de la planche 11 montrent l'évolution d'une sphère composée de trois matériaux concentriques (tantale, molybdène et air) et soumise à une pression extérieure de 500 kilobars. Bien que la méthode soit eulérienne et d'ordre un, la sphéricité est bien conservée.

## II.3 - ARES : UN CODE POUR LES ÉCOULEMENTS RÉACTIFS

Pour résoudre les équations de l'hydrodynamique,

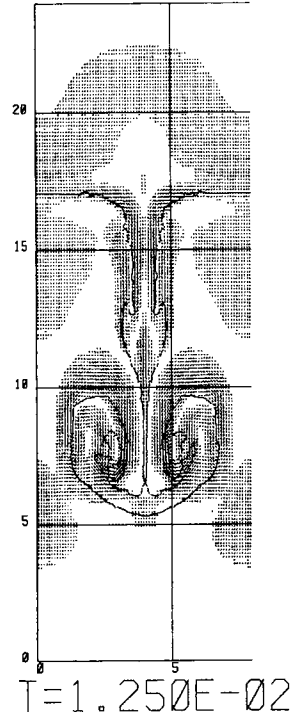
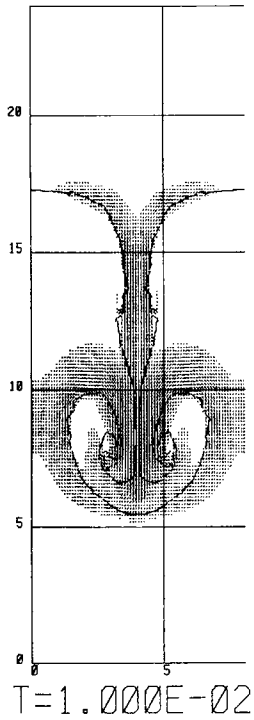
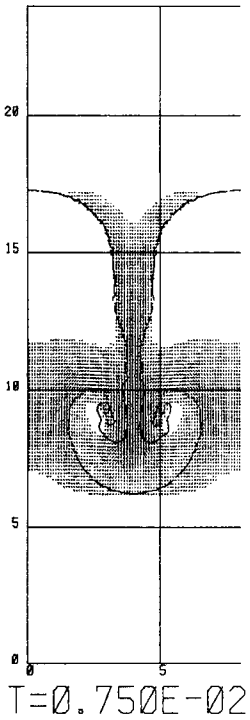
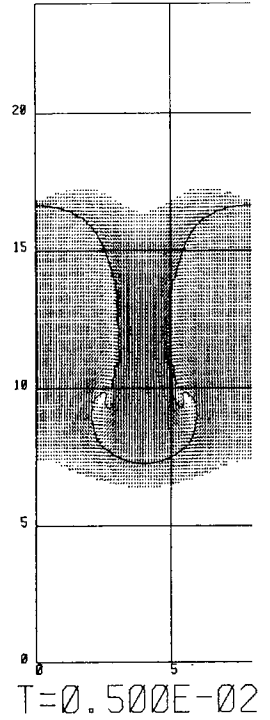
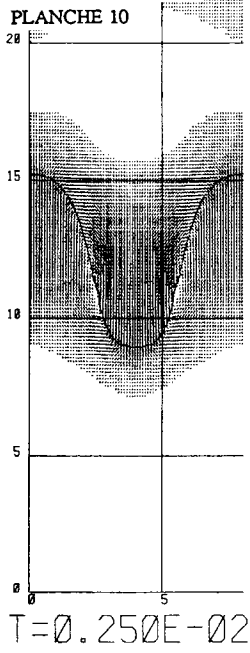
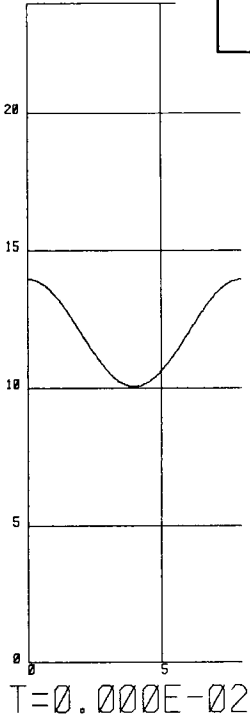
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + \chi \rho v = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (Pv)}{\partial r} + \chi \frac{Pv}{\rho} = 0 ;$$

INSTABILITES DE RAYLEIGH-TAYLOR :

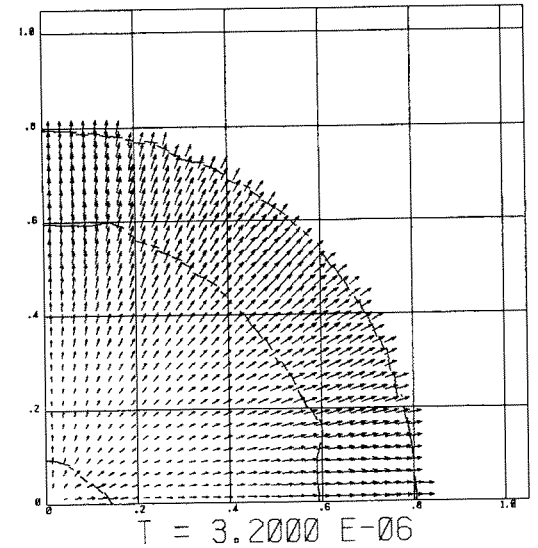
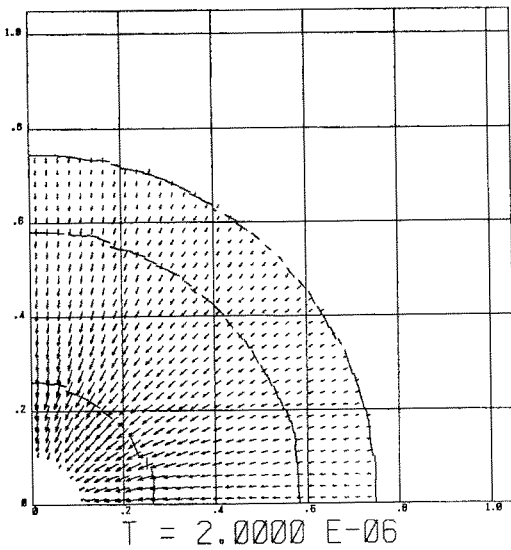
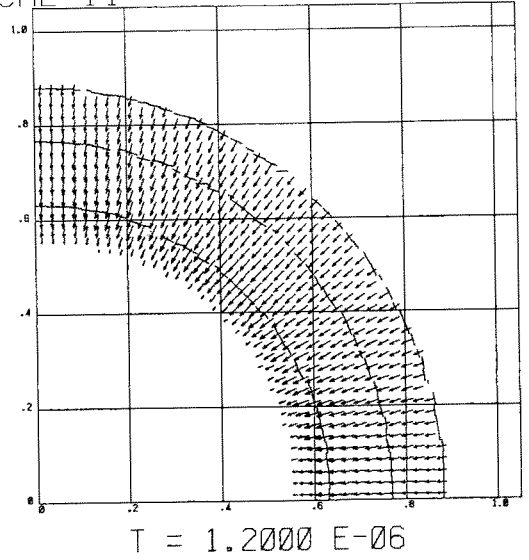
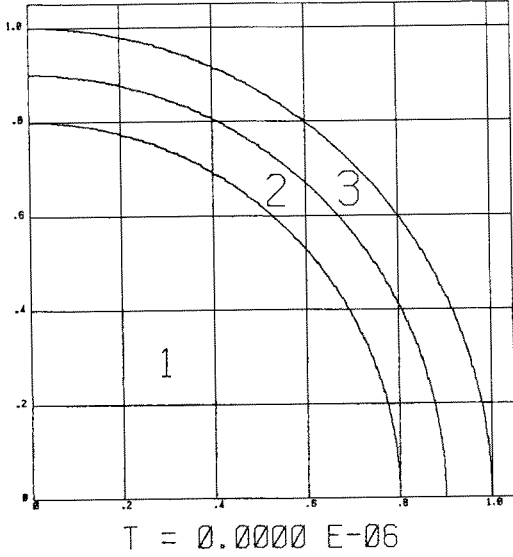
Evolution d'une interface avec le code CEE-R



IMPLOSOIR SPHERIQUE :  $p_{initiale} = 1 \text{ bar}$ ,  $p_{externe} = 500 \text{ kbar}$

- milieu 1 : air , milieu 2 : molybdène , milieu 3 : tantale
- géométries avant et après rebond avec le code CEE-R

PLANCHE 11



couplées à la cinétique chimique

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} = f(P, \rho, w),$$

et à l'équation d'état binomiale.

$e = \frac{P + \gamma P^0}{(\gamma - 1)\rho} - e^0$  où  $e = E - \frac{1}{2} u^2$ ;  $\gamma, P^0$  et  $e^0$  sont des fonctions de  $w$ ;  $\chi$  est une fonction de  $r$ , la méthode utilisée dans ARES et basée à quelques détails près sur le schéma de B. Van Leer // se décompose en deux phases : une phase lagrangienne qui permet de calculer l'évolution du fluide considéré et une phase de remaillage qui traduit cette évolution sur un maillage donné (en général eulérien). Après chacune de ces phases, une procédure de correction est nécessaire pour assurer une bonne stabilité au schéma. Chaque phase définit des valeurs moyennes et des gradients pour chaque maille ; les gradients sont modifiés lors des procédures de correction afin que le schéma soit monotone. L'ordre 2 est obtenu en utilisant une projection d'ordre 2 et un solveur pour le problème de Riemann généralisé tenant compte de la cinétique chimique. Cette méthode a été choisie car c'est une amélioration du schéma de GODOUNOV qui est considéré comme le meilleur schéma monotone d'ordre 1. Par ailleurs, la décomposition en deux phases permet de greffer plus facilement une méthode de suivi de front.

Pour les écoulements réactifs la méthode des directions alternées est légèrement modifiée en raison de la cinétique chimique. En effet, celle-ci ne peut être traitée à chaque balayage car la méthode ferait alors dégager l'énergie deux fois trop vite. Pour palier cet inconvénient, la cinétique n'intervient à chaque pas de temps que lors du second balayage, le premier balayage se contentant de convecter les fractions brûlées. Cette méthode a l'avantage d'être moins diffusive que celle qui consisterait à appliquer la cinétique à chaque balayage mais pour un demi pas de temps. Elle permet en particulier d'utiliser des maillages plus grossiers sans trop détériorer la solution.

#### Suivi de front unidimensionnel

Lors de la phase de projection d'un calcul unidimensionnel, le maillage sur lequel on projette la solution obtenue après la phase lagrangienne peut ne pas être fixe mais varier d'un instant à l'autre (i.e. la méthode qui a été mise en oeuvre peut s'appliquer aussi bien en Euler qu'en grille variable). En effet, pour améliorer la précision du calcul il est parfois utile de pouvoir suivre un front de discontinuité (front de détonation, choc, discontinuité de contact).

Pour introduire la position du front à un instant donné dans le maillage la

première méthode envisagée consiste simplement à remplacer le noeud qui suit immédiatement le front par le front lui-même (voir figure P1). Mais cette méthode présente l'inconvénient d'introduire parfois des mailles de dimensions trop faibles. C'est pourquoi il est alors préférable de remplacer le noeud le plus proche du front et non plus systématiquement celui qui suit (voir figure P2).

Quelle que soit la méthode choisie il n'y a pas de modification à apporter à la phase de projection, une fois que le nouveau maillage a été défini. Par contre, pour la phase lagrangienne, il convient de distinguer entre les discontinuités de contact qui sont des surfaces fluides et les autres fronts.

Dans le premier cas la phase lagrangienne ne subit aucune modification et permet de définir la nouvelle position du front (voir figures Q1 et Q2).

Dans le second cas il convient d'ajouter à nouveau une maille correspondant à la masse de fluide traversée par le front entre l'instant  $t$  et l'instant  $t+\Delta t$  (voir figure R). Les valeurs moyennes dans les mailles de part et d'autre de la position du front à l'instant  $t+\Delta t$  sont déterminées par la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Les pentes sont calculées à l'aide des valeurs connues ou obtenues de part et d'autre du front. Dans le cas d'une détonation C-J ces quantités sont fournies par la théorie, tandis que dans le cadre d'une discontinuité de contact ou d'un choc, elles sont données par la solution du problème de Riemann généralisé correspondant à la discontinuité considérée.

Les deux versions (bidimensionnelle et unidimensionnelle avec suivi du choc initiant la détonation) du code ARES ont été testées.

Dans le cas unidimensionnel l'exemple traité est une transition choc- détonation de type Forest Fire. Le choc initiant la détonation est réactif, c'est-à-dire qu'une partie de l'explosif est décomposée lors du passage du choc. La planche 12 représente les "Pop Plot" théorique et numérique reliant la pression ( $P$ ) à la distance parcourue par le choc ( $x$ ), les profils de pression et de fraction brûlée à différents instants et enfin les courbes de vitesse du choc et de pression sur le choc en fonction du temps.

Dans le cas bidimensionnel l'exemple traité est le contournement d'un coin par une onde de détonation. La planche 13 représente les isocontours de pression, densité, vitesses et fraction brûlée à l'issue du calcul.

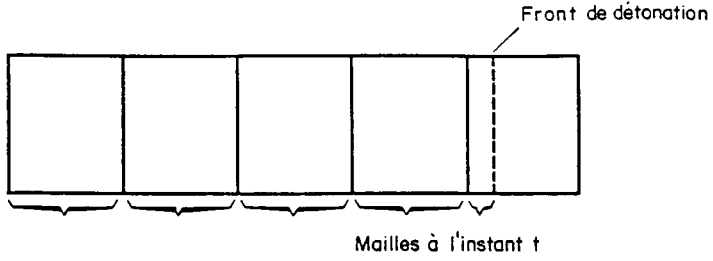


Figure P1

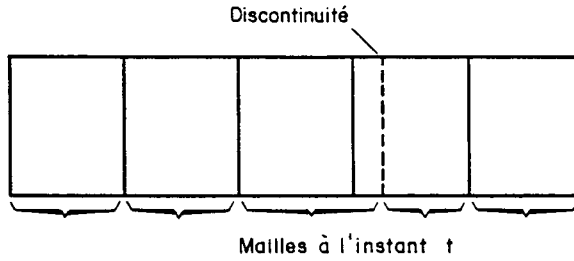


Figure P2

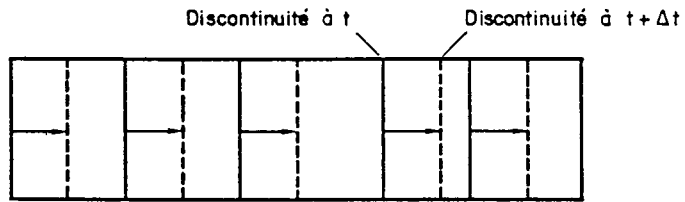
Maillage à l'instant  $t$  et maillage lagrangien à l'instant  $t + \Delta t$ 

Figure Q1

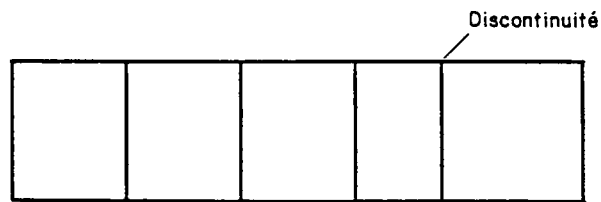
Maillage à l'instant  $t + \Delta t$ 

Figure Q2

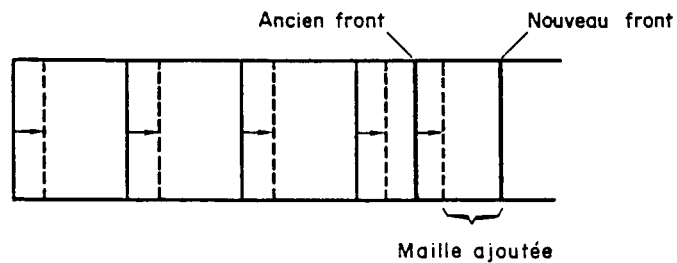
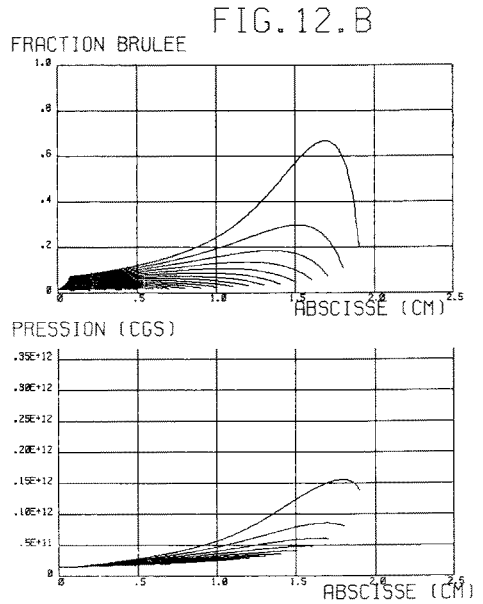
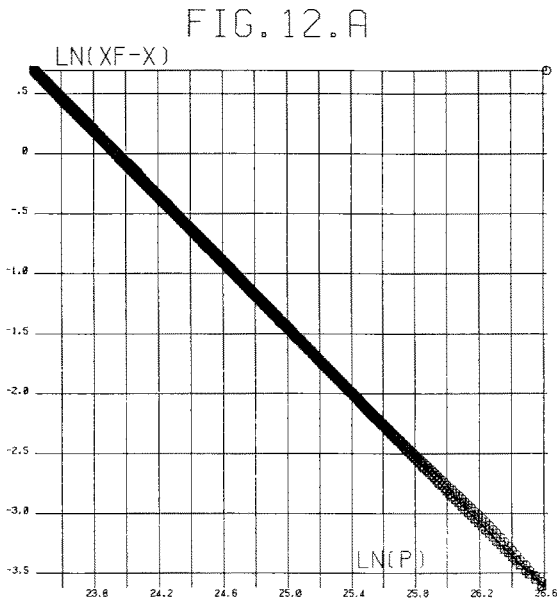
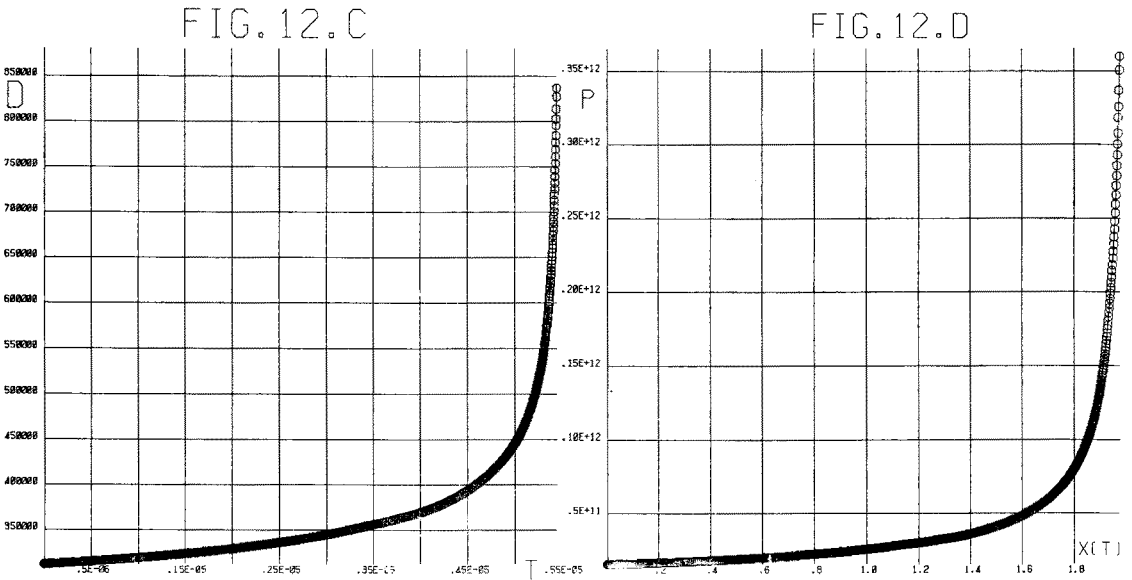


Figure R





## PLANCHE 12



TRANSITION CHOC-DETONATION : explosif PBX-9404

Fig. 12.a Superposition des "Pop plots" théorique et numérique

Fig. 12.b Etablissement de la détonation

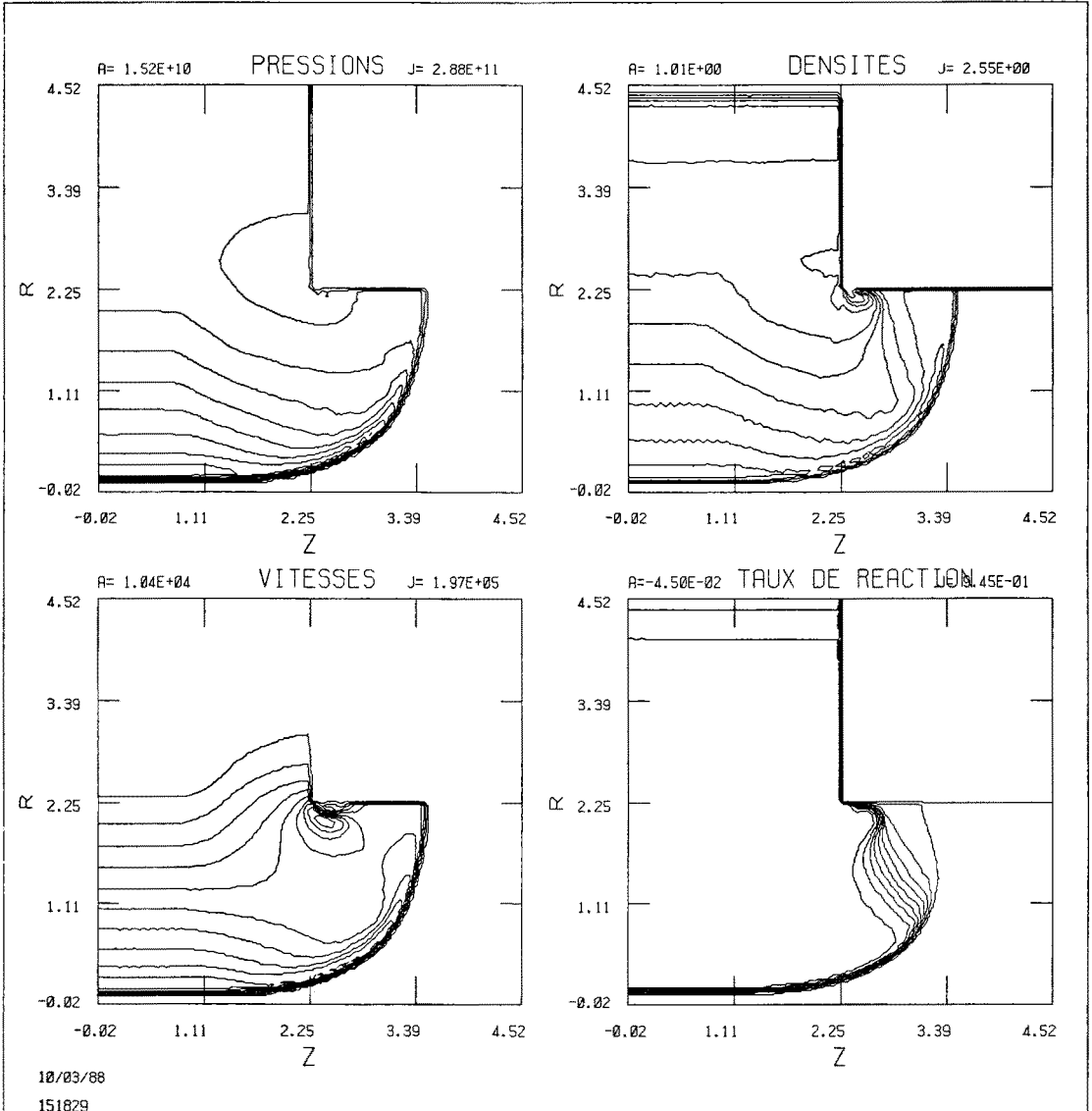
Fig. 12.c Vitesse du front réactif en fonction du temps

Fig. 12.d Pression sur le front réactif en fonction de la distance parcourue

## CONTOURNEMENT D'UN COIN : explosif PBX-9502

- Amorçage plan, cinétique "Forest Fire"
- Isovaleurs après le contournement

PLANCHE 13



## IV - CONCLUSION

Les exemples précédents montrent qu'il est possible d'introduire avec succès les méthodes numériques utilisant un solveur de Riemann dans des codes d'hydrodynamique.

Il faut noter cependant qu'aucun des codes présentés n'est lagrangien. En fait, si le solveur de Riemann fournit une vitesse au milieu des bras, les codes lagrangiens ont besoin d'une vitesse aux noeuds. Malgré de nombreux travaux /8/, il semble qu'aucune solution vraiment satisfaisante n'ait été trouvée.

## REFERENCES

- /1/ A. BOURGEADE  
"Quelques méthodes numériques pour le traitement des écoulements réactifs" Note CEA N-2570 (juin 1988).
- /2/ S.K. GODOUNOV et al.  
"Résolution des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz" - Edition Mir, Moscou (1979).
- /3/ H. JOURDREN  
"Rencontre 87 CEA/DAM-LANL" - preprint (1987).
- /4/ A. HARTEN  
J. Comput. Phys. 49 (1983), 357.
- /5/ P.K. SWEBY  
SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984), 995.
- /6/ W.F. NOH  
J. Comput. Phys. 72 (1988), 78.
- /7/ B. VAN LEER  
J. Comput. Phys. 32 (1979), 101.
- /8/ C. CHERFILS  
Thèse PARIS VI (1988).