# SUITES ALEATOIRES D'ENTIERS

Yitzhak KATZNELSON

Soient $\mathbb{Z}$ le groupe des entiers, $\mathbb{T} = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ le groupe dual muni de la topologie usuelle et $\mathbb{T}_d$ le même groupe muni de la topologie discrète. Le compactifié de Bohr $B$ de $\mathbb{Z}$ est le groupe dual de $\mathbb{T}_d$ et l'injection $\beta : \mathbb{Z} \to B$ est duale de l'injection canonique de $\mathbb{T}_d$ dans $\mathbb{T}$. Grâce à $\beta$, $\mathbb{Z}$ devient un sous groupe dense dans $B$.

La méthode aléatoire exposée ci-dessous permet de construire des ensembles $\Lambda$ "rares" dans $\mathbb{Z}$ au sens de l'analyse harmonique mais tels que $\beta(\Lambda)$ soit dense dans $B$. Cependant, la question la plus intéressante : "existe-t-il une suite de Sidon dense dans $B$ ?" reste ouverte.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ soit dense dans $B$ est que, pour tout entier $s \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{T}^s$, l'ensemble $\Lambda x$ des $\lambda x$, $\lambda \in \Lambda$, soit dense dans le groupe engendré par $x$ dans $\mathbb{T}^s$.

Ceci dit, nous ne savons même pas s'il existe une suite de Sidon $\Lambda$ pour laquelle $\Lambda x$ soit dense dans $\mathbb{T}$ pour tout $x$ "irrationnel" de $\mathbb{T}$. Nous montrons au § 1 que certaines suites aléatoires sont denses dans $B$. Les applications à l'analyse harmonique sont données au § 2.

## § 1 - Suites aléatoires denses dans le compactifié de Bohr des entiers

Nous considérons une classe de suites aléatoires construites de la manière suivante : soit $n_k$, $k \geq 1$, une suite rapidement croissante d'entiers, l'on suppose $n_{k+1} > n_k^2$, et choisissons au hasard $\ell_k$ nombres entiers dans l'intervalle $]n_{k-1}, n_k]$. Notons l'ensemble ainsi obtenu par $\Lambda_k$ et posons $\Lambda = \bigcup_{k \geq 1} \Lambda_k$. Il n'est pas très difficile de voir ([1]) que $\Lambda$ est presque sûrement de Sidon si et seulement si $\ell_k = 0(\log n_k)$.

<u>Théorème</u>. <u>Supposons qu'il existe</u> $c > 0$ <u>tel que l'inégalité</u> $\ell_k > c \log n_k$ <u>soit satisfaite pour une infinité de valeurs de</u> $k$ . <u>Soit</u> $\eta > 0$ <u>tel que</u> $e\,\eta^c < 1$. <u>Alors il est presque sûr que, pour tout</u> $s \geq 1$ <u>et tout</u> $x \in \mathbf{T}^s$ ,

$$\mu_x\,(\overline{\Lambda\, x}) > \eta^s \quad ,$$

$\mu_x$ <u>étant la mesure de Haar du sous groupe fermé engendré par</u> $x$ <u>dans</u> $\mathbf{T}^s$.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> $\ell_k$ <u>n'est pas</u> $0(\log n_k)$ , $k \to +\infty$ , <u>presque toutes les suites</u> $\Lambda$ <u>sont denses dans le compactifié de Bohr de</u> $\mathbf{Z}$.

En effet, les hypothèses du théorème étant valables pour tout $c > 0$ , la conclusion l'est pour tout $\eta < 1$. Donc pour tout $x \in \mathbf{T}^s$ , $\Lambda\, x$ est dense dans le groupe engendré par $x$.

Passons à la preuve du théorème. Il suffit de démontrer que, pour tout entier $s \geq 1$ , presque toutes les suites $\Lambda$ sont telles que, pour tout $x \in \mathbf{T}^s$ ,

$$\mu_x\,(\overline{x\,\Lambda}) \;\geq\; \eta^s \;.$$

D'autre part, quitte à changer d'indices, on peut supposer que

$$\ell_k \geq c \log n_k \qquad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Soit maintenant $(\Omega_k)_1^\infty$ une suite dénombrable d'ouverts de $\mathbf{T}^s$ ayant les deux propriétés suivantes : tout ouvert $U \subset T^s$ est réunion croissante d'ouverts de la suite et tout ouvert apparaissant dans la suite $(\Omega_k)_1^\infty$ y apparaît une infinité de fois.

Soient $E \subset \mathbf{T}^s$ une partie compacte et $x \in \mathbf{T}^s$. Montrer que $\mu_x\,(E) \geq \eta^s$ revient à montrer que, pour tout $k \geq 1$ , $\mu_x\,(\Omega_k) > 1 - \eta^s$ implique que $\Omega_k \cap E$ n'est pas vide.

L'idée de la preuve est de remplacer l'ensemble non dénombrable des points de tests $x \in T^s$ par un ensemble fini $G_k$ (adapté à la partie $\Lambda_k$ de $\Lambda$).

Notons d'abord par $F_k$ l'ensemble des $(k\, n_k)^s$ points de $\mathbf{T}^s$ de la forme

$$a = (j_1/k\, n_k \,,\, \dots \,,\, j_s/k\, n_k)$$

tels que

$$0 \le j_1 < k\, n_k \,,\, \dots \,,\, 0 \le j_s < k\, n_k$$

et notons par $G_k$ le sous ensemble de $F_k$ formé des $a$ tels que

$$\text{Card}\,\{n \,;\, n_{k-1} < n \le n_k \ \text{ et } \ n\, a \in \Omega_k\} > (1 - \eta^s)\, n_k \,.$$

Ces définitions de $F_k$ et de $G_k$ ne dépendent pas de $\Lambda$. Pour tout $a \in G_k$, la probabilité de choisir l'ensemble $\Lambda_k$ de sorte que $\Lambda_k\, a \cap \Omega_k = \emptyset$ est majorée par $\eta^{s\ell_k}$ ; le nombre d'éléments de $G_k$ ne dépassant pas $(k\, n_k)^s$, la probabilité pour que, pour tout $a \in G_k$, $\Lambda_k\, a \cap \Omega_k$ ne soit pas vide, dépasse

$$1 - (k\, n_k)^s\, \eta^{s\ell_k} > 1 - k^s\, (e\, \eta^c)^{s \log n_k} \,.$$

Puisque $e\, \eta^c < 1$, la croissance rapide de la suite des $n_k$ entraîne la convergence de la série

$$\sum_{k \ge 1} k^s\, (e\, \eta^c)^{s \log n_k} \,.$$

Du théorème de Borel-Cantelli, nous déduisons le lemme suivant.

<u>Lemme</u>. <u>Pour presque toutes les suites</u> $\Lambda$ <u>il existe un</u> $k_o$ <u>tel que pour tout</u> $k > k_o$ <u>et tout</u> $a \in G_k$, $\Lambda_k\, a$ <u>rencontre</u> $\Omega_k$.

Montrons maintenant que cette dernière propriété entraîne $\mu_x\, (\overline{\Lambda\, x}) \ge \eta^s$. Soit $x \in \mathbf{T}^s$, $\Omega$ un ouvert de la suite des $(\Omega_j)_1^\infty$ tel que $\mu_x\, (\Omega) > 1 - \eta^s$. Appelons $\Omega'$ et $\Omega''$ deux autres ouverts de la suite des $(\Omega_j)_1^\infty$ tels que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $\overline{\Omega''} \subset \Omega'$ et que, cependant, $\mu_x\, (\Omega'') > 1 - \eta^s$. La distance d'un nombre réel $x_1$ à l'entier le plus proche est notée $\|x_1\|$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbf{T}^s$, on pose

$$\|x\| = \|x_1\| + \ldots + \|x_s\|.$$

Soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que tout point $y \in \mathbf{T}^s$ dont la distance à $\Omega'$ ne dépasse pas $\epsilon$ appartienne à $\Omega$. De même, pour $\Omega''$ et $\Omega'$.

Pour $N \geq N_0$, on a

$$\text{Card}\,\{n\ ;\ 1 \leq n \leq N \text{ et } n\,x \in \Omega''\} > (1 - \eta^s)\,N\,.$$

Pour tout entier $k$ tel que $\Omega_k = \Omega'$, que $n_k > N_0$ et assez grand pour que $k > \frac{s}{\epsilon}$, appelons $a_k$ un élément de $F_k$ tel que

$$\|a_k - x\| < \frac{s}{k\,n_k}\,.$$

On a $\|n\,a_k - n\,x\| < \epsilon$ pour $1 \leq n \leq n_k$ et donc $n\,x \in \Omega''$ implique $n\,a_k \in \Omega' = \Omega_k$. Par conséquent $a_k \in G_k$ et grâce au lemme $\Lambda_k\,a_k \cap \Omega'$ n'est pas vide. Le même raisonnement fournit $\Lambda_k\,x \cap \Omega \neq \emptyset$ ce qu'il fallait démontrer.

## § 2 - Applications à l'analyse harmonique

Etant donnée une fonction $\varphi\,(q)$ qui tend vers l'infini avec $q$ (arbitrairement lentement), on peut construire un ensemble $\Lambda$ d'entiers naturels, dense dans le compactifié de Bohr de $\mathbf{Z}$, mais tel que, pour tout somme trigonométrique $f$ dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$, on ait :

$$\|f\|_q \leq \varphi\,(q)\,\sqrt{q}\,\|f\|_2\,.$$

Il suffit que, dans la construction aléatoire d'une suite d'entiers du § 1, l'on prenne

$$\ell_k = \psi\,(k)\,\log n_k$$

et que $\psi\,(k)$ croisse assez lentement vers $+\infty$ (en fonction de $\varphi$).

## Références

[1] Katznelson - Malliavin - Vérification statistique... C.R. Acad. Sci. Paris, t. 262 pp. 490-492 (1966)

[2] Rudin, Trigonometric series with gaps, Jour. of Math. and Mechanics, Vol. 9, pp. 203 - 238 (1960)