

CARACTERISATION ET TEST DU CARACTERE AGREGATIF
DES PROCESSUS PONCTUELS STATIONNAIRES SUR \mathbb{R}^2

E. JOLIVET *

Institut National de la Recherche Agronomique
Laboratoire de Biométrie du C.N.R.Z.
78350 Jouy-en-Josas

0. INTRODUCTION .-
=====

Le problème de la mesure et du test du caractère agrégatif d'un processus ponctuel sur \mathbb{R}^2 a reçu à ce jour un certain nombre de solutions qui ne sont pas toutes satisfaisantes. Dans la suite, nous proposons une tentative de résolution pour les processus stationnaires ergodiques.

1. RAPPELS ET NOTATIONS .-
=====

Pour simplifier les notations \mathbb{R}^2 sera noté X , \mathcal{X} est sa tribu borélienne et \mathcal{C}_0 la famille des boréliens bornés.

Soit \mathcal{M} l'ensemble des mesures de Radon positives sur X , et $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ la tribu des boréliens vagues. On note \mathcal{M}^* l'ensemble des mesures ponctuelles et \mathcal{M}_1^* l'ensemble des mesures ponctuelles simples, c'est-à-dire des mesures qui chargent chaque point de X de la masse 0 ou 1.

Un processus ponctuel est une mesure aléatoire, c'est-à-dire une loi de probabilité sur $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ qui charge \mathcal{M}^* . P est un processus ponctuel simple si $P(\mathcal{M}_1^*) = 1$.

Si f est une fonction bornée mesurable à support compact,

$$\mu(f) = \int_X f(x) \mu(dx)$$

existe pour tout $\mu \in \mathcal{M}$. A chaque f , on associe la variable aléatoire

$$\mu \rightarrow Z(f, \mu) = \mu(f).$$

où μ est la réalisation du processus P .

* Ce travail a été effectué durant un séjour au sein de l'équipe de Statistiques de l'Université Paris XI 91405 ORSAY (E.R.A. CNRS - 532)

Si f est l'indicatrice d'une partie borélienne bornée A de X , la variable aléatoire sera notée $Z(A, \cdot)$. Si P est un processus ponctuel simple, alors

$$Z(f, \mu) = \sum_{x \in \text{supp.} \mu} f(x)$$

et

$$Z(A, \mu) = \# (A \cap \text{supp.} \mu)$$

où $\text{supp.} \mu$ désigne le support de μ .

$Z(A, \mu)$ est donc le nombre de points de la réalisation qui "tombent" dans A .

Pour toute mesure de Radon positive sur X , on notera P_ρ le processus de Poisson de mesure d'intensité ρ .

Soit $\{T_x\}_{x \in X}$ le groupe des translations du plan défini par

$$T_x(y) = x + y \quad \forall x, y \in X.$$

f étant une fonction bornée mesurable à support compact sur X quelconque on définit la transformée d'une mesure de \mathcal{M} par T_x par

$$T_x \mu(f) = \int_X f(x+y) \mu(dy)$$

ϕ étant une fonction bornée, mesurable, vaguement continue sur \mathcal{M} quelconque; on définit la transformée d'un processus P sur X par T_x par

$$T_x P(\phi) = \int_{\mathcal{M}_X} \phi(T_x \mu) P(d\mu).$$

Dans la suite, on s'intéresse uniquement aux processus stationnaires, c'est-à-dire tels que $T_x P \equiv P \quad \forall x \in X$.

Si P est stationnaire, il est stationnaire du premier ordre, et par conséquent son moment du premier ordre $v_p^{(1)}(\cdot)$ est proportionnel à la mesure de Lebesgue $\lambda(\cdot)$ sur X , soit $v_p^{(1)}(\cdot) = Z \lambda(\cdot)$.

On lui associe sa mesure de Palm P_0 qui est l'unique mesure positive σ -finie sur $(\mathcal{M}_0, \mathcal{B}(\mathcal{M}_0))$ telle que la mesure $P_0(\cdot) \otimes Z \lambda(\cdot)$ définie sur $\mathcal{M}_0 \times X$ soit l'image de la mesure $P(d\mu) \mu(dx)$ par l'application

$$(\mu, x) \rightarrow (T_{-x} \mu, x)$$

de $\mathcal{M}_0 \times X$ dans lui-même.

2. POSITION HEURISTIQUE DU PROBLEME .-

=====

Soit un processus de Poisson homogène sur X , c'est-à-dire dont la mesure d'intensité est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.

Envisageons la restriction à une partie borélienne bornée F de X de ce processus. L'événement $\{Z(F, \mu) = n\}$ a lieu avec la probabilité

$$e^{-Z\lambda(F)} \frac{[Z\lambda(F)]^n}{n!},$$

et conditionnellement à cet événement, les n points de la réalisation sont indépendamment et identiquement distribués selon la loi uniforme sur F . On peut expliquer cela de façon imagée en disant qu'il n'y a ni "attraction", ni "répulsion" entre les différents atomes de la réalisation. Par contre certains processus présentent ces phénomènes. On dira qu'un processus est agrégé (resp. régulier) si la probabilité de trouver un ou des atomes du processus dans un certain voisinage de x , sachant que la réalisation observée charge x , est plus grande (resp. plus petite) que pour les processus de Poisson homogène ayant le même moment d'ordre 1.

Il s'agit donc, d'une part, de "mesurer" ce caractère agrégatif à l'aide d'une mesure, ou à défaut, d'une fonction d'ensemble et, d'autre part, de tester la présence ou l'absence de ce caractère à l'aide de l'observation d'une réalisation du processus. Deux exemples parmi d'autres indiquent l'importance pratique de ce problème. En épidémiologie, les individus atteints étant les points de la réalisation, on peut penser qu'une maladie contagieuse se traduira par un processus agrégé. Dans une population de plantes, par contre, un phénomène de compétition donnera lieu à un processus régulier. Les écologistes utilisent un certain nombre de procédés pour tenter de caractériser l'agrégation d'un processus. Pour un exposé de cette question on peut par exemple consulter Pielou [5].

Plusieurs de ces procédés reposent sur le comptage en carrés contigus. On divise la région à échantillonner en carrés contigus et égaux. Soient C_1, C_2, \dots, C_N les carrés entièrement inclus dans la région à échantillonner. On observe $Z(C_i, \mu) = n_i$, $i = 1, \dots, N$.

On calcule la moyenne m et la variance expérimentale V des n_i puis le rapport

$$\frac{V}{m} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_i - m)^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i}$$

Dans le cas d'un processus de Poisson homogène, pour une grande région d'échantillonnage et pour un grand N , ce rapport est proche de 1. Une valeur "très inférieure" à 1 doit indiquer un processus régulier, une valeur "très supérieure" à 1 doit indiquer un processus agrégé. Ce rapport est utilisé comme critère du caractère agrégatif du processus et comme statistique de test. En tant que critère du caractère agrégatif, $\frac{V}{m}$ n'est pas satisfaisant dans la mesure où sa valeur dépend de la réalisation du processus, de la taille des carrés, de la région échantillonnée et non de la loi de processus même. En tant que statistique de test, on peut également lui reprocher sa variabilité en fonction de la taille des carrés, bien que, dans la pratique, on puisse s'intéresser au caractère agrégatif d'un processus à une échelle connue à l'avance. De plus, si l'hypothèse nulle est bien précisée, l'alternative est certainement beaucoup trop large. Enfin, on ne se préoccupe pas de savoir si $\frac{V}{m}$ est une "bonne statistique" c'est-à-dire si, asymptotiquement, dans un sens à préciser, le rapport $\frac{V}{m}$ dépend ou non de la réalisation.

Dans ce qui suit, nous proposons une fonction d'ensemble qui est un critère possible d'agrégation des processus ponctuels stationnaires et du second ordre. Il est possible d'estimer cette fonction d'ensemble par un estimateur sans biais, consistant dans le cas où le processus est ergodique. On utilise cet estimateur comme statistique de test et l'on examine sa loi asymptotique sous l'hypothèse nulle : la réalisation que l'on observe est celle d'un processus de Poisson homogène.

3. CRITERE D'AGREGATION DES PROCESSUS STATIONNAIRES SUR \mathbb{R}^2 (*) .-

=====

On cherche une fonction d'ensemble qui corresponde au rapport $\frac{V}{m}$ utilisé par les écologistes.

Soit C un borélien borné du plan, d'aire strictement positive. Nous avons vu que, par stationnarité

$$E [Z(C, \mu)] = v_p^{(1)}(1_C) = Z \lambda(C).$$

D'autre part, supposons que P soit du second ordre. Son moment du second ordre $v_p^{(2)}$ est tel que

$$v_p^{(2)}(f \otimes g) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} P(d\mu) \mu(dx) \mu(dy) f(x) g(y)$$

et pour $f = g = 1_C$, $v_p^{(2)}(f \otimes g) = E[Z(C, \mu)^2]$.

(*) Il est clair que tout peut s'adapter facilement à \mathbb{R}^k , $k \geq 1$.

Par suite des propriétés de la mesure de Palm appliquées à la fonction

$$(\mu, x) \rightarrow \int_X 1_C(x) 1_C(y) \mu(dy).$$

On a

$$E[Z(C, \mu)^2] = \int_{\mathcal{M}_0 \times X} P_0(d\mu) \int_X 1_C(x) 1_C(x+y) \lambda(dx) \mu(dy).$$

Or,

$$\int_X 1_C(x) 1_C(x+y) \lambda(dx) = \lambda(C \cap T_y(C))$$

est l'aire de l'intersection de C avec son image par la translation de vecteur y .

Pour tout C de \mathcal{X}_0 de mesure non nulle, on peut donc définir la fonction d'ensemble

$$\mathcal{A}(C) = \int_{\mathcal{M}_0 \times X} P_0(d\mu) \mu(dy) \frac{\lambda(C \cap T_y(C))}{\lambda(C)}$$

qui est telle que

$$Z \lambda(C) \mathcal{A}(C) = E[Z^2(C, \mu)].$$

Il est clair que $\mathcal{A}(C)$ n'est pas une mesure, car elle n'est pas σ -additive.

Pour le processus de Poisson de mesure d'intensité $Z \lambda(\cdot)$,

$$\mathcal{A}(C) = 1 + Z \lambda(C).$$

Pour un processus stationnaire quelconque, tel que $\nu_p^{(1)}(\cdot) = Z \lambda(\cdot)$, $\mathcal{A}(C)$ est un critère d'agrégation.

En effet, on peut interpréter $\mathcal{A}(C)$, à partir de l'interprétation de P_0 comme probabilité conditionnée par $\mu(\{0\}) = 1$.

Supposons que C ait un "centre" et que ce centre soit en 0. Alors

$$\int_X \mu(dy) \frac{\lambda(C \cap T_y(C))}{\lambda(C)} = \sum_{\text{supp. } \mu \cap C'} f(y)$$

où $C' = \{y, y \in X; \lambda(C \cap T_y(C)) \neq 0\}$.

Et $f(y) = \frac{\lambda(C \cap T_y(C))}{\lambda(C)}$ est le rapport de l'aire de l'intersection

de C avec son translaté de y à l'aire de C .

Pour un C raisonnable, c'est-à-dire convexe $f(y)$ décroît lorsque y s'éloigne de 0 le long d'une droite passant par l'origine.

$$\phi_C(\mu) = \int_X \mu(dy) \frac{\lambda(C \cap T_y(C))}{\lambda(C)}$$

dépend donc à la fois du nombre de points de la réalisation tombant dans C' mais aussi de la distance de ces points à l'origine. Si $Z(C', \mu) = n$,

$$\int_X \mu(dy) \frac{\lambda(C \cap T_y(C))}{\lambda(C)}$$

sera d'autant plus grand que les n points de la réalisation dans C' seront plus concentrés autour de l'origine.

$\hat{\phi}_C(C)$ peut donc être interprétée comme l'espérance de $\phi_C(\mu)$ conditionnée par $\mu(\{0\}) = 1$, et pour les processus stationnaires de même moment d'ordre 1, $\hat{\phi}_C(C)$ sera d'autant plus grand que les points du processus seront agglomérés.

Cette interprétation un peu grossière de $\hat{\phi}_C(C)$ sera éclairée par la façon naturelle dont on l'estime.

4. ESTIMATION DE $\hat{\phi}_C(C)$.-
 =====

Le théorème ergodique de X.X. Nguyen et H. Zessin [4] va nous permettre d'étudier le comportement asymptotique d'un estimateur naturel de $\hat{\phi}_C(C)$.

Rappelons la définition d'une famille régulière de parties de \mathbb{R}^2 .

Une famille de sous ensembles de \mathbb{R}^k d'intérieur non vide, convexes et compacts, indicée par les réels positifs $\{G_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ est dite régulière si, δ_r étant la distance maximum entre l'origine et un point quelconque de G_r , il existe un réel positif γ , tel que

$$\lambda(G_r) \geq \gamma \pi \delta_r^2 \quad \forall r \in \mathbb{R}_+$$

et si δ_r tend vers l'infini avec r .

Pour tout $C \in \mathfrak{F}_0$ de mesure non nulle, et pour tout processus P stationnaire et du second ordre, on définit la nouvelle fonction ϕ_C sur \mathcal{M}_0

$$\phi_C(\mu) = P_{\mathcal{M}_0}(\mu) \int_X \mu(dy) \frac{\lambda(C \cap T_y(C))}{\lambda(C)}$$

où $\mathcal{M}_0 = \{\mu, \mu \in \mathcal{M}, \mu(\{0\}) = 1\}$ et $P_0(\phi_C) = \hat{\phi}_C(C)$ existe.

D'autre part, pour tout borélien borné G de \mathbb{R}^2 , de mesure non nulle, on a

$$\hat{\mathcal{A}}(C) = \frac{1}{Z\lambda(G)} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} P_0(d\mu) \mu(dy) \frac{\lambda(C \cap T_y(C))}{\lambda(C)} 1_G(x) \lambda(dx)$$

Soit,

- par application des propriétés de la mesure de Palm,

$$Z\lambda(G) \hat{\mathcal{A}}(C) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} P(d\mu) \mu(dx) \mu(dy) 1_G(x) \frac{\lambda(T_x(C) \cap T_y(C))}{\lambda(C)}$$

(en effet $\lambda(C \cap T_{y-x}(C)) = \lambda(T_x(C) \cap T_y(C))$.)

Soit

$$Z\lambda(G) \hat{\mathcal{A}}(C) = E \left[\int_G \phi_C(T_{-x} \mu) \mu(dx) \right]$$

avec toujours

$$\phi_C(\mu) = 1 \cdot \mathcal{M}_0(\mu) \int_X \mu(dy) \frac{\lambda(C \cap T_y(C))}{\lambda(C)}$$

Posons

$$N_G(\phi_C, \mu) = \int_G \phi_C(T_{-x} \mu) \mu(dx)$$

Puisque $P_0(\phi_C)$ existe, le théorème de Nguyen et Zessin permet d'affirmer que, si $(G_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ est une famille régulière

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{G_r}(\phi_C, \mu)}{\lambda(G_r)} = g(\mu)$$

existe P -presque sûrement et dans $L_1(P)$,

et que, si P est ergodique, cette limite est indépendante de la réalisation et vaut $Z P_0(\phi_C)$ soit $Z \hat{\mathcal{A}}(C)$.

Par conséquent, on a démontré que

$$\hat{\mathcal{A}}_G(C, \mu) = \frac{1}{Z\lambda(G)} N_G(\phi_C, \mu) = \frac{1}{Z\lambda(G)} \int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx) \mu(dy) 1_G(x) \frac{\lambda(T_x(C) \cap T_y(C))}{\lambda(C)}$$

est un estimateur sans biais de $\hat{\mathcal{A}}(C)$ pour tout C et tout G appartenant à \mathfrak{X}_0 et d'intérieur non vide.

De plus si P est ergodique, cet estimateur est consistant.

En pratique $N_G(\phi_C, \mu)$ s'obtient en faisant la somme pondérée de tous les couples de points de la réalisation, dont l'un au moins est dans G et en affectant au couple x_i, x_j le poids

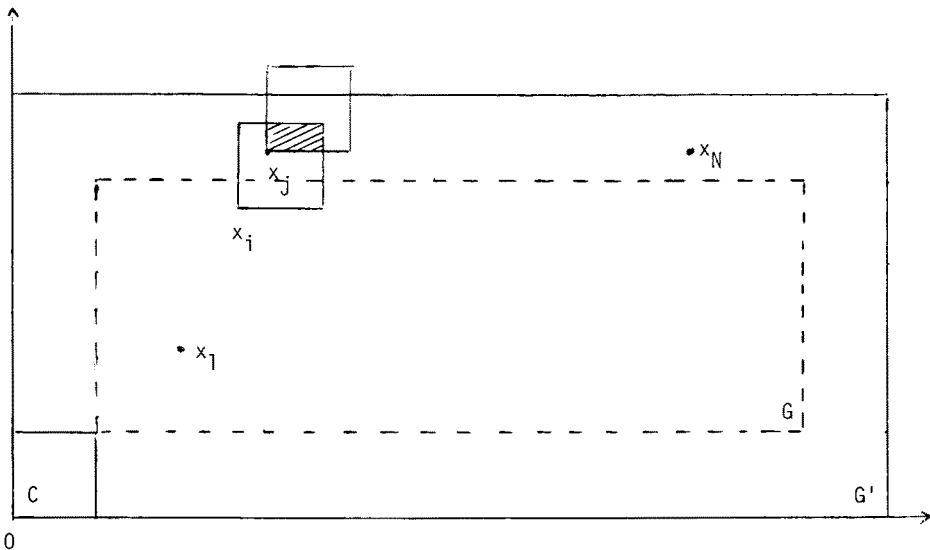
$$\frac{\lambda(T_{x_i}(C) \cap T_{x_j}(C))}{\lambda(C)}$$

$$N_G(\phi_C, \mu) = \sum_{x_i \in \text{supp. } \mu \cap G} \sum_{x_j \in \text{supp. } \mu} \frac{\lambda(T_{x_i}(C) \cap T_{x_j}(C))}{\lambda(C)}$$

Il est clair que pour deux processus stationnaires de même moment d'ordre 1, cette somme sera "en moyenne" plus grande pour le plus agrégé des deux.

Exemple : C est un carré de côté c , G est un rectangle de côtés $g(g')$, la région d'échantillonnage, ou d'observation de la réalisation est un rectangle plus grand que G , de mêmes diagonales que lui et de côtés $g + 2c$. $(g' + 2c)$.

Le poids que l'on affecte au couple x_i, x_j est l'aire de la région hachurée. Ici le "centre" du carré C est son sommet inférieur gauche



5. LOI LIMITE DE $\hat{\lambda}_G(C, \mu)$ QUAND P EST UN PROCESSUS DE POISSON .-

Sachant estimer de façon convenable $\hat{\lambda}(C)$ pour un certain nombre de processus, on va chercher à utiliser cet estimateur comme instrument de test. Pour cela, il faut connaître la loi de la variable aléatoire $\hat{\lambda}_G(C, \mu)$.

Il est théoriquement possible de la calculer pour un P stationnaire quelconque car on connaît l'expression de ses moments en fonction de ceux du processus.

D'une manière générale, si f_n est la fonction sur X^{2n} définie par

$$f_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n l_{G_i}(x_i) \frac{\lambda(T_{x_i}(C) \cap T_{y_i}(C))}{\lambda(C)}$$

alors,

$$E \left[\hat{\mu}_G(C)^n \right] = v_P^{(2n)}(f_n)$$

Cependant, même pour un processus de Poisson homogène, il n'est pas possible de donner une forme simple à tous ces moments, ni, par conséquent à la loi de $\hat{\mathcal{A}}_G(C, \mu)$. Nous nous contenterons donc de démontrer un théorème central limite dans le cas où P est un processus de Poisson homogène.

Posons

$$a_G(C, \mu) = \frac{\hat{\mathcal{A}}_G(C, \mu) - \mathcal{A}_G(C)}{(\text{var}(\hat{\mathcal{A}}_G(C)))^{1/2}}$$

Soit $(G_r)_{r \in \mathbb{R}^+}$ une famille régulière, où l'on suppose en outre que $\delta_r = r$ (ce qui ne restreint pas la généralité) et que, pour tout r , le périmètre $\xi(\partial G_r)$ et l'aire $\lambda(G_r)$ sont majorés respectivement par $\alpha \pi r$ et $\beta \pi r^2$.

A chaque G_r de la famille, on associe un recouvrement du plan à l'aide d'une grille de carrés égaux et contigus de côté $r^{1/2}$.

Posons $\delta(x, G) = \inf_{y \in G} \{|x-y|\}$ pour toute partie G de X .

Si ∂G est la frontière de G , on pose

$$G \overset{\partial}{\bar{v}} = \{x, x \in \mathbb{R}^2, \delta(x, \partial G) \leq v\}$$

$$G \bar{v} = G \cup G \overset{\partial}{\bar{v}} = \{x; x \in \mathbb{R}^2, \delta(x, G) \leq v\}.$$

On choisit $v = (2r)^{1/2}$ et on ne retient parmi les carrés de la grille précédemment définie que ceux dont l'intersection avec $G_r \bar{v}$ est non vide. Soit $Q_1, Q_2, \dots, Q_{N(G_r)}$ la collection de ces carrés. Parmi ces $N(G_r)$ carrés, $n(G_r)$ sont entièrement inclus dans $G_r \bar{v}$; ce sont, par construction, ceux dont l'intersection avec G_r n'est pas vide. On suppose que ces carrés sont $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n(G_r)}$. A l'intérieur de chacun de ces derniers, on trace un carré plus petit, de mêmes diagonales que le précédent et de côté $r^{1/2-2n}$ où n est le diamètre de l'ensemble C pour lequel on estime $\hat{\mathcal{A}}(C)$. Soient $D_1, D_2, \dots, D_{n(G_r)}$ les carrés ainsi construits.

G_r est la réunion des D_i , $i = 1, \dots, n(G_r)$ et d'un ensemble F_r qui sont deux à deux disjoints.

Alors,

$$Z\lambda(G_r) \left[\hat{\mathcal{E}}_{G_r}^{\vee}(C, \mu) - \hat{\mathcal{E}}(C) \right] = \sum_{i=1}^{n(G_r)} X_i(\mu) + X^C(\mu)$$

Avec

$$X_i(\mu) = \int_{X^2} 1_{D_i}(x) \frac{\lambda(T_x(C) \cap T_y(C))}{\lambda(C)} \mu(dx) \mu(dy) - Z(1 + Z\lambda(C)) \lambda(D_i)$$

$$X^C(\mu) = \int_{X^2} 1_{F_r}(x) \frac{\lambda(T_x(C) \cap T_y(C))}{\lambda(C)} \mu(dx) \mu(dy) - Z(1 + Z\lambda(C)) \lambda(F_r)$$

Soit

$$X_i(\mu) = \left[\hat{\mathcal{E}}_{D_i}(C, \mu) - \hat{\mathcal{E}}(C) \right] Z\lambda(D_i)$$

Pour tous C et G compacts, $\hat{\mathcal{E}}_G(C, \mu)$ est une variable aléatoire.

Les $\{X_i\}_{i=1, \dots, n(G_r)}$ sont indépendants et égaudistribués.

En effet, sous P , les événements $\{\mu(D_i) = .\}$ et $\{\mu(D_j) = .\}$ sont indépendants pour i et j distincts car D_i et D_j sont disjoints. Par conséquent, les événements $\{X_i(\mu) = .\}$ et $\{X_j(\mu) = .\}$ qui leur correspondent par une application mesurable sont également indépendants. La famille $\{X_i\}_{i=1, \dots, n(G_r)}$ est donc une famille de variables aléatoires indépendantes.

D'autre part, pour tout couple $i, j, i \neq j$, il existe un point u de X tel que $D_j = T_u(D_i)$. Il est alors facile de montrer que la loi de X_i sous P est celle de X_j sous $T_u P$, d'où la conclusion par stationnarité de P .

Calcul de la variance des X_i .

A partir de maintenant, on se restreint au cas où C est un carré de côté c et dont le sommet inférieur gauche est en 0. Pour plus de généralité, prenons un autre carré C' de côté c' , $c' \leq c$, dont le sommet inférieur gauche est également en 0 et un borélien borné G de X quelconque. On calcule alors

$$\gamma_{C, C'}(G) = \text{cov}(Z \lambda(G) \hat{\mathcal{E}}_G(C), Z \lambda(G) \hat{\mathcal{E}}_G(C')).$$

Ce calcul, long, est rejeté en annexe.

Posons

$$Z_i = \frac{X_i}{(\lambda(D_i))^{1/2}}$$

Alors, en reprenant les notations introduites dans l'annexe, on a

$$E \left[Z_i^2 \right] < \frac{f_2(C, C, D_i)}{\lambda(D_i)}$$

Soit

$$E \left[Z_i^2 \right] < Z^3 \lambda(C)^2 \left(3 + \frac{\lambda(D_i \sqrt{c\sqrt{2}})}{\lambda(D_i)} \right) + \frac{44}{9} Z^2 \lambda(C) + Z.$$

Pour C, carré de côté c, $\lambda(D_i) = (r^{1/2} - 2\sqrt{2}c)^2$ et $\lambda(D_i \sqrt{c\sqrt{2}}) = (r^{1/2} - 2\sqrt{2}c)^2 + 4c\sqrt{2}(r^{1/2} - 2\sqrt{2}c) + 2\pi c^2$

Donc

$$\frac{\lambda(D_i \sqrt{c\sqrt{2}})}{\lambda(D_i)} = 1 + 4 \frac{c\sqrt{2}}{r^{1/2} - 2\sqrt{2}c} + \frac{2\pi c^2}{(r^{1/2} - 2\sqrt{2}c)^2}$$

Si l'on prend $R = 10c$ par exemple, on voit que $Z_i, i = 1, \dots, n(G_r)$ est de carré intégrable dès que $r \geq R$.

Convergence en loi de $\sum_{i=1}^{n(G_r)} Z_i$

$\{Z_i\}_{i=1, \dots, n(G_r)}$ est donc une famille de variables aléatoires centrées, indépendantes, équidistribuées et de carré intégrable.

D'autre part, on a la double inégalité

$$n(G_r) \geq \lambda(G_r) r^{-1} \geq \gamma \pi r$$

La première inégalité provient du fait que l'aire de la réunion des $Q_i, i = 1, \dots, n(G_r)$ est au moins égale à celle de G_r , la seconde du fait que $\{G_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ est une famille régulière.

$n(G_r)$ tend donc vers l'infini avec r et la loi de la variable aléatoire

$$\frac{\sum_{i=1}^{n(G_r)} Z_i}{[n(G_r) E(Z_i^2)]^{1/2}}$$

tend faiblement vers la loi normale centrée réduite.

Convergence en loi de $a_{G_r}(C, \mu)$

Dans ces conditions $Z(G_r) = Z(r^{1/2} - 2\sqrt{2}c)^{-1} \lambda(G_r) \left[\int_{G_r} \bar{v}(C) - \bar{a}(C) \right]$

est la somme de deux variables aléatoires

$$\sum_{i=1}^{n(G_r)} Z_i \quad \text{d'une part,}$$

$$Z^C = \frac{\chi^C}{r^{1/2} - 2\sqrt{2}c} \text{ d'autre part,}$$

La première des deux convergeant en loi vers une gaussienne une fois convenablement normalisée.

Nous allons démontrer que

$$\lim_{r \nearrow \infty} \frac{E[Z^C]^2]}{E[Z(G_r^V)]^2]} = 0$$

ce qui démontre la convergence faible de la loi de $\frac{Z(G_r^V)}{[E[Z(G_r^V)]^2]}^{1/2}$ vers la loi normale centrée réduite (Bernstein, [1]).

Evaluation de $E[Z^C]^2$.

Le calcul de $\gamma_{C,c}(G)$ effectué en annexe permet de majorer $E[Z^C]^2]$

$$E[Z^C]^2] < (r^{1/2} - 2\sqrt{2}c)^{-1} f_2(C, C, F_r)$$

Le calcul de $f_2(C, C, F_r)$ nécessite celui de $\lambda(F_r^{C/\sqrt{2}})$

$$\lambda(F_r^{C/\sqrt{2}}) = \lambda(F_r) + c\sqrt{2} \xi(\partial G_r^V) + 2\pi c^2 + n(G_r)(4\sqrt{2}c r^{1/2} - 24c^2)$$

En effet, $F_r^{C/\sqrt{2}}$ est la réunion des ensembles disjoints suivants :

- F_r
- la couronne $\overline{G_r^{v+c\sqrt{2}}} \setminus G_r^V$
- les $n(G_r)$ ensembles $D_i \setminus D_i'$ où D_i' est le carré intérieur à D_i de mêmes diagonales et de côté $r^{1/2} - 4\sqrt{2}c$.

Par application de la propriété de convexité de la famille $\{G_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ (Hadwiger [3]), on a les relations

$$\lambda(\overline{G_r^{v+c\sqrt{2}}}) = \lambda(G_r^V) + c\sqrt{2} \xi(\partial G_r^V) + 2\pi c^2$$

$$\xi(\partial G_r^V) = \xi(\partial G_r) + 2\pi v$$

Soit

$$\lambda(F_r^{C/\sqrt{2}}) = \lambda(F_r) + c\sqrt{2} (\xi(\partial G_r) + 2\pi v) + 2\pi c^2 + n(G_r)(4\sqrt{2}r^{1/2}c - 24c^2)$$

On peut alors

i) majorer $\lambda(F_r^{C/\sqrt{2}})$ par

$$\lambda(F_r) + \sqrt{2} \alpha c \pi r + 4\pi c r^{1/2} + 2\pi c^2 + \beta \pi r(4\sqrt{2}c r^{1/2} - 24c^2)$$

ii) minorer $\lambda(F_r)$ par

$n(G_r)(\lambda(Q_i) - \lambda(D_i))$ soit encore par $\gamma \pi r(\lambda(Q_i) - \lambda(D_i))$

puisque les $Q_i, i = 1, \dots, n(G_r)$ recouvrent G_r et sont contenus dans $G_r^{\bar{v}}$ et compte tenu des propriétés de la famille $\{G_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$

On a $\lambda(Q_i) - \lambda(D_i) = 4\sqrt{2} c r^{1/2} - 8c^2$ et finalement

$$\frac{\lambda(F_r^{\bar{c}\sqrt{2}})}{\lambda(F_r)} \leq 1 + \frac{4\sqrt{2} \beta \pi c r^{3/2} + o(r^{3/2})}{4\sqrt{2} \gamma \pi c r^{3/2} + o(r^{3/2})}$$

A partir d'un certain rang, le rapport $\frac{\lambda(F_r^{\bar{c}\sqrt{2}})}{\lambda(F_r)}$ est donc majoré par une constante δ , telle que $\delta > 1 + \frac{\beta}{\gamma}$ et on peut majorer $E[Z^c]^2$ par

$$\text{Limite de } \frac{E[Z^c]^2}{E[Z(G_r^{\bar{v}})^2]} = \frac{(r^{1/2} - 2\sqrt{2}c)^{-2} \lambda(F_r) [Z^3 \lambda(C)^2(3+\delta) + \frac{44}{9} Z^2 \lambda(C) + Z]}{E[Z(G_r^{\bar{v}})^2]}$$

D'autre part, on peut majorer $E[Z(G_r^{\bar{v}})^2]$ par

$$(r^{1/2} - 2\sqrt{2}c)^{-2} \lambda[(G_r^{\bar{v}})^{\bar{c}\sqrt{2}}] [4 Z^3 \lambda(C)^2 + \frac{44}{9} Z^2 \lambda(C) + Z]$$

Par conséquent, pour démontrer que $\lim_{r \nearrow \infty} \frac{E[Z^c]^2}{E[Z(G_r^{\bar{v}})^2]} = 0$, il suffit

de démontrer que $\lim_{r \nearrow \infty} \frac{\lambda(F_r)}{\lambda[(G_r^{\bar{v}})^{\bar{c}\sqrt{2}}]} = 0$

On sait que $\lim_{r \nearrow \infty} \frac{\lambda(G_r^{\bar{v}})}{\lambda(G_r)} = 1$, car, par convexité,

$$\lambda(G_r^{\bar{v}}) = \lambda(G_r) + \varepsilon (\partial G_r) v + \pi v^2 \text{ et, par hypothèse, } \varepsilon (\partial G_r) < \alpha \pi r.$$

La double inégalité $\lambda(G_r) < \lambda[(G_r^{\bar{v}})^{\bar{c}\sqrt{2}}] < \lambda(G_r^{\bar{v}})$, vraie dès que $v > c\sqrt{2}$, implique

$$\lim_{r \nearrow \infty} \frac{\lambda[(G_r^{\bar{v}})^{\bar{c}\sqrt{2}}]}{\lambda(G_r)} = 1$$

Il suffit donc de montrer que $\lim_{r \nearrow \infty} \frac{\lambda(F_r)}{\lambda(G_r)} = 0$

Or, $\lambda(F_r) \leq \lambda(G_r^{\bar{v}}) - \lambda(G_r) + n(G_r)(4/\sqrt{2} c r^{1/2} - 8c^2)$,
 donc $\lambda(F_r) \leq \alpha \pi r v + \pi v^2 + \beta \pi r (4/\sqrt{2} c r^{1/2} - 8c^2)$
 Comme $v = \sqrt{2r}$, $\lambda(F_r) \leq \epsilon r^{3/2} + o(r^{3/2})$
 et par conséquent, on a l'inégalité

$$\frac{\lambda(F_r)}{\lambda(G_r)} \leq \frac{\epsilon r^{3/2} + o(r^{3/2})}{\gamma \pi r^2}$$

On a donc bien

$$\lim_{r \nearrow \infty} \frac{E[Z^{c^2}]}{E[Z(G_r^{\bar{v}})^2]} = 0$$

et par conséquent la convergence en distribution vers la loi normale centrée

réduite de $\frac{Z(G_r^{\bar{v}})}{(\text{var}(Z(G_r^{\bar{v}})))^{1/2}}$ donc de $a_{G_r^{\bar{v}}}(C, \mu)$.

On peut améliorer un peu ce résultat.

En effet, $\{G_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ étant une famille régulière, $\{G_r^{\bar{v}}\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ l'est aussi (il suffit de vérifier que $\{G_r^{\bar{v}}\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ obéit bien aux hypothèses d'une famille régulière), et en particulier que tout $G_r^{\bar{v}}$ est convexe compact non vide et que le diamètre de $G_r^{\bar{v}}$ tend vers l'infini avec r .

Or, on sait (Fritz [2]) que pour toute partie G de X compacte convexe et d'intérieur non vide, de diamètre d et pour tout η réel positif fixé

$$\lim_{d \nearrow \infty} \frac{\lambda(G^{\eta})}{\lambda(G)} = 0$$

et donc que $\lim_{d \nearrow \infty} \frac{\lambda(G^{\bar{v}})}{\lambda(G)} = \lim_{d \nearrow \infty} \frac{\lambda(G^{\bar{d}})}{\lambda(G)} = 1$

Cette propriété permet de conclure que

$$\begin{aligned} \lim_{r \nearrow \infty} \frac{\gamma_{c,c'}(G_r^{\bar{v}})}{\lambda(G_r^{\bar{v}})} &= 4Z^3 \lambda(C) \lambda(C') + 2Z^2 \left[\lambda(C) + \lambda(C') \left(1 + \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\lambda(C')}{\lambda(C)}} \right)^2 \right) \right] + Z \\ &= \phi(C, C') \quad \text{avec} \quad c' \leq c \end{aligned}$$

grâce à l'encadrement de $\gamma_{c,c'}(G)$ fourni en annexe.

La conclusion de ces (laborieux) calculs est que la loi de la variable aléatoire

$$\frac{\hat{a}_{G_r^{\bar{v}}}(C, \mu) - (1 + Z \lambda(C))}{Z \sqrt{\lambda(G_r^{\bar{v}})}} \xrightarrow{d} \frac{a_{G_r^{\bar{v}}}(C, \mu) - (1 + Z \lambda(C))}{\sqrt{\phi(C, C)}}$$

converge faiblement vers la loi normale centrée réduite.

Ce résultat fournit donc un test du caractère agrégatif d'un processus ponctuel ergodique à une échelle donnée, c'est-à-dire pour une taille de carré fixé, dont on connaît le niveau asymptotique.

6. LOI LIMITE DU k-uple $\{\hat{\mathcal{A}}_G(C_1, \mu), \hat{\mathcal{A}}_G(C_2, \mu), \dots, \hat{\mathcal{A}}_G(C_k, \mu)\}$.-

Comme on l'a fait remarquer plus haut, il est arbitraire de fixer la taille de C une fois pour toute et il faut envisager de calculer $\hat{\mathcal{A}}_G(C, \mu)$ pour plusieurs tailles de carré. Il est clair que pour deux carrés C_1 et C_2 de taille différente, mais de sommet inférieur gauche commun, $\hat{\mathcal{A}}_G(C_1, \mu)$ et $\hat{\mathcal{A}}_G(C_2, \mu)$ ne sont pas des variables aléatoires indépendantes. Il faut donc envisager, pour un k-uple de carrés C_1, C_2, \dots, C_k de taille différente, de côtés parallèles et de même sommet inférieur gauche, de trouver la loi limite du vecteur aléatoire $\{\hat{\mathcal{A}}_G(C_1, \mu), \hat{\mathcal{A}}_G(C_2, \mu), \dots, \hat{\mathcal{A}}_G(C_k, \mu)\}$.

Pour cela, on va étudier la loi limite d'une combinaison linéaire quelconque

$$\sum_{j=1}^k \ell_j \hat{\mathcal{A}}_G(C_j, \mu).$$

Cette combinaison linéaire s'écrit

$$\sum_{j=1}^k \ell_j \hat{\mathcal{A}}_G(C_j, \mu) = \int_X 1_G(x) \mu(dx) \int_X \mu(dy) \sum_{j=1}^k \ell_j \frac{\lambda(T_x(C_j) \cap T_y(C_j))}{\lambda(C_j)}$$

En supposant que les carrés C_1, C_2, \dots, C_k sont rangés en ordre croissant, on choisira $n = c_k \sqrt{2}$.

On peut alors écrire, en reprenant les notations du chapitre précédent

$$\begin{aligned} Z \lambda(G_r) \left[\sum_{j=1}^k \ell_j \hat{\mathcal{A}}_{G_r}(C_j, \mu) \right] = \\ \sum_{i=1}^{n(G_r)} \left[\int_X 1_{D_i}(x) \mu(dx) \int_X \mu(dy) \sum_{j=1}^k \ell_j \frac{\lambda(T_x(C_j) \cap T_y(C_j))}{\lambda(C_j)} \right] \\ + \int_X 1_{F_r}(x) \mu(dx) \int_X \mu(dy) \sum_{j=1}^k \ell_j \frac{\lambda(T_x(C_j) \cap T_y(C_j))}{\lambda(C_j)} \end{aligned}$$

On utilise les notations suivantes :

$${}^{(k)}\chi_{\lambda(G_r^V)} = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j Z \lambda(G_r^V) \left[\int_{G_r^V} \mu(C_j) - \mathcal{A}(C_j) \right]$$

$${}^{(k)}\chi_{D_i} = \int_X 1_{D_i}(x) \mu(dx) \int_X \mu(dy) \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \frac{\lambda(T_x(C_j) \cap T_y(C_j))}{\lambda(C_j)} \\ - \left[\sum_{j=1}^k \varepsilon_j (1 + Z \lambda(C_j)) \right] \lambda(D_i)$$

$${}^{(k)}\chi_{F_r^C} = \int_X 1_{F_r^C}(x) \mu(dx) \int_X \mu(dy) \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \frac{\lambda(T_x(C_j) \cap T_y(C_j))}{\lambda(C_j)} \\ - \left[\sum_{j=1}^k \varepsilon_j (1 + Z \lambda(C_j)) \right] \lambda(F_r^C)$$

On a donc

$${}^{(k)}\chi_{\lambda(G_r^V)} = \sum_{i=1}^{n(G_r)} {}^{(k)}\chi_{D_i} + {}^{(k)}\chi_{F_r^C}$$

Pour les mêmes raisons que plus haut, n ayant été convenablement choisi, $\left\{ {}^{(k)}\chi_{D_i} \right\}_{i=1, \dots, n(G_r)}$ est une famille de variables aléatoires

centrées, indépendantes et équidistribuées.

$$\text{var}({}^{(k)}\chi_{D_i}) = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j^2 \gamma_{C_j, C_j}(D_i) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=j+1}^k \varepsilon_j \varepsilon_m \gamma_{C_j, C_m}(D_i)$$

Posons

$${}^{(k)}Z_i = \frac{{}^{(k)}\chi_{D_i}}{(r^{1/2} - 2\sqrt{2}c_k)}$$

$\text{var}({}^{(k)}Z_i)$ vérifie l'inégalité

$$\text{var}({}^{(k)}Z_i) \leq \left[\sum_{j=1}^k |\varepsilon_j| \sqrt{\gamma_{C_j, C_j}(D_i)} \right]^2 \lambda(D_i)^{-1}$$

Cette quantité est finie car, comme on l'a démontré plus haut, $[\gamma_{C_j, C_j}(D_i)] \lambda(D_i)^{-1}$ est fini pour r assez grand.

Pour appliquer les résultats du paragraphe précédent, il suffit alors de démontrer que

$$\lim_{r \nearrow \infty} \frac{E[(^{(k)}\chi^C)^2]}{E[(^{(k)}\chi_{(G_r^{\bar{V}})})^2]} = 0$$

Or, grâce aux résultats démontrés antérieurement, on a d'une part

$$E(^{(k)}\chi^C) \leq \lambda(F_r) \left[\sum_{j=1}^k |\ell_j| (Z^3 \lambda(C_j)^2 (3+\delta) + \frac{44}{9} Z^2 \lambda(C_j) + Z)^{1/2} \right]^2$$

d'autre part

$$\lim_{r \nearrow \infty} \frac{E(^{(k)}\chi_{(G_r^{\bar{V}})})^2}{\lambda(G_r^{\bar{V}})} = \sum_{j=1}^k \ell_j^2 \phi(C_j, C_j) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=j+1}^k \ell_m \ell_j \phi(C_m, C_j)$$

Comme on sait que $\lim_{r \nearrow \infty} \frac{\lambda(F_r)}{\lambda(G_r^{\bar{V}})} = 0$, on est bien dans la situation du

paragraphe précédent, d'où la conclusion :

Pour tout k-uple de carrés distincts, croissants, de côtés parallèles et de même sommet inférieur gauche, pour tout k-uple de réels ℓ_1, \dots, ℓ_k , une famille régulière $\{G_r\}$ $r \in \mathbb{R}_+$ étant donnée, la loi de la variable aléatoire

$$Z \sqrt{\lambda(G_r^{\bar{V}})} \frac{\sum_{j=1}^k \ell_j \left(\tilde{\mathcal{C}}_{G_r^{\bar{V}}}(C_j, \mu) - \mathcal{C}(C_j) \right)}{\left[\sum_{j=1}^k \ell_j^2 \phi(C_j, C_j) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=j+1}^k \ell_j \ell_m \phi(C_m, C_j) \right]^{1/2}}$$

converge faiblement vers la loi normale centrée réduite.

Par conséquent, le vecteur aléatoire

$$\{Y_r(C_1, \mu), Y_r(C_2, \mu), \dots, Y_r(C_k, \mu)\}$$

avec $Y_r(C_j, \mu) = Z \sqrt{\lambda(G_r^{\bar{V}})} \left[\tilde{\mathcal{C}}_{G_r^{\bar{V}}}(C_j, \mu) - \mathcal{C}(C_j) \right]$ converge en loi vers

un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$(K_{mn})_{\substack{m=1, \dots, k \\ n=1, \dots, k}}$$

avec $K_{nm} = K_{mn} = \phi(C_m, C_n)$ si $c_n \leq c_m$.

Soit $K_{mn} = K_{nm} = 4 Z^3 \lambda(C_m) \lambda(C_n) + 2Z^2 \left[\lambda(C_m) + \lambda(C_n) \left(1 + \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\lambda(C_n)}{\lambda(C_m)}} \right) \right) \right] + Z$

$(K_{mn})_{m=1, \dots, k}$ est de rang k . En effet, dans le cas contraire, il existe-

rait un k-uple ℓ_1, \dots, ℓ_k tel que

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j^2 \phi(C_j, C_j) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=j+1}^k \lambda_j \lambda_m \phi(C_m, C_j) \text{ soit nul c'est-à-dire}$$

tel que $\sum_{j=1}^k \lambda_j \hat{\mathcal{A}}_{G_r}^{\bar{V}}(C_j, \mu)$ soit une variable aléatoire dégénérée. Or ceci

est impossible dans la mesure où le calcul de $\hat{\mathcal{A}}_{G_r}^{\bar{V}}(C_j, \mu)$ fait intervenir des points de la réalisation μ qui n'ont pas servi à calculer tous les $\hat{\mathcal{A}}_{G_r}^{\bar{V}}(C_i, \mu)$, $1 \leq i \leq j-1$.

On a donc encore à notre disposition un test du caractère agrégatif d'un processus ponctuel ergodique à plusieurs échelles simultanément, dont on connaît le niveau asymptotique, lié à la distribution du χ^2 à k degrés de liberté.

7. UN RESULTAT DE CONVERGENCE EN LOI .-
 =====

On considère maintenant la famille de variables aléatoires

$$y_r(t, \mu) = Z \lambda(G_r^{\bar{V}})^{1/2} (\hat{\mathcal{A}}_{G_r^{\bar{V}}}^{\bar{V}}(C_t, \mu) - \mathcal{A}(C_t)) ,$$

où C_t est le carré de côté t , ayant son sommet inférieure gauche en 0 et de côtés parallèles aux axes du plan, $0 \leq t \leq 1$.

Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, y_r est un processus sur $(0,1)$. On considère maintenant une suite U_n de nombres réels, croissante et tendant vers l'infini, par exemple la suite des nombres rationnels ordonnés supérieurs à un nombre fixé, et l'on note y_n le processus obtenu pour $r = U_n$.

La suite y_n converge en loi vers le processus gaussien $y(t)$ d'espérance nulle et tel que, sur $0 \leq s \leq t \leq 1$,

$$\text{cov} [y(s), y(t)] = 4Z^3 s^2 t^2 + Z^2 (s^2 + t^2 + s^2 (1 - \frac{s}{3t})^2) + Z$$

au moins pour un choix convenable de la famille $\{G_r\}$ $r \in \mathbb{R}_+$.

Pour démontrer cette proposition, étant donné le résultat du paragraphe précédent, il suffit de démontrer que la suite y_n est tendue dans C , c'est-à-dire dans l'ensemble des processus à trajectoire continue sur $(0,1)$.

Nous allons donc montrer que la suite y_n vérifie les hypothèses du théorème 12.3 de Billingsley [6], à savoir :

$$C(t,t) + C(s,s) - 2C(s,t) \leq Z^3 \left[\frac{4}{9} (t^2 - s^2)^2 + 2(t-s)^2 \right] + \frac{5}{18} Z^2 (t-s)^2$$

Ces résultats sont obtenus, lorsque la mise en évidence du carré d'une différence n'est pas immédiate, par mises en facteur successives de $(t-s)$ et en tenant compte du fait que sur le domaine considéré s, t et $\frac{s}{t}$ sont majorés par 1.

Par exemple, dans $A(t,t) + A(s,s) - 2A(s,t)$, apparait le terme

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} t^2 + \frac{4}{9} s^2 - 2s^2 \left(1 - \frac{s}{3t}\right)^2 &= \frac{4t^4 + 14s^2t^2 - 12s^3t - 2s^4}{9t^2} \\ &= (t-s)^2 \frac{4t^2 + 8st - 2s^2}{9t^2} \leq \frac{4}{3} (t-s)^2 \end{aligned}$$

Les trois inégalités énoncées plus haut permettent d'écrire, en tenant compte du fait qu'une somme de carrés de nombres positifs est inférieure au carré de la somme et que $\lambda(G_{r_1}) \leq \lambda(G_{r_n})$ pour tout n

$$E[(y_n(t) - y_n(s))^2] \leq (F(t) - F(s))^2$$

avec

$$F(t) = 4Z^3 t^2 + \frac{8}{3} Z^2 t + \frac{1}{\lambda(G_{r_1})} \left[Z^3 \left(\frac{4}{9} t^2 + 2t \right) + \frac{5}{18} Z^2 t \right].$$

On a donc bien la tension de la suite y_n et par suite la convergence en loi de ce processus.

8. CONCLUSION .-

=====

L'ensemble des résultats énoncés dans ce travail fournit donc une fonction d'ensemble $\mathcal{A}(\cdot)$ représentative du caractère agrégatif d'un processus ponctuel stationnaire du second ordre sur \mathbb{R}^2 . On sait estimer sans biais cette fonction d'ensemble, l'estimation étant consistante dans le cas où le processus est ergodique. Si l'on fait l'hypothèse que ce processus est de Poisson homogène, on sait caractériser le comportement asymptotique de cet estimateur et aussi celui d'une suite d'estimateurs indicée par la taille de l'ensemble de référence, un carré, pour lequel on estime la fonction \mathcal{A} . On peut donc tester de différentes manières l'hypothèse poissonnienne connaissant le niveau asymptotique de ces divers tests.

i) la suite $\{y_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue.

En effet, par application des propriétés du processus de Poisson, $\text{var}(y_n(0)) = Z$ et l'inégalité Bienaymé-Tchebyscheff permet d'énoncer que quel que soit n , il existe a tel que $P\{|y_n(0)| > a\} \leq \frac{Z}{n}$: il suffit de choisir $a = \sqrt{\frac{Z}{n}}$; ce qui implique la tension de $\{y_n(0)\}$.

ii) il existe une fonction F non décroissante bornée, continue sur $(0, 1)$ telle que

$$E[(y_n(t) - y_n(s))^2] \leq (F(t) - F(s))^2$$

pour tout couple t, s de $(0, 1)$ et pour tout n .

Notons au passage que la réalisation de cette inégalité en traîne, par application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebyscheff, que y_n est à trajectoire continue avec la probabilité 1 quel que soit n .

Il est probable que la majoration de $E[(y_n(t) - y_n(s))^2]$ par une expression convenable soit possible quelle que soit la famille $\{G_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ envisagée. Cependant, faute de connaître explicitement la forme de $\text{cov}(y_n(t), y_n(s))$, la démonstration se heurte à des difficultés sans doute surmontables par des arguments géométriques. On a préféré se restreindre au cas où $\{G_r\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ est une famille de rectangles de côtés parallèles aux axes du plan.

$G_{r_n}^{\bar{v}}$ étant un tel rectangle, de côtés L et ℓ , on a à la suite de calculs d'intégrales faciles, si $\inf(\ell, L) \geq 2$

$$\begin{aligned} L\ell \text{cov}[y_n(t), y_n(s)] &= L\ell [4Z^3 s^2 t^2 + 2Z^2(t^2 + s^2 + s^2(1 - \frac{s}{3t}))^2 + Z] \\ &- (L+\ell) [Z^3(\frac{2t^3 s^2}{3} + \frac{t^2 s^3}{3} + \frac{t s^4}{6} - \frac{s^5}{30}) + Z^2(\frac{t^3}{3} + \frac{s^3}{3} + \frac{s^3}{3}(1 - \frac{s}{3t})(1 - \frac{s}{2t}))] \\ &+ Z^3((\frac{t^2 s}{3} + \frac{s^3}{6} - \frac{s^4}{30t})^2 + \frac{t^4 s^2}{9} + \frac{s^4 t^2}{9}) + Z^2(\frac{t^4}{9} + \frac{s^4}{9} + \frac{s^4}{9}(1 - \frac{s}{2t})^2) \end{aligned}$$

soit, par souci de simplification des notations :

$$L\ell \text{cov}[y_n(t), y_n(s)] = A(s, t) L\ell - B(s, t)(L+\ell) + C(s, t)$$

Par conséquent, on a la relation

$$\begin{aligned} L\ell E[(y_n(t) - y_n(s))^2] &= L\ell [A(t, t) + A(s, s) - 2A(s, t)] \\ &- (L + \ell) [B(t, t) + B(s, s) - 2B(s, t)] + C(t, t) + C(s, s) - 2C(s, t) \end{aligned}$$

Il est facile de démontrer que, sur $0 \leq s \leq t \leq 1$

$$A(t, t) + A(s, s) - 2A(s, t) \leq 4Z^3(t^2 - s^2)^2 + \frac{8}{3} Z^2(t-s)^2$$

$$B(t, t) + B(s, s) - 2B(s, t) \geq 0$$

Ces résultats restent cependant incomplets. Il convient en particulier d'examiner le comportement de l'estimateur de \mathcal{A} sous des contre hypothèses raisonnables, en considérant des modèles de processus ponctuels ergodiques soit réguliers, soit agrégés, afin de juger de la valeur du test proposé.

x
x x

Calcul de $\gamma_{C,C'}(G)$

$$\begin{aligned} \gamma_{C,C'}(G) &\equiv \text{cov}(Z \lambda(G) \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_G}(C), Z \lambda(G) \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_G}(C')) \\ &= \int_{\mathcal{C}} P(d\mu) \int_{\mathcal{X}^4} 1_G(x_1) 1_G(x_2) \frac{\lambda(T_{x_1}(C) \cap T_{y_1}(C))}{\lambda(C)} \frac{\lambda(T_{x_2}(C') \cap T_{y_2}(C'))}{\lambda(C')} \\ &\quad \mu(dx_1) \mu(dy_1) \mu(dx_2) \mu(dy_2) - Z^2 \lambda(G)^2 (1 + Z \lambda(C))(1 + Z \lambda(C')). \end{aligned}$$

Le processus P étant un processus de Poisson homogène de densité de l'intensité Z , on a, en posant

$$1_G(x) \frac{\lambda(T_x(C) \cap T_y(C))}{\lambda(C)} = \phi(x, y, C, G)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{C,C'}(G) &= \int_{\mathcal{X}^4} \phi(x_1, y_1, C, G) \phi(x_2, y_2, C', G) \overset{(4)}{\nu_P}(dx_1, dy_1, dx_2, dy_2) \\ &\quad - Z^2 \lambda(G)^2 (1 + Z \lambda(C)) (1 + Z \lambda(C')) \end{aligned}$$

Soit, en notant que $\phi(x, x, C, G) = 1$

$$\begin{aligned} (*) \quad \gamma_{C,C'}(G) &+ Z^2 \lambda(G)^2 (1 + Z \lambda(C)) (1 + Z \lambda(C')) = \\ &Z^4 \int_{\mathcal{X}^4} \phi(x_1, y_1, C, G) \phi(x_2, y_2, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dy_1) \lambda(dx_2) \lambda(dy_2) \\ &+ Z^3 \int_{\mathcal{X}^3} \phi(x_1, y_1, C, G) 1_G(x_2) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \lambda(dy_1) \\ &+ Z^3 \int_{\mathcal{X}^3} \phi(x_1, y_1, C, G) \phi(x_2, y_1, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \lambda(dy_1) \\ &+ Z^3 \int_{\mathcal{X}^3} \phi(x_1, y_1, C, G) \phi(y_1, y_2, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dy_1) \lambda(dy_2) \\ &+ Z^3 \int_{\mathcal{X}^3} \phi(x_1, y_1, C, G) \phi(x_2, x_1, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dy_1) \lambda(dx_2) \\ &+ Z^3 \int_{\mathcal{X}^3} \phi(x_1, y_1, C, G) \phi(x_1, y_2, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dy_1) \lambda(dy_2) \\ &+ Z^3 \int_{\mathcal{X}^3} \phi(x_2, y_2, C', G) 1_G(x_1) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \lambda(dy_2) \\ &+ Z^2 \int_{\mathcal{X}^2} 1_G(x_2) \phi(x_1, x_2, C, G) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Z^2 \int_{X^2} \phi(x_1, x_2, C, G) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \\
& + Z^2 \int_{X^2} 1_G(x_1) \phi(x_2, x_1, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \\
& + Z^2 \int \phi(x_1, x_2, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \\
& + Z^2 \int_{X^2} 1_G(x_1) 1_G(x_2) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \\
& + Z^2 \int_{X^2} \phi(x_1, y_1, C, G) \phi(x_1, y_1, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dy_1) \\
& + Z^2 \int_{X^2} \phi(x_1, x_2, C, G) \phi(x_2, x_1, C', G) \lambda(dx_1) \lambda(dx_2) \\
& + Z \int_X 1_G(x) \lambda(dx).
\end{aligned}$$

De façon claire, on a
$$\int_X \frac{\lambda(T_x(C) \cap T_y(C))}{\lambda(C)} \lambda(dy) = \lambda(C)$$

En effet, puisque C est un carré de côté c ,

$$\int_X \frac{\lambda(T_x(C) \cap T_y(C))}{\lambda(C)} \lambda(dy) = \left(\int_{-c}^{+c} \frac{c-|h|}{c} dh \right)^2 = c^2 = \lambda(C)$$

De plus, lorsque x varie dans G , $\lambda(T_x(C) \cap T_y(C))$ est nul pour tout y n'appartenant pas à $G^{c/\sqrt{2}}$.

Si l'on appelle $G^{c/\sqrt{2}} = \{x : x \in G, \delta(x, \partial G) > c/\sqrt{2}\}$, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_{X^2} 1_G(y) \phi(x, y, C, G) \lambda(dx) \lambda(dy) &< \lambda(G) \lambda(C) \\
\int_{X^2} 1_G(y) \phi(x, y, C, G) \lambda(dx) \lambda(dy) &> \lambda(G^{c/\sqrt{2}}) \lambda(C)
\end{aligned}$$

Ceci va nous permettre d'encadrer $\gamma_{C,C'}(G)$.

Si l'on note

$$\begin{aligned}
\gamma_{C,C'}(G) + Z^2 \lambda(G)^2 (1+Z \lambda(C)) (1+Z \lambda(C')) &= \alpha_4 + \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + \delta_3 \\
+ \epsilon_3 + \eta_3 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 + \epsilon_2 + \eta_2 + \zeta_2 + \alpha_1
\end{aligned}$$

Chacun des symboles ci-dessus représentant un des termes de la somme membre de droite de (*), on a

$$\gamma_{C,C'}(G) = \beta_3 + \gamma_3 + \delta_3 + \epsilon_3 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 + \eta_2 + \zeta_2 + \alpha_1.$$

En effet,

$$\alpha_4 = Z^4 \lambda(G)^2 \lambda(C) \lambda(C')$$

$$\alpha_3 = Z^3 \lambda(G)^2 \lambda(C)$$

$$\eta_3 = Z^3 \lambda(G)^2 \lambda(C')$$

$$\varepsilon_2 = Z^2 \lambda(G)^2$$

On peut alors encadrer ou calculer exactement chacun des termes restants.

$$Z^3 \lambda(G \frac{c}{\sqrt{2}}) \lambda(C) \lambda(C') < \beta_3 < Z^3 \lambda(G \frac{c'}{\sqrt{2}}) \lambda(C) \lambda(C')$$

$$Z^3 \lambda(G \frac{c}{\sqrt{2}}) \lambda(C) \lambda(C') < \gamma_3 < Z^3 \lambda(G) \lambda(C) \lambda(C')$$

$$Z^3 \lambda(G \frac{c'}{\sqrt{2}}) \lambda(C) \lambda(C') < \delta_3 < Z^3 \lambda(G) \lambda(C) \lambda(C')$$

$$\varepsilon_3 = Z^3 \lambda(G) \lambda(C) \lambda(C')$$

$$Z^2 \lambda(G \frac{c}{\sqrt{2}}) \lambda(C) < \alpha_2 < Z^2 \lambda(G) \lambda(C)$$

$$\beta_2 = Z^2 \lambda(G) \lambda(C)$$

$$Z^2 \lambda(G \frac{c'}{\sqrt{2}}) \lambda(C') < \gamma_2 < Z^2 \lambda(G) \lambda(C')$$

$$\delta_2 = Z^2 \lambda(G) \lambda(C')$$

Le calcul de η_2 est un peu plus délicat. On a en fait

$$\begin{aligned} \eta_2 &= Z^2 \lambda(G) \left[\int_{-c'}^{c'} \frac{c-|h|}{c} \frac{c'-|h|}{c'} dh \right]^2 \\ &= Z^2 \lambda(G) \lambda(C') \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\lambda(C')}{\lambda(C)}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$Z^2 \lambda(G \frac{c'}{\sqrt{2}}) \lambda(C') \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\lambda(C')}{\lambda(C)}} \right)^2 < \varepsilon_2 < Z^2 \lambda(G) \lambda(C') \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\lambda(C')}{\lambda(C)}} \right)^2$$

$$\alpha_1 = Z \lambda(G).$$

En définitive, en supposant $c' \leq c$, $\gamma_{c,c'}(G)$ vérifie la double inégalité

$$f_1(C, C', G) < \gamma_{c,c'}(G) < f_2(C, C', G)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(C, C', G) &= Z^3 \lambda(C) \lambda(C') \left[2 \lambda(G \frac{c}{\sqrt{2}}) + \lambda(G \frac{c'}{\sqrt{2}}) + \lambda(G) \right] \\ &+ Z^2 \left[\lambda(C) (\lambda(G \frac{c}{\sqrt{2}}) + \lambda(G)) + \lambda(C') (\lambda(G \frac{c'}{\sqrt{2}}) + \lambda(G)) \right] \\ &+ Z^2 \lambda(C') \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\lambda(C')}{\lambda(C)}} \right)^2 (\lambda(G) + \lambda(G \frac{c'}{\sqrt{2}})) + Z \lambda(G) \end{aligned}$$

$$f_2(C, C', G) = Z^3 \lambda(C) \lambda(C') (\lambda(G^{\sqrt{2}}) + 3 \lambda(G)) \\ + 2Z^2 \lambda(G) [\lambda(C) + \lambda(C') + \lambda(C')(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\lambda(C')}{\lambda(C)}})^2] + Z\lambda(G) .$$

BIBLIOGRAPHIE .-

=====

- [1] BERNSTEIN S. (1927). Sur l'Extension du Théorème Limite du Calcul des Probabilités aux Sommes de Quantités Dépendantes : *Math. Ann.* 97, 1-59.
- [2] FRITZ J. (1970). Generalization of Mac Millan's Theorem to Random Set Functions ; *Studia Math. Sci. Hung.* 5, 369-394.
- [3] HADWIGER H. (1957). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*; Springer Verlag.
- [4] NGUYEN X.X., ZESSIN H. (1977), *Punktprozesse mit Wechselwirkung* ; *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*
- [5] PIELOU E.C. (1969). *An Introduction to Mathematical Ecology*; Wiley-Interscience.
- [6] BILLINGSLEY P. (1968) *Convergence of Probability Measures* ; Wiley-Interscience.